巾零軌道とリー群の表現論*

西山 享 (Kyo Nishiyama)
京都大学 総合人間学部

この報告では、半単純リー群の巾零軌道とユニタリ表現論との関係について簡単に紹介したい。

以前、他分野の人と話をしていて、この分野の専門家以外には、たとえば巾零軌道がどのようなものかさえあまりよく知られていないことを知ってショックであった[1]。しかし例えば、$p \times q$ 行列でその階数が r のもの全体 (その閉包はいわゆる determinantal variety) とか、$n \times n$ 対称行列で階数が r のもの全体などはもっとも簡単な巾零軌道の例である。このような代数多様体は数学の至るところに顔を出し、良く研究されている。

そこで、この報告の前半では、巾零軌道の基本事項と表現論との関わりの初歩的な部分を非専門家を想定して解説しようと思う。具体的には、複素群の巾零軌道の性質から始めて、実半単純リー群の巾零軌道、あるいは対称対に付随した巾零軌道の幾何的な性質について簡単に述べる。その後、ユニタリ表現に対して、対称対の巾零軌道が随伴多様体として対応すること、表現の漸近台とか波面集合として実巾零軌道が対応すること、そしてこの二つの不変量の間の関係について述べる。

巾零軌道の幾何的な性質については、1960 から 70 年代にかけて、Kostant (および Rallis, Steinberg たち) によって研究が開始され、基本的な性質はほとんどその時期に得られている。表現と巾零軌道の関係は、D 加群の特性多様体の理論に刺激される形で、1980 年前後に Borho-Brylinski や Vogan によって導入された。同時にその時期に、Springer 対応、巾零多様体の特異点解消に伴う旗多様体の幾何学などが研究され、その後の急速な発展と多様な分野への広がりへとつながっていく。しかし、これらの話題をすべて解説するのは筆者の手にあまるものであり、残念ながらこの報告では、そのほんの一端を紹介するにすぎない。

さて、この報告の後半では、実半単純リー群のユニタリ表現の theta 対応と巾零軌道の間に深い関係があることを、我々の最近の研究結果をもとに説明したい。

具体的には、表現の theta 対応に対して、巾零軌道の theta 対応が定義できること、そして両者の theta 対応が表現の随伴サイクルを通して結び付いていることを報告する。副産物として、巾零軌道 (の閉包) の正則関数環の構造や、代数群の巾零軌道上への重複度

---

*代数学シンポジウム (九州大学六本松キャンパス) August 9, 2000 における講演 “Theta lifting of representations and geometry of nilpotent orbits” の報告.

[1] 我々にとって中心的と思われる概念が他分野では全くそうでないという、まぁいわば井の中の蛙的ショックだった。

自由な作用、軌道の次数の積分公式、あるいは表現の Bernstein 次数などが具体的に与えられることになる。これらは我々の研究 (落合啓之 (九大数理)、谷口健二 (青学大理工)、Chen-bo Zhu (NUS) との共同研究) の副産物ではあるが、単なる副産物としてではなく、それ自身が個々の研究の対象として扱われるにふさわしい豊富な内容を含んでいる。

この報告が、巾零軌道と表現論に少しでも興味を持つきっかけとなればそれは筆者の望外の喜びである。

1 複素巾零軌道

この節に限っては G を複素半単純 (あるいは認容) リー群としよう。たとえば古典型の行列群 $G = SL_n, SO_n, Sp_n$ を思い浮かべていただければよい。複素単純なリー群としては、あとは例外型が少し残っているだけである (局所同型を除いて)。

G はそのリー環 $\mathfrak{g}$ に随伴表現によって働いているが、そのうち巾零元の全体からなる代数多様体を不変にしている。

$$G \curvearrowright \mathfrak{g} \supset \mathcal{N}_\mathfrak{g} = \{x \in \mathfrak{g} \mid \mathrm{ad}\, x \text{ が巾零写像 }\}$$

ここで $x \in \mathfrak{g}$ が巾零元であるとは、$\mathrm{ad}\, x$ が $\mathfrak{g}$ 上巾零に作用することを意味する。$\mathcal{N}_\mathfrak{g}$ を**巾零多様体**と呼ぶ。その性質をいくつかあげておこう。

べき零多様体 $\mathcal{N}_\mathfrak{g}$ の性質

(a) **完全交叉**　$\mathcal{N}_\mathfrak{g}$ は完全交叉、正規代数多様体である。また、それはアファイン錐であるので、 $\mathbb{P}(\mathfrak{g})$ の中で射影化して射影多様体とみなすことができる。これを $\mathbb{P}\mathcal{N}_\mathfrak{g}$ で表す。

(b) **定義イデアルと不変式**　$J = \mathbb{C}[\mathfrak{g}]^G$ を $\mathbb{C}[\mathfrak{g}]$ における G 不変元の全体とし、J_+ をその augmentation ideal とする (定数項のない元全体)。すると、べき零多様体の零化イデアルは $\mathbf{I}(\mathcal{N}_\mathfrak{g}) = J_+\mathbb{C}[\mathfrak{g}]$ で与えられる。

これはつまり、幾何学的商 $\mathfrak{g}//G = \mathrm{Spec}\, \mathbb{C}[\mathfrak{g}]^G$ のアフィン基本射を$\mu : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} // \mathrm{Ad}\, G$ とするとき、$\mathcal{N}_\mathfrak{g} = \mu^{-1}(0)$ であることを意味している。

(c) **主べき零軌道と軌道の個数の有限性**　G は$\mathcal{N}_\mathfrak{g}$ に開かつ稠密な軌道を持つ。これを主べき零軌道と呼ぶ。また $\mathcal{N}_\mathfrak{g}$ における G 軌道の個数は有限である。つまり $\#\mathcal{N}_\mathfrak{g}/\,\mathrm{Ad}\, G < \infty$.

(d) **次数とポアンカレ多項式**　射影多様体 $\mathbb{P}\mathcal{N}_\mathfrak{g}$ の次数は、 Weyl 群の位数 $\#W$ に一致する。カルタン部分代数を $\mathfrak{h}$ で表すとき、この次数は、交点数 $\mathrm{intersect.}\#(\mathcal{N}_\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ に等しい。さらに $\mathbb{P}\mathcal{N}_\mathfrak{g}$ のポアンカレ級数が次のように具体的に与えられる。

$$P_{\mathcal{N}_\mathfrak{g}}(t) = \frac{\prod_{1 \le i \le l}(1 - t^{m_i+1})}{(1-t)^{\dim \mathfrak{g}}}$$

ここで $\{m_1, m_2, \ldots, m_l\}$ $(l = \dim \mathfrak{h} = \mathrm{rank}\, \mathfrak{g})$ は $\mathfrak{g}$ (あるいは同じことだが、W) の指数を表す[2]。

[2]不変式環 $\mathbb{C}[\mathfrak{g}]^G$ の斉次生成元の次数は $\{m_i + 1\}_{i=1}^{l}$ と一致する。また $\mathfrak{g}$ の随伴群の cohomology の Poincaré 多項式は$\prod_{i=1}^{l}(1 + t^{2m_i+1})$ と書ける。

(e) **関数環と調和多項式** $\mathfrak{g}$ 上の多項式 $f(x)$ に対して、その変数を微分作用素で置き換えた定数係数の微分作用素を $f(\partial)$ であらわそう。多項式 $h \in \mathbb{C}[\mathfrak{g}]$ が、定数項のない任意の G 不変元 $f(x) \in J_+$ に対して、$f(\partial)h = 0$ を満たすとき、h を G 調和多項式と呼ぶ。調和多項式の全体を $\mathcal{H}$ と書けば、

$$\mathbb{C}[\mathfrak{g}] \simeq \mathcal{H} \otimes J \qquad (J = \mathbb{C}[\mathfrak{g}]^G)$$

が成り立っている。同型は右辺のテンサー積 $h \otimes f$ に対して、多項式の積 $h \cdot f$ を対応させることによって得られる。

この式から、G の表現としての同型 $\mathbb{C}[\mathcal{N}_\mathfrak{g}] \simeq \mathcal{H}$ がわかるが、これは具体的に次のように分解する。

$$\mathbb{C}[\mathcal{N}_\mathfrak{g}] \simeq \mathcal{H} \simeq \bigoplus_{\lambda \in Q^+} m_\lambda \tau(\lambda) \qquad (m_\lambda = \dim \tau(\lambda)^T)$$

ここで T はカルタン部分群、Q はルート格子、Q^+ はそのうち優形式であるようなものの全体を表す。さらに $\lambda \in Q^+$ に対して、$\tau(\lambda)$ は G の最高ウェイト λ を持つような有限次元既約表現である。重複度 $m_\lambda = \dim \tau(\lambda)^T$ はゼロウェイト空間の次元で与えられる。

以上述べたことはすべて [12] で得られた結果である。

Example 1.1 例として、特殊線型群 $G = SL_n(\mathbb{C})$ を考えてみよう。

$$\begin{aligned} \text{べき零軌道} &\Longleftrightarrow \text{べき零行列の Jordan 標準形} \\ &\Longleftrightarrow n \text{ の分割} \\ &\Longleftrightarrow \text{箱の個数が } n \text{ の Young 図形} \end{aligned}$$

だから、べき零軌道はそれぞれ Young 図形と対応し、したがって有限個である。古典群の場合、特殊線型群に還元することにより、(実リー群であっても) 何らかの制約がついた Young 図形とべき零軌道は対応する。

たとえば、自明な軌道は

$$\{0\} : \text{自明な軌道} \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{|c|}\hline \\ \hline \\ \hline \vdots \\ \hline \\ \hline \end{array}\right\} n \text{ 個}$$

と対応し、主べき零軌道は、

$$\mathrm{Ad}\, G \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \underbrace{\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline & & \cdots & \\ \hline \end{array}}_{n \text{ 個}}$$

と対応している。

この場合、指数は $\{1, \cdots, n-1\}$ なので、ポアンカレ級数は

$$P_{\mathcal{N}_\mathfrak{g}}(t) = \frac{\prod_{k=1}^n (1-t^k)}{(1-t)^{n^2}}$$

であって、次数は $\deg \mathcal{N}_\mathfrak{g} = n! = \#\mathfrak{S}_n$ で与えられる。

上の例が示唆するように、べき零軌道は Weyl 群の表現と深く関っている。$SL_n(\mathbb{C})$ の場合には Weyl 群は n 次の対称群で、その表現がやはり Young 図形でパラメータづけされることはよく知られている通りである。一般にはそれほど単純ではなく、べき零軌道と固定部分群の連結成分のなす群の表現をあわせて考えることにより、Springer 対応と呼ばれる Weyl 群の表現との対応が得られる。

その他、軌道の閉包の特異点解消が旗多様体の部分多様体の余法線束として得られることなど 1970 年代以降の幾何学的な発展はめざましい。

2 実巾零軌道と対称対に付随した巾零軌道

この節以降、$G_\mathbb{R}$ を (コンパクトでない) 実半単純リー群、$K_\mathbb{R}$ をその極大コンパクト部分群とする。$G_\mathbb{R}$ は、もっと一般に、認容としてもかまわない。$G_\mathbb{R}$ および $K_\mathbb{R}$ のリー環を $\mathfrak{g}_\mathbb{R}, \mathfrak{k}_\mathbb{R}$ で表わし、その複素化を $\mathfrak{g}, \mathfrak{k}$ などと書く。$G_\mathbb{R}$ は複素リー群 $G_\mathbb{C}$ に含まれているとして、$\mathfrak{k}$ に対応するリー部分群を $K_\mathbb{C}$ で表す。部分リー環 $\mathfrak{k}_\mathbb{R}$ を指定することで、$\mathfrak{g}_\mathbb{R}$ のカルタン対合 ϑ が決まり、ϑ の ± 1 固有空間分解としてカルタン分解 $\mathfrak{g}_\mathbb{R} = \mathfrak{k}_\mathbb{R} \oplus \mathfrak{p}_\mathbb{R}$ が得られる。これを複素化したものを $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ と書く。

さて、実べき零多様体を $\mathcal{N}_{\mathfrak{g}_\mathbb{R}} = \mathcal{N}_\mathfrak{g} \cap \mathfrak{g}_\mathbb{R}$ で定義しよう。これは明らかに $G_\mathbb{R}$ 不変であり、有限個の $G_\mathbb{R}$ 軌道の和に分解する。また $\mathcal{N}_\mathfrak{p} = \mathcal{N}_\mathfrak{g} \cap \mathfrak{p}$ と置き、これを対称対 $(G_\mathbb{C}, K_\mathbb{C})$ に付随したべき零多様体と呼ぶ ([27] 参照)。$\mathcal{N}_\mathfrak{p}$ は $K_\mathbb{C}$ の随伴作用で不変であり、やはり有限個の $K_\mathbb{C}$ 軌道の和に分解する。

以上のような記号の氾濫は慣れているものには分かりやすいが、専門家以外には少々分かりにくいだろう。少し例をあげておく。これは後でも頻繁に使用する基本的な例である。

Example 2.1 $G_\mathbb{R}$ としては例えば、$SU(p,q), SO(p,q), Sp(p,q)$ などを考えればよい。

(1) $G_\mathbb{R} = U(p,q)$ のとき[3]。このときには $U(p,q)$ をごく普通に実現すると、

$$K_\mathbb{R} = \left(\begin{array}{c|c} U(p) & \\ \hline & U(q) \end{array}\right), \qquad \mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p} = \left(\begin{array}{c|c} \mathfrak{gl}_p & \\ \hline & \mathfrak{gl}_q \end{array}\right) \oplus \left(\begin{array}{c|c} & M_{p,q} \\ \hline M_{q,p} & \end{array}\right)$$

がカルタン分解を与える。ただし $M_{p,q} = M_{p,q}(\mathbb{C})$ は $p \times q$ 行列の全体を表す。このとき $K_\mathbb{C} = GL_p(\mathbb{C}) \times GL_q(\mathbb{C})$ 加群として $\mathfrak{p} = M_{p,q} \oplus M_{q,p} \simeq M_{p,q} \oplus M_{p,q}^*$ である。また、

$$\mathcal{N}_\mathfrak{p} = \{(X,Y) \in M_{p,q} \oplus M_{q,p} \mid (XY)^k = 0 \quad (\exists k \in \mathbb{N})\}$$

[3] $U(p,q)$ は認容リー群であるが、$SU(p,q)$ よりもむしろ自然で扱いやすい。

(2) $G_{\mathbb{R}} = O(p,q)$ のとき[4]。このときには $O(p,q)$ をごく普通に実現すると、

$$K_{\mathbb{R}} = \left(\begin{array}{c|c} O(p) & \\ \hline & O(q) \end{array}\right), \quad \mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p} = \left(\begin{array}{c|c} \mathfrak{so}_p & \\ \hline & \mathfrak{so}_q \end{array}\right) \oplus \left\{ \left(\begin{array}{c|c} & X \\ \hline {}^t X & \end{array}\right) \middle| X \in M_{p,q} \right\}$$

がカルタン分解を与える。このとき $K_{\mathbb{C}} = O_p(\mathbb{C}) \times O_q(\mathbb{C})$ 加群として $\mathfrak{p} \simeq M_{p,q}(\mathbb{C})$ である。また $X \in M_{p,q}(\mathbb{C})$ がべき零元であるとは、$p \times p$ 行列 $X\,{}^t X$ がべき零行列であることと同値である。したがって

$$\mathcal{N}_{\mathfrak{p}} = \{X \in M_{p,q}(\mathbb{C}) \mid (X\,{}^t X)^k = 0 \quad (\exists k \in \mathbb{N})\}$$

(3) $G_{\mathbb{R}} = Sp(n,\mathbb{R})$ のとき。$G_{\mathbb{R}} = Sp(n,\mathbb{C}) \cap U(n,n)$ と実現しておくと[5]、

$$K_{\mathbb{R}} = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} g & \\ \hline & {}^t g^{-1} \end{array}\right) \middle| g \in U(n) \right\} \simeq U(n),$$

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p} = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} A & \\ \hline & -{}^t A \end{array}\right) \middle| A \in \mathfrak{gl}_n \right\} \oplus \left(\begin{array}{c|c} & \mathrm{Sym}_n \\ \hline \mathrm{Sym}_n & \end{array}\right)$$

がカルタン分解を与える。ただし $\mathrm{Sym}_n(\mathbb{C})$ は $n \times n$ の複素対称行列全体を表す。したがって $K_{\mathbb{C}} \simeq GL_n(\mathbb{C})$ 加群として、$\mathfrak{p} \simeq \mathrm{Sym}_n(\mathbb{C}) \oplus \mathrm{Sym}_n(\mathbb{C})^*$ である。また

$$\mathcal{N}_{\mathfrak{p}} = \{(X,Y) \in \mathrm{Sym}_n(\mathbb{C}) \oplus \mathrm{Sym}_n(\mathbb{C}) \mid (XY)^k = 0 \quad (\exists k \in \mathbb{N})\}$$

実べき零軌道は対称対 $(G_{\mathbb{C}}, G_{\mathbb{R}})$ に関するべき零軌道と考えることもできる[6]。関口次郎は、このような二つの対称対のべき零軌道の間に一対一の対応があることを一般に証明している ([27])。このように一見異なる二つのべき零軌道の間に対応がつくことを発見したのは、画期的な出来事であった。この対応を Kostant-関口対応と呼ぶ。以下に Kostant-関口対応を含めた実べき零軌道の性質を簡単に紹介しておこう。

べき零多様体 $\mathcal{N}_{\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}}$ と $\mathcal{N}_{\mathfrak{p}}$ の性質

(a) **有限性**　べき零軌道は有限個である。すなわち、$\#\mathcal{N}_{\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}} / \mathrm{Ad}\, G_{\mathbb{R}} < \infty$, $\#\mathcal{N}_{\mathfrak{p}} / \mathrm{Ad}\, K_{\mathbb{C}} < \infty$ が成り立つ。

(b) **巾零多様体**　K_{ϑ} を $G_{\mathbb{C}}$ (随伴群とする) の中でカルタン対合と可換な元全体のなす部分群とする。K_{ϑ} は $K_{\mathbb{C}}$ を連結成分に持つ、一般には連結でない代数群になる。

巾零多様体 $\mathcal{N}_{\mathfrak{p}}$ は既約とは限らない代数多様体であって[7]、その零化イデアルは定数項のない K_{ϑ} 不変式 $\mathbb{C}[\mathfrak{p}]_+^{K_{\vartheta}}$ で生成される。正則関数環 $\mathbb{C}[\mathcal{N}_{\mathfrak{p}}]$ は K_{ϑ} 加群として、$\mathfrak{p}$ 上の K_{ϑ} 調和多項式の全体と同型で、その既約分解は

$$\mathbb{C}[\mathcal{N}_{\mathfrak{p}}] \simeq \sum_{\gamma}^{\oplus} m_{\gamma} \gamma \qquad (m_{\gamma} = \dim \gamma^{M_{\vartheta}})$$

[4] これは連結ではないが、やはり連結成分を考えるより、こちらの方が自然である

[5] これは通常の実現とは異なるが、対称対 $(G_{\mathbb{C}}, K_{\mathbb{C}})$ を考えるときにはこちらのほうが考えやすい。

[6] このように考えるときには、$\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ ではなく $i\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ の中で考えるのが厳密ではあるが、ここではあまりこだわらない。

[7] K_{ϑ} が連結でないことは、巾零多様体が既約でないことを反映している。既約な対称対に関しては、既約成分の個数は 2 個か 4 個程度であり、あまり多くない ([26])。

で与えられる。ただし、γ は K_ϑ の既約表現全体をわたり、$\mathfrak{p}_\mathbb{R}$ の極大可換部分空間 (カルタン部分空間) を $\mathfrak{a}_\mathbb{R}$ とするとき、$M_\vartheta = Z_{K_\vartheta}(\mathfrak{a}_\mathbb{R})$ ($\mathfrak{a}_\mathbb{R}$ の K_ϑ における中心化群) である。もちろん γ^{M_ϑ} は γ の中の M_ϑ 不変元のなす部分空間を表している (ゼロウェイト空間の一般化)。

このように対称対 $(G_\mathbb{C}, K_\mathbb{C})$ に付随するべき零多様体 $\mathcal{N}_\mathfrak{p}$ に関しては、複素べき零多様体とほぼ平行な議論ができ、それを一般化して同様な性質が成り立つ。これらの性質は、初期の頃に Kostant-Rallis [13] によって得られている。しかし一方では、巾零多様体が既約でないなどの障害も現れる。既約成分が完全交叉であるか、あるいは正規であるかなどの問題もまだ完全には解決されていないようである。

(c) **Kostant-関口対応 ([27])** $\mathcal{N}_{\mathfrak{g}_\mathbb{R}} / \operatorname{Ad} G_\mathbb{R}$ と $\mathcal{N}_\mathfrak{p} / \operatorname{Ad} K_\mathbb{C}$ の間に自然な一対一対応がある。

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{N}_{\mathfrak{g}_\mathbb{R}} / \operatorname{Ad} G_\mathbb{R} & \overset{\text{bijective}}{\longleftrightarrow} & \mathcal{N}_\mathfrak{p} / \operatorname{Ad} K_\mathbb{C} \\ \Cup & & \Cup \\ \mathcal{O}_\mathbb{R} & \longleftrightarrow & \mathcal{O}_\vartheta \end{array}$$

この対応の下で、$\mathcal{O}_\mathbb{R}$ と $\mathcal{O}_\vartheta$ は同じ複素べき零軌道 $\mathcal{O}_\mathbb{C}$ を生成する。

$$\mathcal{O}_\mathbb{C} = \operatorname{Ad} G_\mathbb{C}(\mathcal{O}_\mathbb{R}) = \operatorname{Ad} G_\mathbb{C}(\mathcal{O}_\vartheta)$$

このとき $\mathcal{O}_\mathbb{R}$ は $\mathcal{O}_\mathbb{C}$ のラグランジュ部分多様体であり (特に $\dim_\mathbb{R} \mathcal{O}_\mathbb{R} = \dim_\mathbb{C} \mathcal{O}_\mathbb{C}$ である)、$\mathcal{O}_\mathbb{C} \cap \mathfrak{g}_\mathbb{R}$ の連結成分の一つである。$\mathcal{O}_\vartheta$ についても全く同じで、$\mathcal{O}_\mathbb{C}$ のラグランジュ部分多様体であって ($2 \dim_\mathbb{C} \mathcal{O}_\vartheta = \dim_\mathbb{C} \mathcal{O}_\mathbb{C}$)、$\mathcal{O}_\mathbb{C} \cap \mathfrak{p}$ の連結成分の一つである。

(d) **Kostant-関口対応をめぐる最近の動き**

Kronheimer [14], Vergne [29] によって $\mathcal{O}_\mathbb{R} \overset{\text{KS-対応}}{\longleftrightarrow} \mathcal{O}_\vartheta$ のとき、対応している二つの軌道の間には $K_\mathbb{R}$ 同変微分同相写像があることがわかっている[8]。この微分同相写像は微分方程式で定義された、関手的ではないような写像で、まだその理解は完全ではないように思う。

最近 Schmid-Vilonen [24] によって、core と呼ばれるコンパクトな $K_\mathbb{R}$ 軌道 $C(\mathcal{O}_\mathbb{R}) \subset \mathcal{O}_\mathbb{R}$ と $C(\mathcal{O}_\vartheta) \subset \mathcal{O}_\vartheta$ が存在して、(1) $K_\mathbb{R}$ 軌道空間として、$C(\mathcal{O}_\mathbb{R}) \simeq C(\mathcal{O}_\vartheta)$ であること; (2) $\mathcal{O}_\mathbb{R} \simeq T_{C(\mathcal{O}_\mathbb{R})}\mathcal{O}_\mathbb{R}$ (法束) および $\mathcal{O}_\vartheta \simeq T_{C(\mathcal{O}_\vartheta)}\mathcal{O}_\vartheta$ が成り立つこと、などが明らかになっている。

3 表現とベキ零軌道の対応

この節では、非コンパクト実半単純リー群の既約表現に対して、どのようにしてべき零軌道を対応させるのかを紹介したい。実半単純リー群の場合には、べき零多様体が $\mathcal{N}_{\mathfrak{g}_\mathbb{R}}$ と $\mathcal{N}_\mathfrak{p}$ の二通りあったように、ユニタリ表現にべき零軌道を対応させる方法にも、一見すると非常に異なるように見える二つの方法がある。ここでは主に代数的な方法に焦点を当て

[8] $K_\mathbb{R}$ は $G_\mathbb{R}$ と $K_\mathbb{C}$ とに共通の極大コンパクト部分群である。

る。前節と同様、 $G_{\mathbb{R}}$ を (コンパクトでない) 実半単純リー群、$K_{\mathbb{R}}$ をその極大コンパクト部分群とする。

コンパクト半単純リー群のユニタリ表現論は結局最高ウェイトの理論と同等である。つまり任意のユニタリ表現は有限次元最高ウェイト表現の和に分解する。そして、最高ウェイト表現の分類、構成は完全と言ってよいだろう。実際、分類はその名が示しているように、優整形式の決定に帰着され、また構成は代数的には Verma 加群の理論で、幾何的には Borel-Weil の理論によって得られる。古典群の場合には、他にも Schur の双対律を使うなど個別の議論がある。

一方、非コンパクト群 $G_{\mathbb{R}}$ のユニタリ表現は自明でなければ必然的に無限次元になり、コンパクト半単純リー群の場合の最高ウェイト表現のような簡明な構造を持たない。実際、いまだにユニタリ表現全体の分類理論は未完成である[9]。しかし、非コンパクトな場合もリー環の表現を考えるのは有効な手段である。このリー環の表現を経由して、べき零軌道を対応させることができる。それを紹介しよう。

3.1 随伴多様体

(π, H) を $G_{\mathbb{R}}$ の既約ユニタリ表現とするとき、まずはその $K_{\mathbb{R}}$ 有限ベクトルの全体 H_K をとる。すると H_K には $G_{\mathbb{R}}$ のリー環 $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ が表現の微分として自然に働き、それを複素線型に拡張することによって $(K_{\mathbb{R}}, \mathfrak{g})$ 加群の構造を持つ。しかもこの加群は $\mathfrak{g}$ の表現として、代数的に既約になる!

$\mathfrak{g}$ は (通常の括弧積に関しては) 結合的代数ではないので、$\mathfrak{g}$ を含むような結合的代数として展開環 $U(\mathfrak{g})$ を考え、(π, H_K) を $U(\mathfrak{g})$ 加群とみなすことにする。つまり

$$\begin{array}{rcl}\pi : G_{\mathbb{R}} \text{ の } (\infty \text{ 次元}) \text{ 既約表現} & \overset{\text{微分}}{\Longrightarrow} & (\pi, H_K) : (\mathfrak{g}, K_{\mathbb{R}}) \text{ 加群} \\ & \overset{\text{拡張}}{\Longrightarrow} & \text{展開環 } U(\mathfrak{g}) \text{ の既約表現 } \pi\end{array}$$

となっている。ここでは π の微分も同じ文字 π で表す。また厳密性を欠くが、H_K については単に H と書くこともある。

このように表現を代数的に考察する手法は Harish-Chandra によって開発され、Vogan, Schmid, Wallach など多数の人々によって磨きがかけられてきた。しかしリー環 $\mathfrak{g}$ は本質的に非可換なものであり、既存の代数幾何などの手法を使うためには、何らかの “可換化” の操作が必要になる。幸い、$\mathfrak{g}$ の展開環 $U(\mathfrak{g})$ はほとんど可換と思える構造を持っているから、これを利用する。

まず最初に、表現に対して複素巾零軌道を対応させておこう。

Definition 3.1 (原始イデアル) $U(\mathfrak{g})$ の両側イデアル I が原始イデアル (primitive ideal) であるとは、既約な $U(\mathfrak{g})$ 加群 M が存在して、$I = \operatorname{Ann} M = \{X \in U(\mathfrak{g}) \mid Xm = 0 \quad (\forall m \in M)\}$ となっているときに言う。また $G_{\mathbb{R}}$ の既約 (ユニタリ) 表現 π に対して、上のように $K_{\mathbb{R}}$ 有限ベクトルを取って構成した、既約 $U(\mathfrak{g})$ 加群 H_K の原始イデアルを I_π であらわす。

[9] 複素リー群のユニタリ表現は Barbasch によって分類が完成した ([1])。また、実リー群に対しても個々の具体的な群についてはユニタリ表現の分類はかなり進んできた印象を受ける。しかし、複素リー群の場合でも具体的な実リー群の場合でも、その分類はかなり複雑で込み入っていて、まだまだ改良の余地があるように思われる。

さて、$U(\mathfrak{g})$ には、$X \in U(\mathfrak{g})$ が何個 (以下) の $\mathfrak{g}$ の積で表わせるかによって自然な次数付けが入っている。これは展開環の元を $G_{\mathbb{R}}$ 上の微分作用素とみなすとき、その微分作用素の階数による次数付けといっても同じである。しかも、この次数付けによって次数化を行なうと、結果は可換環であり、具体的には対称代数 $S(\mathfrak{g}) \simeq \mathbb{C}[\mathfrak{g}^*]$ が得られる。

そこで、原始イデアル I_π に対しても展開環の次数付けから来る次数化を行なう。するとこれは $S(\mathfrak{g})$ のイデアルになる。このイデアル $\operatorname{gr} I_\pi$ は素イデアルとは限らないが、$\operatorname{gr} I_\pi$ の定義する代数多様体は既約になる。

Theorem 3.2 上記設定の下に、原始イデアル I_π に対して、その次数化 $\operatorname{gr} I_\pi$ の共通零点の全体は既約な代数多様体であって、しかも一つの $G_{\mathbb{C}}$ 巾零軌道の閉包に一致する。

$$\mathbf{V}(\operatorname{gr} I_\pi) = \overline{\mathcal{O}_\pi^{\mathbb{C}}} \qquad (\exists \mathcal{O}_\pi^{\mathbb{C}} \in \mathcal{N}_{\mathfrak{g}}/\operatorname{Ad} G)$$

ここで $\mathbf{V}(J)$ は、イデアル J の共通零点として定まる代数多様体を表わす。

既約表現に対しては展開環の中心 $Z(\mathfrak{g})$ はスカラーで作用する。したがって $\operatorname{gr} I_\pi$ には、$S(\mathfrak{g})_+^{G_{\mathbb{C}}}$ が含まれており、その共通零点は巾零多様体 $\mathcal{N}_{\mathfrak{g}}$ だったから、$\mathbf{V}(\operatorname{gr} I_\pi)$ は巾零多様体に含まれている。また I_π が両側イデアルであることから、それは $G_{\mathbb{C}}$ 不変な多様体、つまり有限個の巾零軌道の和である。ここまでは簡単だが、既約性の証明は難しく、Borho-Brylinski, Joseph ([3], [4], [9]) によって証明された。この定理は 1980 年代初頭に得られた輝かしい結果の一つである。しかし残念ながら、$G_{\mathbb{R}}$ のユニタリ表現を考えるには、原始イデアルは少し粗すぎる。

表現を対称対の巾零軌道に直接対応させることを考えよう。それには、$\mathfrak{g}$ 加群の次数化を考えればよい。$U(\mathfrak{g})$ の表現 π に対して、$K_{\mathbb{C}}$ 安定な次数付けをひとつ取り、その次数化を $\operatorname{gr} \pi$ と書く。すると $\operatorname{gr} \pi$ は $\operatorname{gr} U(\mathfrak{g}) = S(\mathfrak{g})$ 加群である。したがって $\operatorname{Ann}(\operatorname{gr} \pi)$ は $S(\mathfrak{g})$ のイデアルになる。

Definition 3.3 (随伴多様体) (π, H) を $G_{\mathbb{R}}$ の既約ユニタリ表現とする。このとき、$\operatorname{Ann}(\operatorname{gr} \pi)$ の定義する代数多様体は $K_{\mathbb{C}}$ 安定な次数付けの取り方によらずに定まる。

$$\mathcal{AV}(\pi) = \mathbf{V}(\operatorname{Ann}(\operatorname{gr} \pi))$$

これを π の**随伴多様体** (associated variety) と呼ぶ[10]。

この定義は、原始イデアルの場合の gr と Ann の順序を入れ替えただけであるが、結果として出てくる多様体は $\overline{\mathcal{O}_\pi^{\mathbb{C}}}$ の約半分になっている。

Theorem 3.4 $G_{\mathbb{R}}$ の既約ユニタリ表現 (π, H) に対し、$\mathcal{N}_{\mathfrak{p}}$ に含まれる巾零 $K_{\mathbb{C}}$ 軌道 $\mathcal{O}_i$ $(1 \leq i \leq r)$ が存在して、随伴多様体は $\overline{\mathcal{O}_i}$ の和として表わされる。

$$\mathcal{AV}(\pi) = \bigcup_{i=1}^{r} \overline{\mathcal{O}_i}$$

[10]同様に $\mathbf{V}(\operatorname{gr} I_\pi) = \mathbf{V}(\operatorname{gr}(\operatorname{Ann} \pi))$ を原始イデアルの随伴多様体と呼ぶ。少々紛わしいが、要するに I_π の随伴多様体は加群 $U(\mathfrak{g})/I_\pi$ の随伴多様体のことである。

この分解は代数多様体としての既約分解を与えており、$\mathcal{O}_i$ の次元は全て同じである。また、各 $\mathcal{O}_i$ は原始イデアルの定める複素巾零軌道を生成する。

$$\mathrm{Ad}\, G_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_i) = \mathcal{O}_{\pi}^{\mathbb{C}} \qquad (\forall i)$$

随伴多様体は、さらに重複度を考慮することによって詳細な情報を持たせることができる。Vogan ([30], [31]) によって、$G_{\mathbb{R}}$ の表現 (を極大コンパクト部分群に制限したもの) は $\mathcal{N}_{\mathfrak{p}}$ の巾零 $K_{\mathbb{C}}$ 軌道上の $K_{\mathbb{C}}$ 同変なベクトル束の正則切断 (の和) とほぼ等価なことが分かってきているが、おおざっぱに言って重複度はこのベクトル束の階数を表わしている。

Definition 3.5 (随伴サイクル) (π, H) を既約 $(\mathfrak{g}, K_{\mathbb{R}})$ 加群とする。$M = \mathrm{gr}\, H$ は、有限生成 $A = S(\mathfrak{g})$ 加群になる。このとき、$\mathcal{AV}(\pi) = \mathrm{supp}\, M = \mathbf{V}(\mathrm{Ann}\, M) = \cup_{i=1}^{r} \overline{\mathcal{O}_i}$ である。$\mathrm{supp}\, M$ の既約成分 $\overline{\mathcal{O}_i}$ の定義素イデアルを P_i と書き、M_{P_i} を P_i における局所化とすると、M_{P_i} は A_{P_i} 加群として有限の長さを持つ。その長さを m_i と書くとき、

$$\mathcal{AC}(\pi) = \sum_{i=1}^{r} m_i [\overline{\mathcal{O}_i}] \qquad (m_i = \mathrm{length}_{A_{P_i}} M_{P_i})$$

を π の**随伴サイクル** (associated cycle) と呼ぶ。

Remark 3.6 $\lambda \in \mathcal{O}_i$ を取り、その $K_{\mathbb{C}}$ における固定部分群 $(K_{\mathbb{C}})_{\lambda}$ を考える。このとき重複度 m_i は $(K_{\mathbb{C}})_{\lambda}$ の (既約とは限らない) 表現の次元であることが分かっている。また、もし随伴多様体が既約で、$PM = 0$ $(P = P_1)$ なら、重複度は $m = \dim_{\mathbb{C}} M_{\lambda}/\mathfrak{m}(\lambda) M_{\lambda}$ である (ただし、M_{λ} は点 $\lambda \in \mathcal{O} = \mathcal{O}_1$ における局所化、$\mathfrak{m}(\lambda)$ は λ における極大イデアルを表す)。従って、この場合には自然な $(K_{\mathbb{C}})_{\lambda}$ の表現が、$M_{\lambda}/\mathfrak{m}(\lambda) M_{\lambda}$ 上で考えられる。

Example 3.7 随伴多様体は比較的よく計算されているが、随伴サイクルについては、ほとんど自明と思われる場合以外に計算例はあまり多くない。よく知られた簡単な例を挙げておく。

(1) 有限次元表現 π の場合。$G_{\mathbb{R}}$ がコンパクトでなければ、π はユニタリではないが、原始イデアル、随伴多様体、随伴サイクルなどはユニタリ表現の場合と全く同じように定義できる。これは有限次元表現に限った話ではなく、既約認容表現については、事情は全く同じである。

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{\pi}^{\mathbb{C}} &= \{0\} \\ \mathcal{AV}(\pi) &= \{0\} \\ \mathcal{AC}(\pi) &= \dim \pi \cdot [\{0\}] \end{aligned}$$

(2) 極小放物型部分群 $Q_{\mathbb{R}}$ の有限次元既約表現 σ から誘導された主系列表現 $\pi = \mathrm{Ind}_{Q_{\mathbb{R}}}^{G_{\mathbb{R}}} \sigma$ の場合。

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{\pi}^{\mathbb{C}} &= \mathrm{Ad}\,(G_{\mathbb{C}})\mathfrak{n}, \quad \mathfrak{n} = (\mathfrak{q} \text{ のべき零根基}) \\ \mathcal{AV}(\pi) &= \mathcal{N}_{\mathfrak{p}} \\ \mathcal{AC}(\pi) &= \dim \sigma \cdot \mathcal{N}_{\mathfrak{p}} = \sum_{\mathcal{O}:\mathrm{max.dim}} \dim \sigma \cdot [\overline{\mathcal{O}}] \end{aligned}$$

(3) $(G_\mathbb{R}, K_\mathbb{R})$ を既約な Hermite 対称対とする。このときは $K_\mathbb{C}$ の表現として、$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^+ \oplus \mathfrak{p}^-$ と二つの既約成分に分解する。$\mathfrak{p}_\mathbb{R}$ を $G_\mathbb{R}/K_\mathbb{R}$ の接ベクトル空間と見なすとき、$\mathfrak{p}$ の既約分解は対称空間 $G_\mathbb{R}/K_\mathbb{R}$ に $G_\mathbb{R}$ 不変な複素構造を定めることになる。
以上の設定の下に、正則離散系列表現 π とは、$G_\mathbb{R}/K_\mathbb{R}$ 上の正則ベクトル束の L^2 切断として実現される $G_\mathbb{R}$ の自乗可積分可能なユニタリ表現である。ベクトル束を定めている $K_\mathbb{R}$ の表現を τ と書こう。これは π の極小 K タイプと呼ばれているものに一致する。

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_\pi^\mathbb{C} &= \mathrm{Ad}\,(G_\mathbb{C})\mathfrak{p}^+ = \mathrm{Ad}\,(G_\mathbb{C})\mathfrak{p}^- \\ \mathcal{AV}\,(\pi) &= \mathfrak{p}^+ \\ \mathcal{AC}\,(\pi) &= \dim\tau\cdot[\mathfrak{p}^+]\end{aligned}$$

3.2 波面集合と漸近台

$G_\mathbb{R}$ のユニタリ表現 π に対して、指標 Θ_π を $G_\mathbb{R}$ 上の超函数として定義することができる。表現は無限次元であるが、表現の作用素のトレースと考えてよい。ただ、例えば単位元における値は (表現の次元を与えるので) 無限大になっているから、$G_\mathbb{R}$ 上の点すべてで定義されているわけではない。しかし Harish-Chandra によって、$G_\mathbb{R}$ の正則半単純元のなす稠密開集合上では解析関数になることが知られている。

さて、Θ_π に対して波面集合 (wave front set) と呼ばれる、Θ_π の超函数としての特異性を表す集合が余接束 $T^*G_\mathbb{R}$ 上に定義される。表現 π の波面集合は、この Θ_π の波面集合を、単位元での余接平面、つまり $\mathfrak{g}_\mathbb{R}^*$ に制限したものである。指標は $\mathrm{Ad}\,G_\mathbb{R}$ で不変 (類関数) なので、波面集合もまた $\mathrm{Ad}^*G_\mathbb{R}$ で不変である。また、上でも述べたように Θ_π は正則半単純元上では解析的なので、波面集合は正則半単純元には台を待たない。もっと積極的に、実は、波面集合はべき零多様体 $\mathcal{N}_{\mathfrak{g}_\mathbb{R}}$ に含まれる閉集合であることがわかる ([7], [22])。波面集合を $\mathcal{WF}\,(\pi)$ で表わす。

一方 Barbasch-Vogan ([2]) は、指標の単位元の近傍における漸近展開の斉次項を Fourier 変換すると、その台が巾零多様体に含まれること、さらに初項の Fourier 変換は巾零軌道上の不変測度の和として表わされることを示した。各斉次項を Fourier 変換したものの台は巾零軌道の和であるが、漸近台 (asymptotic support) をそれらすべての巾零軌道の和として定義する[11]。これを $\mathcal{AS}\,(\pi)$ であらわそう。聊かいい加減に書けば、

$$\begin{aligned}\mathcal{AS}\,(\pi) = \mathrm{supp}\,(\text{Fourier-transf.}(\Theta_\pi)) &= \bigcup_{i=1}^r \overline{\mathcal{O}_i^\mathbb{R}} \quad (\mathcal{O}_i^\mathbb{R} \in \mathcal{N}_{\mathfrak{g}_\mathbb{R}}/\,\mathrm{Ad}\,G_\mathbb{R}) \\ \mathrm{Ad}\,G_\mathbb{C}(\mathcal{O}_i^\mathbb{R}) = \mathcal{O}_\pi^\mathbb{C} \quad (\forall i)\end{aligned}$$

となる。

波面集合との関係では、次の結果が証明されている ([22])。

Theorem 3.8 (Rossmann) $G_\mathbb{R}$ の既約認容表現 π の無限小指標が正則であれば、$\mathcal{WF}\,(\pi) = \mathcal{AS}\,(\pi)$ が成り立つ。

[11] 巾零軌道は有限個しかないので、もちろんこれは閉集合である。さらに初項の Fourier 変換に現れる巾零軌道は漸近台の中で開であって、その和は稠密である (Rossmann [22])。

さらに、長い間の懸案であった、漸近台と随伴多様体の関係が Kostant-関口対応によって与えられることが、最近になって Schmid-Vilonen [25] によって証明されている。

Theorem 3.9 (Schmid-Vilonen) π を $G_{\mathbb{R}}$ の認容表現としたとき、$\mathcal{AV}(\pi)$ と $\mathcal{AS}(\pi)$ は Kostant-関口対応で対応する。

実は、漸近台についても、漸近展開の初項の Fourier 変換が巾零軌道上の不変積分の何倍になっているかを数えることによって、漸近サイクルが定義できる。Schmid-Vilonen はこの漸近サイクルと随伴サイクルが本質的に同じであることを証明している。つまり、

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{AC}(\pi) & \xleftrightarrow{\text{Kostant-関口}} & \mathrm{Asympt.Cycle}(\pi) \\ \| & & \| \\ \sum_i m_i[\overline{\mathcal{O}_i}] & \longleftrightarrow & \sum_i m_i[\overline{\mathcal{O}_i^{\mathbb{R}}}] \end{array}$$

が成り立っている。

4 表現の theta 対応

$\mathbb{G}_{\mathbb{R}} = Sp_N(\mathbb{R})$ に対して、$\mathbb{G}_{\mathbb{R}}$ の部分群の組 $(G_{\mathbb{R}}, G'_{\mathbb{R}})$ が dual pair であるとは、$\mathbb{G}_{\mathbb{R}}$ における一方の中心化群がもう一方に互いに一致するときに言う[12]。この論説では $G_{\mathbb{R}}, G'_{\mathbb{R}}$ ともに認容 Lie 群の時のみを扱う。

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{G}_{\mathbb{R}} = Sp_N(\mathbb{R}) & \\ \rotatebox{45}{$\subset$} & & \rotatebox{135}{$\subset$} \\ G_{\mathbb{R}} & & G'_{\mathbb{R}} \end{array} \qquad (G_{\mathbb{R}}, G'_{\mathbb{R}}) : \text{dual pair}$$

Example 4.1 dual pair の例をいくつかあげておこう。これらはすべて $G'_{\mathbb{R}}$ が Hermite 対称型になっている場合である。

$\mathbb{G}_{\mathbb{R}}$	$G_{\mathbb{R}} \times G'_{\mathbb{R}}$
$Sp_{(p+q)n}(\mathbb{R})$	$O(p,q) \times Sp_n(\mathbb{R})$
$Sp_{(p+q)(r+s)}(\mathbb{R})$	$U(p,q) \times U(r,s)$
$Sp_{(p+q)2n}(\mathbb{R})$	$Sp(p,q) \times O^*(2n)$

さて、シンプレクティック群 $\mathbb{G}_{\mathbb{R}} = Sp_N(\mathbb{R})$ は Weil 表現と呼ばれる非常に小さなユニタリ表現を持つ (この表現は調和振動子表現、metaplectic 表現、Segal-Shale-Weil 表現などとも呼ばれる)。これを Ω で表わそう。この表現は既約ではなく、二つの既約成分に分解する。そのいずれもが極小表現と呼ばれる表現である。また二つの既約成分の随伴多様

[12] もちろん $\mathbb{G}_{\mathbb{R}}$ をシンプレクティック群とする必要はない。一般の枠組みでも dual pair は研究されている。例えば、[23] を参照のこと。

体はどちらも同じであって、$\mathcal{N}_\mathfrak{p}$ に含まれる、次元が (ゼロではない) 最小のべき零軌道の閉包に一致している。つまり、

$$\Omega = \Omega^+ \oplus \Omega^- : \text{極小表現}, \qquad \mathcal{O}^{\mathbb{C}}_{\Omega^\pm} = \mathbb{O}^{\mathbb{C}}_{\min}, \qquad \mathcal{AV}(\Omega^\pm) = \overline{\mathbb{O}_{\min}}$$

また、どちらもユニタリ最高ウェイト表現である。自明でない、次元が最小の巾零軌道は二つあって、それらは極小巾零軌道と呼ばれるが、我々は Weil 表現の随伴多様体になっているものを一つ固定して考える[13]。極小軌道については、後述する式 (5.1) を見られたい。

Weil 表現については、[32], [10], [8], [21] などを参照されたい。また [34] も役に立つだろう。

Definition 4.2 $\pi \in \widehat{G_\mathbb{R}}, \pi' \in \widehat{G'_\mathbb{R}}$ を二つの既約表現とする。この二つの表現が theta 対応によって対応しているとは、Ω から $\pi \otimes \pi'$ への、自明ではない $G_\mathbb{R} \times G'_\mathbb{R}$ 準同型が存在するときに言う。つまり、

$$\pi \xleftrightarrow{\text{theta corr.}} \pi' \iff \exists G_\mathbb{R} \times G'_\mathbb{R}\text{-morphism} : \Omega \twoheadrightarrow \pi \otimes \pi'$$

このとき、$\pi = \theta_{G'_\mathbb{R} \to G_\mathbb{R}}(\pi') = \theta(\pi')$ と書いて、π を π' の theta 持ち上げという。この対応は一対一で well-defined である。したがって、逆に π' は π の theta 持ち上げでもある。

実リー群のとき、このような対応が存在して矛盾無く定義できていることは Howe [8] によって示され、現在は p 進代数群やアデール群の範疇で定式化されている。この theta 対応は、その発見者に因んで Howe 対応とか、あるいは duality correspondence, dual pair correspondence などと様々な名で呼ばれている。

Example 4.3 (1) $G'_\mathbb{R}$ がコンパクト群で $G_\mathbb{R}$ が非コンパクトなら、必然的に $G_\mathbb{R}$ は Hermite 対称型になる。π' として $G'_\mathbb{R}$ の有限次元既約表現を取ると、$\pi = \theta(\pi')$ はユニタリ最高ウェイト表現である。

(2) 上の例をもう少し具体的に見てみる。dual pair $(G_\mathbb{R}, G'_\mathbb{R}) = (Sp_n(\mathbb{R}), O(p))$ を考えよう。$\pi = \theta(\pi')$ とおくと、

$2n < p$ なら、π は正則離散系列表現、
$n > 2p$ なら、π は特異ユニタリ最高ウェイト表現

になる。

さて、 theta 対応によって随伴サイクルはどのように対応しているだろうか? π, π' の随伴サイクルを

$$\mathcal{AC}(\pi') = \sum_i m'_i[\overline{\mathcal{O}'_i}] \qquad \mathcal{O}'_i \in \mathcal{N}_{\mathfrak{p}'}/K'_\mathbb{C}$$
$$\mathcal{AC}(\pi) = \sum_j m_j[\overline{\mathcal{O}_j}] \qquad \mathcal{O}_j \in \mathcal{N}_\mathfrak{p}/K_\mathbb{C}$$

のように書いておこう。我々の問題は、次のようなものである。

[13]実は Weil 表現も最高ウェイト表現に取るか、最低ウェイト表現に取るかで、二通りの選び方がある。二つの極小巾零軌道の存在はこの事実と符合するものである。

Problem 4.4 π, π' を theta 対応で対応する (ユニタリ) 表現とする。このとき、∃ 巾零軌道の対応 : $\mathcal{O}'_i \longleftrightarrow \mathcal{O}_i$ があって、$\{m_j\}$ は $\{m'_i\}$ で簡単に表わせるだろうか?

この問題は、重複度を考慮しないで随伴多様体に限っても、まだ未解決である。しかし、 Przebinda, Trapa 達によって研究が進展している。特に随伴多様体が既約の場合には、巾零軌道の対応が後に述べる theta 対応で得られるだろうということが予想されている ([28], [6])。

以下、この問題に関する我々の結果を紹介したい。我々の結果は π' が有限次元ユニタリ表現 ($G'_{\mathbb{R}}$ は必ずしもコンパクトとは限らない) か、もしくは正則離散系列表現の場合にこの問題の完全な解答を与えるものである。

結果を述べる前に、まず巾零軌道の theta 対応を解説しなければならない。

5 ベキ零軌道の theta 対応

まず $W = \mathbb{C}^n$ に標準的な Hermite 内積 (,) を入れておく。W を実ベクトル空間 $\mathbb{R}^{2n}$ とみなしたものを $W_{\mathbb{R}}$ と書こう。$W_{\mathbb{R}}$ は W の実形を表わしているのではないことに注意しておく。さて、(,) の虚部を取ることにより、$W_{\mathbb{R}}$ には実双線型形式

$$\langle u, v\rangle = \mathrm{Im}\,(u, v) \qquad (u, v \in W_{\mathbb{R}})$$

が定義されるが、これは非退化な歪対称形式、つまりシンプレクティック形式になる。そこで、このシンプレクティック形式に関する実シンプレクティック群を $\mathbb{G}_{\mathbb{R}} = Sp_N(\mathbb{R}) = Sp(W_{\mathbb{R}})$ と表わそう。$\mathbb{G}_{\mathbb{R}}$ の Lie 環の複素化 $\mathfrak{G}$ の Cartan 分解を

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{K} \oplus \mathfrak{P}, \qquad \mathfrak{P} = \mathfrak{P}^+ \oplus \mathfrak{P}^-$$

と書いておく (例 2.1 参照)。$G_{\mathbb{R}}$ の Cartan 分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ と書くと ($G'_{\mathbb{R}}$ についても同様の記号を使う)、$\mathfrak{p} \oplus \mathfrak{p}' \subset \mathfrak{P}$ であるように Cartan 分解をうまく取れる。そこで包含写像 $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}' \hookrightarrow \mathfrak{P}$ の双対 $\mathfrak{P}^* \to \mathfrak{p}^*, \mathfrak{p}'^*$ を考え、さらに $\mathfrak{G}$ 上の $\mathrm{Ad}\,\mathbb{G}_{\mathbb{C}}$ 不変な非退化双線型形式に関する同一視 $\mathfrak{P}^* \simeq \mathfrak{P}$ などを行なう。

さて、Weil 表現の随伴多様体は極小軌道の閉包だった: $\mathcal{AV}(\Omega) = \overline{\mathbb{O}_{\min}} \subset \mathfrak{P}^*$. このとき、$W/\{\pm 1\} \simeq \overline{\mathbb{O}_{\min}}$ であることに注意しよう。具体的には $\mathbb{O}_{\min} \subset \mathrm{Sym}\,_N(\mathbb{C}) \simeq \mathfrak{P}^+$ であって (例 2.1 (3) の記号参照)、

$$\mathbb{O}_{\min} = \{X \in \mathrm{Sym}\,_N(\mathbb{C}) \mid \mathrm{rank}\, X = 1\} \subset \mathfrak{P}, \qquad \overline{\mathbb{O}_{\min}} = \mathbb{O}_{\min} \cap \{0\} \tag{5.1}$$

である。W から $\overline{\mathbb{O}_{\min}}$ への商写像は

$$W \ni w \longmapsto w \cdot {}^t w \in \overline{\mathbb{O}_{\min}} \subset \mathrm{Sym}\,_N(\mathbb{C})$$

で与えられる (w はタテベクトルとみなした)。これらを引き続いて行なった写像 φ, ψ を次の図式で定義しよう。

$$
\begin{tikzcd}
 & W \arrow[d] \arrow[ddl, "\varphi"'] \arrow[ddr, "\psi"] & \\
 & \overline{\mathbb{O}_{\min}} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\mathfrak{p} & & \mathfrak{p}'
\end{tikzcd}
$$

ここで $\overline{\mathbb{O}_{\min}} \to \mathfrak{p}$ などは、射影 $\mathfrak{P} \to \mathfrak{p}$ を $\overline{\mathbb{O}_{\min}}$ に制限したものである。$W = \mathbb{C}^N$ には $\mathbb{G}_{\mathbb{R}}$ の極大コンパクト部分群 $\mathbb{K}_{\mathbb{R}} = U(N)$ が行列の掛け算で作用しているが、$K_{\mathbb{R}} \times K'_{\mathbb{R}} \subset \mathbb{K}_{\mathbb{R}}$ となるように極大コンパクト部分群を選べるので、$K_{\mathbb{C}} \times K'_{\mathbb{C}} \subset GL_N(\mathbb{C}) = \mathbb{K}_{\mathbb{C}}$ は自然に W に作用している。

Lemma 5.1 ([18], [19]) φ, ψ はそれぞれ $K_{\mathbb{C}}, K'_{\mathbb{C}}$ 同変写像であって、しかも $\varphi : W \to \varphi(W) \subset \mathfrak{p}$ は $K'_{\mathbb{C}}$ によるアフィン幾何学的商写像、また $\psi : W \to \psi(W) \subset \mathfrak{p}'$ は $K_{\mathbb{C}}$ によるアフィン幾何学的商写像である。つまり、 $\operatorname{Im}\varphi \simeq W//K'_{\mathbb{C}},\ \operatorname{Im}\psi \simeq W//K_{\mathbb{C}}$ が成り立つ。

Example 5.2 $O(p,q) \times Sp_n(\mathbb{R}) \subset Sp_{(p+q)n}(\mathbb{R})$ の場合。この場合は

$$
W = M_{p,n}(\mathbb{C}) \oplus M_{q,n}(\mathbb{C}), \qquad \mathfrak{p} = M_{p,q}(\mathbb{C}), \qquad \mathfrak{p}' = \operatorname{Sym}_n(\mathbb{C}) \oplus \operatorname{Sym}_n(\mathbb{C})
$$

である。写像の方は、$W = M_{p,n}(\mathbb{C}) \oplus M_{q,n}(\mathbb{C}) \ni (A,B)$ に対して、

$$
\varphi(A,B) = A\,{}^tB, \qquad \psi(A,B) = ({}^tAA, {}^tBB)
$$

で与えられる。

$$
\begin{tikzcd}
 & W = M_{p,n} \oplus M_{q,n} \ni (A,B) \arrow[dl, "\varphi"'] \arrow[dr, "\psi"] & \\
A\,{}^tB \in \mathfrak{p} = M_{p,q} & & \operatorname{Sym}_n \oplus \operatorname{Sym}_n = \mathfrak{p}' \ni ({}^tAA, {}^tBB)
\end{tikzcd}
$$

以下 dual pair $(G_{\mathbb{R}}, G'_{\mathbb{R}})$ は既約、かつ $G'_{\mathbb{R}}$ はコンパクト、あるいは非コンパクトで Hermite 対称型と仮定する。さらに、$(G_{\mathbb{R}}, G'_{\mathbb{R}})$ は **stable range にあって**[14]、

[14]通常 stable range というと、以下の表中の条件で等号も許した不等号が成り立つことであるが、少し微妙な問題もあるので、ここでは等号を許さない条件としておく。また、以下の議論では stable range の条件は本質的だが、 Hermite 対称型とかコンパクトといった仮定はあまり本質的ではない。しかし簡単のため、下記の 3 つの場合にのみ話を進めることにしたい。

$G'_{\mathbb{R}}$ **の方が小さい**としよう。つまり、次のような 3 つの場合を考えるのと同じである。

$\mathbb{G}_{\mathbb{R}}$	$G_{\mathbb{R}} \times G'_{\mathbb{R}}$	stable range 条件
$Sp_{(p+q)n}(\mathbb{R})$	$O(p,q) \times Sp_n(\mathbb{R})$	$2n < \min(p,q)$
$Sp_{(p+q)(r+s)}(\mathbb{R})$	$U(p,q) \times U(r,s)$	$r+s < \min(p,q)$
$Sp_{(p+q)2n}(\mathbb{R})$	$Sp(p,q) \times O^*(2n)$	$n < \min(p,q)$

Definition 5.3 (巾零軌道の theta 持ち上げ) 上記仮定の下に、$\mathcal{O}'$ を $\mathcal{N}_{\mathfrak{p}'}$ の $K'_{\mathbb{C}}$ 巾零軌道とする。このとき、$\mathcal{N}_{\mathfrak{p}}$ の $K_{\mathbb{C}}$ 巾零軌道であって、

$$\varphi \circ \psi^{-1}(\overline{\mathcal{O}'}) = \overline{\mathcal{O}}$$

となるようなものが存在する。このとき $\mathcal{O} \subset \mathfrak{p}$ を $\mathcal{O}' \subset \mathfrak{p}'$ の theta 持ち上げと呼び、$\mathcal{O} = \theta(\mathcal{O}')$ と表わす。

$\varphi \circ \psi^{-1}(\overline{\mathcal{O}'}) = \overline{\mathcal{O}}$ となるような $\mathcal{O}$ が存在することは、個々の具体的な場合には知られていたようであるが、あまり広くは認識されていないようである。最近、上記の dual pair に対する仮定よりもっと弱い条件のもとに、太田琢也が対称対を用いた証明を与えている。太田氏の証明は未発表だが、早期の出版を望みたい。

以後の展開とも関係するので、定義における $K_{\mathbb{C}}$ 巾零軌道 $\mathcal{O}$ の存在について (太田氏とは違う方法で) 少し説明しておこう。まず、$\Sigma = \psi^{-1}(\overline{\mathcal{O}'}) \subset W$ とおくと、これは既約なアフィン代数多様体であって、ある $K_{\mathbb{C}} \times K'_{\mathbb{C}}$ 軌道の閉包になる。また $\varphi : W \to \varphi(W)$ は幾何学的商写像 (従って閉写像) なので、$\varphi(\Sigma) \simeq \Sigma // K'_{\mathbb{C}}$ は $K_{\mathbb{C}}$ 不変な、$\mathfrak{p}$ の既約閉部分多様体である。したがって、それはただ一つの $K_{\mathbb{C}}$ 軌道 $\mathcal{O}$ の閉包である。つまり、

$$\overline{\mathcal{O}} \simeq \Sigma // K'_{\mathbb{C}}, \qquad \mathbb{C}[\overline{\mathcal{O}}] = \mathbb{C}[\Sigma]^{K'_{\mathbb{C}}}, \quad \text{ただし } \Sigma = \psi^{-1}(\overline{\mathcal{O}'})$$

が成り立っている。

Example 5.4 $U(2,3) \to U(5,5)$ の theta 持ち上げの例。

$U(p,q)$ の巾零軌道は符号つきの Young 図形によって分類されている (例えば、[5] 参照)。これは Jordan 標準形による複素軌道の分類と、その複素軌道が実軌道としてどう分解するか (つまり Hermite (p,q) 形式を巾零元の固有空間に制限したとき、どのような符号を持つのか) によって実軌道を分類するものである。同じような分類が $O(p,q)$ とか、$Sp(p,q)$ などでも知られている。

具体的には、$U(p,q)$ の巾零軌道は、箱の個数が $p+q$ 個で、そのうち $+$ の符号を持つものが p 個、$-$ の符号を持つものが q 個であるような符号つきの Young 図形で表わされる。ただし、同じ行内では $\pm$ は交互に現れるものとし、さらに、同じ長さの行は場所を入れ替えても同じとみなす。

このとき、 theta 持ち上げ $U(r,s) \to U(p,q)$ は、(r,s) の符号を持つ Young 図形の第一列目の左横 (第 0 列目) に、長さが $(p+q)-(r+s)$ 個の箱からなる一列をつけ加えることで表わされる。つけ加えた箱の符号は自然に決まってしまう。例えば、次のように

なる。

$$
\begin{array}{|c|c|}
\hline + & - \\
\hline - & + \\
\hline - & \multicolumn{1}{c}{} \\
\cline{1-1}
\end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{|c|c|c|}
\hline - & + & - \\
\hline + & - & + \\
\hline + & - & \multicolumn{1}{c}{} \\
\cline{1-2} + & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} \\
\cline{1-1} - & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} \\
\cline{1-1}
\end{array}
$$

他の二つの場合も基本的には同じことである。

6 随伴サイクルの theta 持ち上げ

いよいよ主結果を述べよう。§4 と §5 の記号はそのまま用いる。

まず最初に、$G'_{\mathbb{R}}$ の有限次元既約ユニタリ表現の $G_{\mathbb{R}}$ への theta 持ち上げについての結果を述べよう。

Theorem 6.1 ([16], [33], [17]) 既約な dual pair $(G_{\mathbb{R}}, G'_{\mathbb{R}})$ を考える。さらに $G_{\mathbb{R}}$ は Hermite 対称型であって、$(G_{\mathbb{R}}, G'_{\mathbb{R}})$ が stable range にあるとしよう。このとき、$G'_{\mathbb{R}}$ の有限次元既約ユニタリ表現 π' に対して、その theta 持ち上げを $\pi = \theta(\pi')$、自明な巾零軌道の theta 持ち上げを $\mathcal{O}^{\mathbf{1}} = \theta(\{0\})$ と書いておくと、

$$\mathcal{AC}\,(\pi') = \dim \pi' \cdot [\{0\}], \quad \mathcal{AC}\,(\pi) = \dim \pi' \cdot [\overline{\mathcal{O}^{\mathbf{1}}}]$$

$$\operatorname{Dim} \pi = \dim \overline{\mathcal{O}^{\mathbf{1}}}, \quad \operatorname{Deg} \pi = \dim \pi' \cdot \deg \overline{\mathcal{O}^{\mathbf{1}}}$$

が成り立つ。ただし、$\operatorname{Dim} \pi$ は Gelfand-Kirillov 次元、$\operatorname{Deg} \pi$ は Bernstein 次数をそれぞれ表わす。

Remark 6.2 この定理において、$G'_{\mathbb{R}}$ はコンパクト群か、あるいは p. 15 の表にあるような 3 つの場合の一つである (コンパクト群の場合も形式的に表中の場合の一つと考えることができる)。$G'_{\mathbb{R}}$ がコンパクトの時には、[16] と独立に山下 [33] によって随伴サイクルが計算されている。$G'_{\mathbb{R}}$ がコンパクトでないときには、π' として許されるのはユニタリ指標 (一次元表現) のみである ([17])。いずれにせよ、自明な表現はいつでも π' として許されていることに注意する。

この定理では stable range という仮定は本質的であって、stable range でないときにはこのような結果は成り立たない。また、stable range においてはユニタリ表現の theta 持ち上げがまたユニタリ表現になっているという事実にも注意しておこう ([15] 参照)。これも stable range に特徴的な性質である。

次に dual pair $(G_{\mathbb{R}}, G'_{\mathbb{R}})$ を p. 15 の表にあるような 3 つの場合の一つであるとして、正則離散系列表現の theta 持ち上げを考えよう。

Theorem 6.3 ([17], [20]) dual pair $(G_{\mathbb{R}}, G'_{\mathbb{R}})$ を p. 15 の表にある 3 つの場合の一つで stable range にあるとする。特に $G'_{\mathbb{R}}$ は Hermite 対称型で、正則離散系列表現 π' を持つ。τ' を π' の極小 $K'_{\mathbb{R}}$ タイプとし、$\pi = \theta(\pi')$ をその theta 持ち上げとする。また $\mathcal{O}' \subset \mathfrak{p}'^{+}$

を $\mathfrak{p}'^{+} = \mathcal{AV}(\pi')$ において開かつ稠密な $K'_{\mathbb{C}}$ 巾零軌道、$\mathcal{O}^{\mathrm{hol}} = \theta(\mathcal{O}')$ を theta 持ち上げとする。このとき、

$$\mathcal{AC}(\pi') = \dim \tau' \cdot [\mathfrak{p}'^{+}], \quad \mathcal{AC}(\pi) = \dim \tau' \cdot [\overline{\mathcal{O}^{\mathrm{hol}}}]$$

$$\mathrm{Dim}\, \pi = \dim \overline{\mathcal{O}^{\mathrm{hol}}}, \quad \mathrm{Deg}\, \pi = \dim \tau' \cdot \deg \overline{\mathcal{O}^{\mathrm{hol}}}$$

が成り立つ。

これらの定理は、巾零軌道の対応と表現の対応、そして重複度の対応が大変うまくいっていることを示唆している。つまり次のはなはだ楽天的な予想が成り立つのではないかという期待を抱かせてくれる。

Conjecture 6.4 dual pair $(G_{\mathbb{R}}, G'_{\mathbb{R}})$ が stable range にあるとする。$G'_{\mathbb{R}}$ のユニタリ表現 π' でその随伴多様体が既約であるようなものをとると、随伴サイクルは $\overline{\mathcal{O}'}$ の定数倍である。それを $\mathcal{AC}(\pi') = m'[\overline{\mathcal{O}'}]$ と表わしておく。このとき $\pi = \theta(\pi')$ の随伴多様体は既約であって、次の式が成り立つ。

$$\mathcal{AC}(\theta(\pi')) = m'[\overline{\theta(\mathcal{O}')}]$$

Remark 6.5 $U(p,q) \times U(r,s)$ の場合には $\pi = \theta(\pi')$ の随伴多様体の既約性はどうやら正しいようであるが、まだ完全な証明はない ([28])。この予想の焦点は、theta 持ち上げをしても重複度が同じになるという点にある。今のところこの部分については問題は完全に open であるように思われる。

7 巾零軌道上の正則関数環

ここでは $G_{\mathbb{R}}$ のユニタリ表現を離れて、巾零軌道の正則関数環そのものに対していくつかの結果を例をあげて紹介しよう。

7.1 自明な軌道の theta 持ち上げと正則関数環

まず $\mathcal{N}_{\mathfrak{p}'}$ の自明な $K'_{\mathbb{C}}$ 巾零軌道 $\{0\}$ の theta 持ち上げについて述べよう。一般に (stable range における) 自明な軌道の theta 持ち上げ $\mathcal{O}^{\mathbf{1}}$ は 2-step の巾零元からなる巾零軌道である。$G'_{\mathbb{R}}$ を stable range の範囲内でいろいろ取り替えることにより、古典型の場合には全ての 2-step 巾零軌道がこのようにして得られるようである[15]。

以下に $(O(p,q), Sp_n(\mathbb{R}))$ を例にとって正則関数環 $\mathbb{C}[\overline{\mathcal{O}^{\mathbf{1}}}]$ の構造について述べよう。詳しくは、[17], [18], [19], [20] などを見てください。

Example 7.1 $(G_{\mathbb{R}}, G'_{\mathbb{R}}) = (O(p,q), Sp_n(\mathbb{R})) \quad (2n < p, q)$ とする。このとき、$\mathfrak{p} = M_{p,q}$ には $K_{\mathbb{C}} = O(p,\mathbb{C}) \times O(q,\mathbb{C})$ が、左から $O(p,\mathbb{C})$ の元を、右から $O(q,\mathbb{C})$ の元の転置行列をそれぞれかけることによって、行列の掛け算で自然に作用している (例 2.1 参照)。これはもちろん随伴作用を書き直したものにすぎない。

[15] たぶん正しいと思うが、面倒なので確かめていないだけ。

$\mathcal{O}^{\mathbf{1}} = \theta_{G' \to G}(\{0\}) \subset \mathcal{N}_{\mathfrak{p}}$ を自明な軌道の theta 持ち上げとしよう。すると、

$$\mathcal{O}^{\mathbf{1}} = \{X \in M_{p,q} \mid \operatorname{rank} X = n, X\,{}^tX = 0,\ {}^tXX = 0\},$$

$$\overline{\mathcal{O}^{\mathbf{1}}} = \{X \in M_{p,q} \mid \operatorname{rank} X \leq n, X\,{}^tX = 0,\ {}^tXX = 0\}$$

はそれぞれ dterminantal variety の既約部分多様体になっている。このとき、軌道の閉包上の正則関数環は $K_{\mathbb{C}} = O(p,\mathbb{C}) \times O(q,\mathbb{C})$ の表現として次のように分解する。

$$\mathbb{C}[\overline{\mathcal{O}^{\mathbf{1}}}] \simeq \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_n}^{\oplus} \sigma_p(\lambda) \boxtimes \sigma_q(\lambda)$$

ここで、$\mathcal{P}_n = \{\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mid \lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq 0\}$ は長さが n 以下の分割を表わし、$\sigma_p(\lambda)$ は $O(p,\mathbb{C})$ の最高ウェイト λ を持つ有限次元既約表現である。

　結果として、$\overline{\mathcal{O}^{\mathbf{1}}}$ には $K_{\mathbb{C}}$ が重複度自由に作用していることが分かる。

7.2　正則離散系列の随伴巾零軌道の theta 持ち上げ

ここでは正則離散系列表現の随伴巾零軌道 $\mathcal{O}' \subset \mathfrak{p}'_+$ (開かつ稠密) の theta 持ち上げを考える ([17], [18])。一般に $\mathfrak{p}'_+$ は $K'_{\mathbb{C}}$ の作用で概均質ベクトル空間になっており、$\mathcal{O}'$ はその唯一の開軌道である。$\mathcal{O}^{\mathrm{hol}} = \theta(\mathcal{O}') \subset \mathfrak{p}$ をその theta 持ち上げとしよう。これは 3-step の巾零元からなる軌道である。

Example 7.2 (continued) $\mathfrak{p}'_+ = \operatorname{Sym}_n(\mathbb{C})$ は $K'_{\mathbb{C}} = GL_n(\mathbb{C})$ の作用で概均質ベクトル空間になっており、$\mathcal{O}' \subset \operatorname{Sym}_n(\mathbb{C})$ はその唯一の開軌道である。具体的には

$$\mathcal{O}' = \{X \in \operatorname{Sym}_n(\mathbb{C}) \mid \operatorname{rank} X = n\}$$

と書けている。theta 持ち上げ $\mathcal{O}^{\mathrm{hol}} \subset \mathfrak{p} = M_{p,q}(\mathbb{C})$ はその閉包とともに次のように与えられる。

$$\mathcal{O}^{\mathrm{hol}} = \theta_{G' \to G}(\mathcal{O}') = \{X \in M_{p,q} \mid \operatorname{rank} X = n, \operatorname{rank} X\,{}^tX = n,\ {}^tXX = 0\}$$

$$\overline{\mathcal{O}^{\mathrm{hol}}} = \{X \in M_{p,q} \mid \operatorname{rank} X \leq n,\ {}^tXX = 0\}$$

この場合 $\mathcal{O}^{\mathrm{hol}}$ 自身はかなり複雑な表示になっていることに注意しよう。

　さて、自明な軌道の持ち上げの場合と違い、この場合 $K_{\mathbb{C}} = O(p,\mathbb{C}) \times O(q,\mathbb{C})$ は$\overline{\mathcal{O}^{\mathrm{hol}}}$ に重複度自由には作用していない。しかし、もう少し大きな群、具体的には$O(p,\mathbb{C}) \times GL(q,\mathbb{C})$ が $\overline{\mathcal{O}^{\mathrm{hol}}}$ に行列の掛け算によって自然に作用し、その作用は重複度自由なのである ([20])。正則関数環の分解は次のようになる。

$$\mathbb{C}[\overline{\mathcal{O}^{\mathrm{hol}}}] \simeq \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_n}^{\oplus} \sigma_p(\lambda) \boxtimes \tau_q(\lambda)$$

ここで$\tau_q(\lambda)$ は最高ウェイトが λ の $GL_q(\mathbb{C})$ の有限次元既約表現である。この群 $O(p,\mathbb{C}) \times GL(q,\mathbb{C})$ は $\mathcal{O}^{\mathrm{hol}}$ を保存しない。その閉包にのみ働くのだが、表現の K タイプの分解と $\mathbb{C}[\overline{\mathcal{O}^{\mathrm{hol}}}]$ の分解とはほとんど一致していることが確かめられる。

最後に巾零軌道を射影化した射影多様体の次数について、表現論的な解釈から得られた次数の積分による表示を与えておこう ([11], [20] 参照)。

Example 7.3 (continued) p を偶数とする。

$$\deg \overline{\mathcal{O}^{\mathrm{hol}}} = \frac{1}{V} \int_{\Omega_n} |D_{D_n}(\boldsymbol{x}) D_{A_{n-1}}(\boldsymbol{x})| (x_1 \cdots x_n)^{p+q-3n} \, d\boldsymbol{x},$$

$$V = n! \prod_{0 \le i < j < n} (j^2 - i^2)(j - i) \prod_{0 \le i < n \le j < p/2} (j^2 - i^2) \prod_{0 \le i < n \le j \le q} (j - i)$$

ここで変数 $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ に対して、

$$D_{A_{n-1}}(\boldsymbol{x}) = \prod\nolimits_{1 \le i < j \le n} (x_i - x_j),$$
$$D_{D_n}(\boldsymbol{x}) = \prod\nolimits_{1 \le i < j \le n} (x_i - x_j)(x_i + x_j),$$
$$\Omega_n = \{\boldsymbol{x} \mid \sum\nolimits_{1 \le i \le n} x_i \le 1, x_i \ge 0 \ (\forall i)\}$$

である。

References

[1] D. Barbasch, The unitary dual for complex classical Lie groups. *Invent. Math.* **96**(1989), 103–176.

[2] D. Barbasch and D. A. Vogan, Jr., The local structure of characters. *J. Funct. Anal.* **37**(1980), no. 1, 27–55.

[3] W. Borho and J.-L. Brylinski, Differential operators on homogeneous spaces. I. Irreducibility of the associated variety for annihilators of induced modules, *Invent. Math.* **69** (1982), no. 3, 437–476.

[4] W. Borho and J.-L. Brylinski, Differential operators on homogeneous spaces. III. Characteristic varieties of Harish-Chandra modules and of primitive ideals, *Invent. Math.* **80** (1985), no. 1, 1–68.

[5] David H. Collingwood and William M. McGovern, *Nilpotent Orbits in Semisimple Lie Algebras.* Van Nostrand Reinhold 1993.

[6] A. Daszkiewicz, W. Kraśkiewicz and T. Przebinda, Nilpotent orbits and complex dual pairs. *J. Algebra* **190**(1997), 518–539.

[7] R. Howe, Wave front sets of representations of Lie groups. In *Automorphic forms, representation theory and arithmetic (Bombay, 1979)*, 117–140, Tata Inst. Fundamental Res., Bombay, Bombay, 1981.

[8] R. Howe, Transcending classical invariant theory. *J. Amer. Math. Soc.* **2**(1989), no. 3, 535–552.

[9] A. Joseph, On the associated variety of a primitive ideal. *J. Algebra* **93**(1985), 509–523.

[10] M. Kashiwara and M. Vergne, On the Segal-Shale-Weil representations and harmonic polynomials, Invent. Math. **44** (1978), no. 1, 1–47.

[11] Shohei Kato and Hiroyuki Ochiai, The degrees of orbits of the multiplicity-free actions. To appear in *Astérisque.*

[12] B. Kostant, Lie group representations on polynomial rings. *Amer. J. Math.*, **86**(1963), 327 – 402.

[13] B. Kostant and S. Rallis, Orbits and representations associated with symmetric spaces. *Amer. J. Math.*, **93**(1971), 753 – 809.

[14] P. B. Kronheimer, Instantons and the geometry of the nilpotent variety. *J. Differential Geom.* **32**(1990), 473–490.

[15] J.-S. Li, Singular unitary representations of classical groups, *Invent. Math.*, **97** (1989), 237 – 255.

[16] Kyo Nishiyama, Hiroyuki Ochiai and Kenji Taniguchi, Bernstein degree and associated cycles of Harish-Chandra modules — Hermitian symmetric case —. Kyushu University Preprint Series in Mathematics, 1999-16. To appear in Astérisque.

[17] Kyo Nishiyama and Chen-bo Zhu, Theta lifting of holomorphic discrete series. The case of $U(p,q) \times U(n,n)$. (submitted for publication).

[18] Kyo Nishiyama, Theta lifting of two-step nilpotent orbits for the pair $O(p,q) \times Sp(2n,\mathbb{R})$. In H. Heyer, T. Hirai and N. Obata (eds.), *"Infinite Dimensional Harmonic Analysis"*, Transactions of a Japanese-German Symposium held from September 20th to 24th, 1999 at Kyoto University, pp. 278 – 289, Kyoto 1999.

[19] Kyo Nishiyama, Multiplicity-free actions and the geometry of nilpotent orbits. To appear in *Math. Ann.*

[20] Kyo Nishiyama, Theta lifting of holomorphic discrete series II. In preparation.

[21] R. Ranga Rao, On some explicit formulas in the theory of Weil representation. *Pacific J. Math.* **157**(1993), 335–371.

[22] W. Rossmann, Picard-Lefschetz theory and characters of a semisimple Lie group. *Invent. Math.* **121**(1995), 579–611.

[23] H. Rubenthaler, Les paires duales dans les algébres de Lie réductives. *Astérisque* No. 219, (1994), 121 pp.

[24] W. Schmid and K. Vilonen, On the geometry of nilpotent orbits. *Asian J. Math.* **3**(1999), 233–274.

[25] W. Schmid and K. Vilonen, Characteristic cycles and wave front cycles of representations of reductive Lie groups. *Ann. of Math.* (2) **151**(2000), 1071–1118.

[26] Jiro Sekiguchi, The nilpotent subvariety of the vector space associated to a symmetric pair. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **20**(1984), 155–212.

[27] Jiro Sekiguchi, Remarks on real nilpotent orbits of a symmetric pair. *J. Math. Soc. Japan*, **39**(1987), 127 – 138.

[28] P. Trapa, Annihilators, associated varieties, and the theta correspondence, preprint, November 1999.

[29] M. Vergne, Instantons et correspondance de Kostant-Sekiguchi. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **320**(1995), 901–906.

[30] D. A. Vogan, Jr., Associated varieties and unipotent representations, in *Harmonic analysis on reductive groups (Brunswick, ME, 1989)*, 315–388, Progr. Math. **101**, Birkhäuser, Boston, Boston, MA, 1991.

[31] David A. Vogan, Jr. The method of coadjoint orbits for real reductive groups. In *"Representation theory of Lie groups"* (Park City, UT, 1998), 179–238, IAS/Park City Math. Ser., 8, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.

[32] A. Weil, Sur certains groupes d'opérateurs unitaires. *Acta Math.* **111**(1964), 143–211.

[33] Hiroshi Yamashita, Cayley transform and generalized Whittaker models for irreducible highest weight modules. To appear in *Astérisque*.

[34] 第 4 回 整数論サマースクール報告集 「Weil 表現入門」, 1996.