問題 1.

(1) 次の逐次積分を計算してください。

$$\int_0^1 x_r dx_r \int_0^{x_r} dx_{r-1} \cdots \int_0^{x_3} dx_2 \int_0^{x_2} dx_1$$

(2) 関数 M_r を

$$M_r(x_1, \cdots, x_n) = (x_1, \cdots, x_n \text{ を小さい順に並べた時の } r \text{ 番目の座標})$$

と決めます。例えば、$M_1(x) = \min\{x_1, \cdots, x_n\}$、$M_n(x) = \max\{x_1, \cdots, x_n\}$ です。このとき、次の等式を示して下さい。

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 M_r(x_1, \cdots, x_n) dx_1 \cdots dx_n = \frac{r}{n+1}$$

[ヒント： $M_r(x_1, \cdots, x_n)$ は $x_1, \cdots, x_n$ に関して対称ですから、積分領域を $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \leq 1$ に限って積分し、後で $n!$ 倍しても構いません。]

問題 2. 次の積分を以下の小問をヒントにして計算してください。

$$\int_0^\infty \int_0^\infty |\log x - \log y| e^{-(x+y)} dxdy = 2 \log 2$$

(1) 被積分関数は x, y についての対称式であることに注意して、積分領域を $0 \leq x \leq y \leq \infty$ に限ってもよいことを示し、これを逐次積分で表してください。

(2) $\lim_{x \to \infty} e^{-x} \int_0^x \log y e^{-y} dy = 0$ であることを示してください。

(3) 部分積分を実行することにより、次の等式を示してください。

$$\int_0^\infty e^{-x} \int_0^x \log y e^{-y} dydx = \int_0^\infty e^{-2x} \log x dx = \int_0^\infty e^{-t} \frac{\log t - \log 2}{2} dt$$

問題 3. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq y \leq \pi\}$ とするとき、次の積分を以下の小問をヒントにして計算してください。

$$\iint_D \log |\sin(x-y)| dxdy = -\frac{\pi^2}{2} \log 2$$

(1) 被積分関数は x, y についての対称式であること、また $\sin(x+\pi) = -\sin x$ であることから、次の積分が計算できれば十分であることを示してください。

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |\sin(x-y)| dxdy = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |\cos(x-y)| dxdy$$

(2) 次の等式を示してください。

$$\begin{aligned}&\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|\sin(x-y)|dxdy+\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|\cos(x-y)|dxdy\\ &=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|\sin 2(x-y)|dxdy-(2\pi)^2\log 2\end{aligned}$$

[ヒント：倍角公式]

(3) 前小問を用いて、問題の積分値 I に関する方程式を求めてください。この方程式を解けば積分値が求まります。