『フリーズの数学 スケッチ帖』（初版1刷 2022年7月10日発行）の修正

2.5 Conway-Coxeter の定理

種数列 a によって生成され，第 $(m+1)$ 行目に 1 が，第 $(m+2)$ 行目に 0 が続けて並ぶ，幅が m の帯状フリーズに話を戻そう．このようなフリーズの成分のうち，第 1 行目から第 m 行目がすべて正であるとき，つまり前節の言い方で m-正値であるとき，単に**正値帯状フリーズ**であるという．

定理 2.18 (Conway-Coxeter)**.** (1) $n \geq 4$ とする．凸 n 角形の三角形分割の奇蹄列 $a = (a_1, \ldots, a_n)$ を種数列とする周期 n のフリーズ $\mathscr{F}(a)$ は幅 $m = n-3$ の正値帯状フリーズになる．
(2) 逆に幅が $m \geq 1$ の周期的な正値帯状フリーズ $\mathscr{F}$ に対して，$n = m+3$ はフリーズの周期の一つであって第 1 行目の種数列 $a = (a_1, \ldots, a_n)$ は n 角形のある奇蹄列になる．

まず次の補題に注意する．

補題 2.19. 種数列 $a = (a_1, \ldots, a_n)$ のすべての成分が $a_i \geq 2$ を満たせば，フリーズ $\mathscr{F} = \mathscr{F}(a)$ の第 1 対角線上の第 k 行目の成分は $f_k \geq k+1$ を満たす．特に $\mathscr{F}$ が正値帯状フリーズならば種数列の成分は 1 を含む．

もちろんこれは第 1 対角線でなくてもよいから，種数列の成分がすべて 2 以上であれば，フリーズの第 k 行目はすべて $k+1$ 以上，したがって，フリーズの成分は増大するばかりである．

証明. 対角成分の満たす差分方程式 (2.8) より

$$f_k - f_{k-1} = (a_k f_{k-1} - f_{k-2}) - f_{k-1}$$
$$= (a_k - 1) f_{k-1} - f_{k-2} \geq f_{k-1} - f_{k-2}$$

だから，これを繰り返せば

$$f_k - f_{k-1} \geq f_{k-1} - f_{k-2} \geq \cdots \geq f_1 - f_0 = a_1 - 1 \geq 1$$

であって，$f_k \geq f_{k-1} + 1$ がわかる．これより $f_k \geq k+1$ である． □

では定理 2.18 を証明しよう．順序は前後するが，まず (2) から示す．

[定理 2.18(2) **の証明]**．まず $n = m+3$ はフリーズ $\mathscr{F}$ の周期の一つになることを示そう．命題 2.16 の式で $k = m+2$ とおき，さらに $\boldsymbol{M} = {}^tM_{m+2}(a_1, a_2, \ldots, a_{m+2})$ と短く書けば，

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{m+2} \\ f_{m+1} \end{pmatrix} = \boldsymbol{M}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.15}$$

である．以下頻出するので，この証明に限り $U(a) = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ と表すことにする．たとえば，$\boldsymbol{M} = U(a_{m+2})\cdots U(a_2)U(a_1)$ である．（転置によって順序が逆転することに注意する．）$\boldsymbol{M}' = {}^tM_{m+1}(a_2, \ldots, a_{m+2})$ と表すと，この記法で $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}'\,U(a_1)$ だから

$$\boldsymbol{M}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{M}'\,U(a_1)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{M}'\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\boldsymbol{M}'\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

この両辺に $U(a_{m+3})$ を左から掛けて演習 2.17 の式を用いると

$$\begin{aligned} U(a_{m+3})\boldsymbol{M}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= -U(a_{m+3})\boldsymbol{M}'\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= -\,{}^tM_{m+2}(a_2, \ldots, a_{m+2}, a_{m+3})\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} g_{m+2} \\ g_{m+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

そこで，

$$\boldsymbol{M}'' = U(a_{m+3})\boldsymbol{M}$$

と書くと，上の式は $\boldsymbol{M}''\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ である．さらに，式 (2.15) の両辺に $U(a_{m+3})$ を掛けて

$$\boldsymbol{M}''\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = U(a_{m+3})\boldsymbol{M}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = U(a_{m+3})\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

以上の計算を総合すると

$$\boldsymbol{M}''\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(\boldsymbol{M}''\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{M}''\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \therefore\ \boldsymbol{M}'' = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

がわかる．長い道のりだったが，これによって

$$\boldsymbol{M}'' = U(a_{m+3})\boldsymbol{M} = U(a_{m+3})U(a_{m+2})\cdots U(a_2)U(a_1) = -\boldsymbol{1}_2$$

がわかった．ただし $\mathbf{1}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は単位行列である．種数列はどこから始めてもよいので，どの連続する $m+3$ 個の種数列を取ってもこの式は成り立つ．特に，

$$\boldsymbol{M}''' := U(a_{m+4})U(a_{m+2})\cdots U(a_3)U(a_2) = -\mathbf{1}_2$$

でもある．さて，これより

$$\begin{aligned} U(a_{m+4}) &= -U(a_{m+4})(-\mathbf{1}_2) = -U(a_{m+4})\boldsymbol{M}'' \\ &= -U(a_{m+4})U(a_{m+3})\cdots U(a_2)U(a_1) \\ &= -\boldsymbol{M}'''U(a_1) = -(-\mathbf{1}_2)U(a_1) = U(a_1) \end{aligned}$$

を得るが，これは $a_{m+4} = a_1$ を意味している．つまり第 1 行目は周期 $n = m+3$ を持つ．この『周期』は必ずしも最短ではないことに注意せよ．

以下，主張の残りの部分をフリーズの幅 $m \geq 1$ に関する帰納法で示す．$m = 1$ のときは，1 の連続する行に挟まれた第 1 行目は，ユニモジュラ規則によって $1, 2$ が繰り返すことが容易に確かめられ，$a = (1,2,1,2)$ が長さ $4 = m+3$ の種数列で，四角形の奇蹄列になっている．

そこで，フリーズ $\mathscr{F} = \mathscr{F}(a)$ が正値帯状フリーズでその幅が $m \geq 2$ であるとする．すでに証明したことから，種数列の周期は $n = m+3$ であるとしてよい．さて，補題 2.19 より，$a_i = 1$ となる i が存在する．このとき $a_{i-1}, a_{i+1} \geq 2$ である．実際，フリーズ $\mathscr{F}$ の a_i を含む部分を書くと

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\ 1 & & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 \\ & & a_{i-1} & & a_i & & a_{i+1} & & a_{i+2} \\ \cdots & & & p & & q & & r & & s \end{array}$$

となっていて，$a_i = 1$ だからユニモジュラ規則より

$$a_{i-1} \cdot a_i - 1 \cdot p = a_{i-1} - p = 1, \quad \therefore \ a_{i-1} = 1 + p$$

だが，$\mathscr{F}$ は正値としたので $p \geq 1$ であり，$a_{i-1} = 1 + p \geq 2$ である．同様にして $a_{i+1} \geq 2$ がわかる．そこで，長さ $n-1$ の種数列を

$$a' = (a_1, \ldots, a_{i-2}, a_{i-1} - 1, a_{i+1} - 1, a_{i+2}, \ldots, a_n)$$

とおく．a' の各成分は 1 以上の整数である．この a' を種数列にして構成されたフリーズを $\mathscr{F}' = \mathscr{F}(a')$ として，その第 1 対角線を $f'_0 = 1, f'_1 = a'_1, f'_2, \ldots$ と書く．このとき

$$\begin{cases} f'_k = f_k & (k \leq i-2) \\ f'_k = f_{k+1} & (k \geq i-1) \end{cases} \tag{2.16}$$

が成り立つことを示そう．いま，$\alpha = a_{i-1}$，$\beta = a_{i+1}$ と書いて行列の計算を行うと

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \alpha\beta - \alpha - \beta & \alpha - 1 \\ -\beta + 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha - 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta - 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となることがわかる．最右辺の行列は $\begin{pmatrix} a'_{i-1} & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a'_i & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ であることに注意しよう．つまり

$$M_k(a'_1, \cdots, a'_k) = \begin{cases} M_k(a_1, \ldots, a_k) & (k \leq i-2) \\ M_{k+1}(a_1, \ldots, a_{k+1}) & (k \geq i) \end{cases} \tag{2.17}$$

である．これより式 (2.16) の $k \neq i-1$ の場合が従う．一方，式 (2.17) の $k = i$ の時を使うと

$$\begin{pmatrix} f'_i \\ f'_{i-1} \end{pmatrix} = {}^t M_i(a'_1, \cdots, a'_i)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = {}^t M_{i+1}(a_1, \ldots, a_{i+1})\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{i+1} \\ f_i \end{pmatrix}$$

となって，第 2 成分を比較すると $f'_{i-1} = f_i$ がわかる．以上より，$\mathscr{F}'$ の第 1 対角線はちょうど $\mathscr{F}$ の第 1 対角線の $(i-1)$ 番目の成分を省いたものに等しいことがわかった．同様の考察によって $\mathscr{F}'$ の第 2 対角線は $\mathscr{F}$ の第 2 対角線の $(i-2)$ 番目の成分を省いたものに等しく，第 3 対角線では $(i-3)$ 番目の成分を省いたものに等しい．

結果として，$\mathscr{F}'$ は正値帯状フリーズで，その幅は $m-1$ であることがわかる．すると，帰納法の仮定から a' は $n-1 = m+2$ 角形の奇蹄列であって，$\mathscr{F}' = \mathscr{F}(a')$ は a' を種数列とするフリーズである．

そこで，奇蹄列 a' に対応する $(n-1)$ 角形の三角形分割の第 $(i-1)$ 番目と i 番目の頂点を結ぶ辺に三角形を貼りつけて n 角形を作ろう．するとこれも三角形分割されているが，ちょうどその奇蹄列が a になることが “三角形を貼り合わせる” という操作から納得されるであろう．（下図 2.9 参照）．したがって a は n 角形の奇蹄列である．これが示したかったことだった．

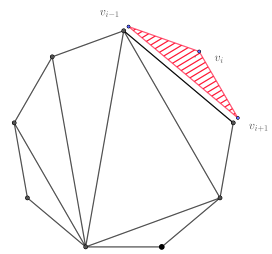

図 2.9　$(n-1)$ 角形に 1 つ三角形を貼り合わせる

証明はお仕舞いだが，ついでに第 1 対角線 $(f'_k)_{k=1}^{m-1}$ から $(f_k)_{k=1}^{m}$ がどのように復活するのかも見ておこう．式 (2.16) を考慮すれば，要するに f_{i-1} だけを決めればよい．$a_i = 1$ なので

$$f_i = a_i f_{i-1} - f_{i-2} = f_{i-1} - f_{i-2}$$

だが，$f_i = f'_{i-1}$，$f'_{i-2} = f_{i-2}$ だから

$$f_{i-1} = f'_{i-2} + f'_{i-1} \tag{2.18}$$

である．□

[定理 2.18(1) **の証明]**．a を n 角形の奇蹄列として，$n \geq 4$ に関する帰納法で示す．このとき，系 2.6(2) によって $a_i = 1$ となる成分が存在する．

そこで奇蹄列 a に対応する三角形分割において，頂点 v_i を持つ三角形を取り除いてしまおう．すると $(n-1)$ 角形の三角形分割が得られ，対応する奇蹄列 a' は主張 (2) の証明のときと同じ a' となり，差分方程式系を考えるとまったく同様にして，フリーズ $\mathscr{F}' = \mathscr{F}(a')$ の第 1 対角線は $\mathscr{F}$ の第 1 対角線からちょうど成分 f_{i-1} を取り去ったものであることがわかる．

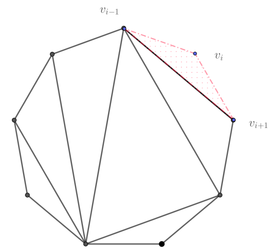

図 2.10　三角形分割から三角形を 1 つ除去する．

帰納法の仮定から，奇蹄列 a' に対応するフリーズ $\mathscr{F}'$ は幅が $m' = (n-1)-3 = n-4$ の正値帯状フリーズである．したがって，$\mathscr{F}$ の第 1 対角線は $m = m'+1 = n-3$ とおくと $f_{m+1} = 1$, $f_{m+2} = 0$ を満たす．また $1 \leq j \leq m$ に対して $j \neq i-1$ ならば $f_j \geq 1$ である．一方，(2) の証明と同様にして式 (2.18) から $f_{i-1} = f'_{i-2} + f'_{i-1} \geq 2$ がわかる．（$i-2=0$ となることもあり得るが，このときは $f'_0 = 1$ であることに注意せよ．）

以上は第 1 対角線の話だが，第 2 対角線，第 3 対角線，... もまったく同様の性質を持つことが示される．これより $\mathscr{F}$ が幅 $m = n-3$ の正値帯状フリーズになることが分かった．□

かくして，奇蹄列が帯状のフリーズを定めることがわかったが，実は奇蹄列は帯状フリーズの第 1 対角線だけから決まっている．それは第 1 対角線

$$f_0 = 1, f_1 = a_1, f_2, \ldots, f_{n-2} = 1, f_{n-1} = 0 \tag{2.19}$$

を与えるとユニモジュラ規則を使って他の成分がすべて計算できることから明らかであるが，奇蹄列 $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ は対角線の成分を用いて次のように具体的に書ける．

系 2.20. 周期が n で幅が m の正値帯状フリーズ $\mathscr{F}(a)$ の第 1 対角線上の成分を式 (2.19) のように書いておけば，種数列である奇蹄列は

$$a_i = \frac{f_i + f_{i-2}}{f_{i-1}} \quad (1 \leq i < n), \quad a_n = 3(n-2) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1})$$

で与えられる．とくに，フリーズ $\mathscr{F}(a)$ の任意の対角線における連続する 3 つの成分を f_{k-1}, f_k, f_{k+1} とすると，$f_{k-1} + f_{k+1}$ は f_k で割り切れる．

証明．最初の a_i の式は差分方程式 $f_i = a_i f_{i-1} - f_{i-2}$ を書き直したものに過ぎない．ところが $i = n$ のときには $f_{n-1} = 0$ なので差分方程式を解くことはできない．そこで系 2.6 の力を借りると，奇蹄列の総和は $3(n-2)$ だったから，a_n は $a_1, \ldots, a_{n-1}$，つまり第 1 対角線の成分を用いて表されることがわかる． □

演習 2.21. §2.2 のフリーズに対して対角線から奇蹄列を計算してみよ．対角線をいろいろと取り替えて計算してみるとよい．

演習 2.22. 奇蹄列とは限らない任意の自然数の種数列から生成されたユニモジュラ・フリーズ $\mathscr{F}$ を考える．これはもはや帯状のフリーズにはならない．このフリーズ $\mathscr{F}$ の任意の対角線における連続する 3 つの成分を f_{k-1}, f_k, f_{k+1} とすると，$f_{k-1} + f_{k+1}$ は f_k で割り切れるだろうか?

追記：早稲田大学の広中由美子先生から Conway-Coxeter の定理の主張に誤りがあることを指摘していただいた．本書の一番の基礎にある重要な定理の誤りを，このように早く訂正できたのも先生の御蔭である．感謝する．

2022 年 10 月 13 日記