最新物理・数理 2009
第 4 回 数学における対称性

西山 享

青山学院大学 理工学部 物理・数理学科

2009 年度後期 10 月 16 日 (金)

図形の対称性

X : 空間 (例: 平面、3 次元空間、球面、上半空間...)
S : 図形 $\subset X$
S の対称性とは X 上の変換 T に関する不変性である

$$T(S) = S, \qquad T : X \to X : \text{(可逆な) 変換}$$

Point

対称性 ＝ 不変性

Example

1. $X = \mathbb{R}^2$, $T = r_\ell =$ (ある直線 ℓ に関する対称移動)
   S が ℓ に関して線対称 $\iff r_\ell(S) = S$
2. $X = \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (-x, -y)$
   S が原点に関して点対称 $\iff T(S) = S$

Definition (変換群)

G が変換群であるとは

1. G は X 上の変換の集合; $G \ni e$ (恒等写像)
2. $T_1, T_2 \in G \implies T_1 \circ T_2 \in G$
3. $T \in G \implies T^{-1} \in G$

Remark

変換 $= T : X \to X$: 全単射 & T も T^{-1} も「よい」性質を持つ
「よい」性質 = 微分可能性、連続性、距離を保つ、角度を保つ、$\cdots$

図形 $S \implies G(S) := \{T : X \to X \mid T(S) = S\}$: 変換群
$G(S)$: S を不変にする「よい」変換の全体

Point

(S の持つ対称性) $\iff$ (S を不変にする変換群 $G(S)$)

5つの正多面体

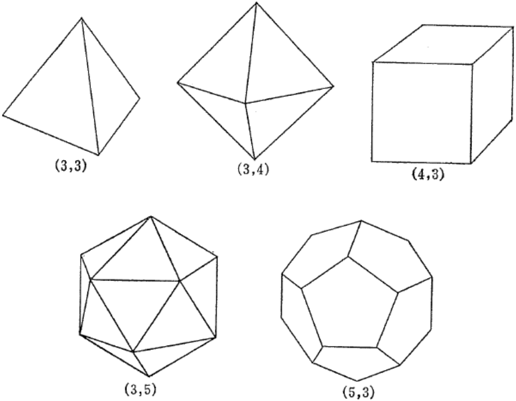


図 1.2　5 種の正多面体

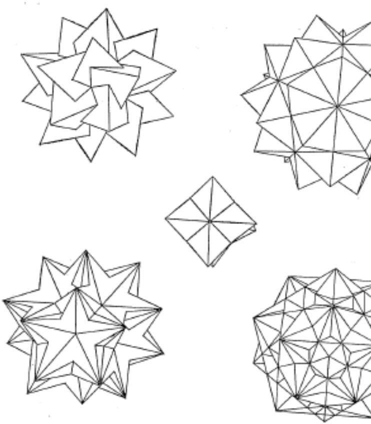


図 6.7　3 次元の複合正多面体

正多面体と複合正多面体

(一松信, 高次元の正多面体, 日本評論社, 1983 [H1] より)

変換群の例 (正多面体群)

$X = \mathbb{R}^3$ 内の正多面体 S に対して

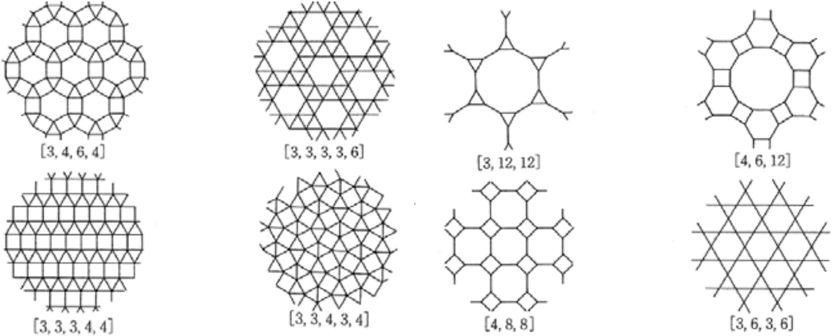
$G(S) = \{T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 :$ 合同変換 (長さを変えない変換) $\mid T(S) = S\}$

S	面	辺	頂点	$G(S)$	$\lvert G(S) \rvert$
正 4 面体	4	6	4	S_4	$24 = 4 \cdot 3 \cdot 2$
正 6 面体	6	12	8	$S_4 \times \{\pm 1\}$	$48 = 6 \cdot 4 \cdot 2$
正 8 面体	8	12	6	$S_4 \times \{\pm 1\}$	$48 = 8 \cdot 3 \cdot 2$
正 12 面体	12	30	20	$A_5 \times \{\pm 1\}$	$120 = 12 \cdot 5 \cdot 2$
正 20 面体	20	30	12	$A_5 \times \{\pm 1\}$	$120 = 20 \cdot 3 \cdot 2$

S_n : n 次対称群 (置換群)

A_n : n 次交代群 (偶置換の全体)

平面タイル張り



Archimedes の平面充填形

(一松信, 正多面体を解く, 東海大学出版会, 1983 [H2] より)

変換群の例 (結晶群)

1. 平面のタイル張り:
   2 次元結晶群: 17 種類 (昔から知られていた。アルハンブラ宮殿の壁面のタイル張りはすべての結晶群を網羅する。)
2. 空間のタイル張り:
   3 次元結晶群 : 219 種類 (E. Fedorov, A. Shoenflies, 1885 – 1891 頃)
   $\Leftarrow$ 鉱物の結晶構造を記述する。
3. 4 次元結晶群 : 4,783 種類
   (多数の人達によって 1974 年に分類された)
4. 5 次元結晶群 : 222,018 種類
   (W. Plesken-T. Schulz, Exp. Math. 9 (2000))
5. 6 次元結晶群 : 28,927,922 種類
   (W. Plesken-T. Schulz, Exp. Math. 9 (2000))

空間タイル張り

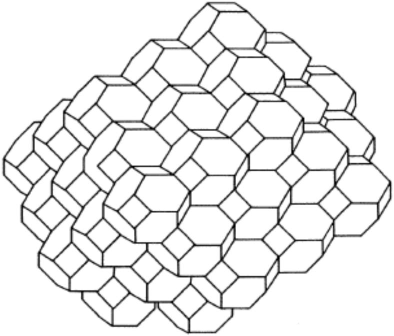


図4.38 [4,6,6]の空間充填形

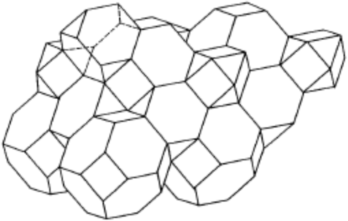


図4.46 [3,6,6], [3,4,3,4], [4,6,6]による空間充填形

空間充填形 (一松信, 正多面体を解く, 東海大学出版会, 1983 [H2] より)

球面タイル張り

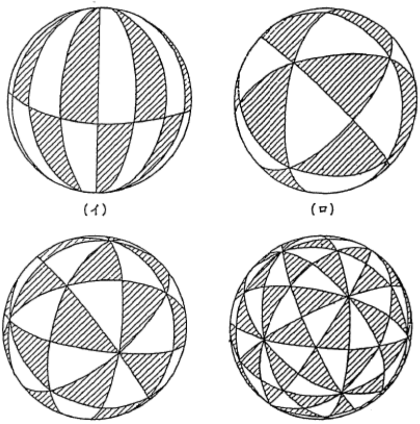


図11-14

球面のタイル張り (難波誠「幾何学と群」現代数学社 [N] より)

双曲タイル張り

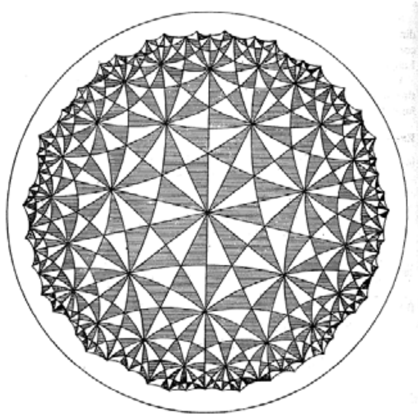


Figure 3.16. Tessellation of the unit disc. (From Klein and Fricke [1]. Reprinted by permission of Teubner.)

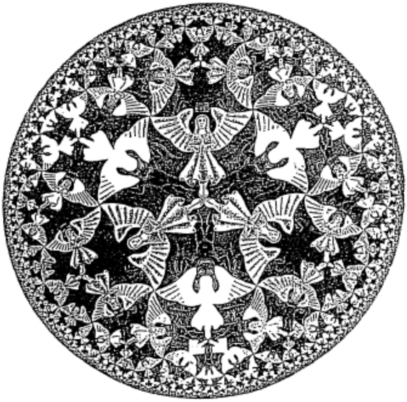


図11-20

双曲空間のタイル張り

(A. Terras, "Harmonic analysis and symmetric spaces and applications. I", Springer より)

天使と悪魔 by Escher (難波誠「幾何学と群」現代数学社 [N] より)

双曲的タイル張り (一次分数変換群)

$H = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\, z > 0\}$: 複素上半平面
S : H 上の双曲タイル張り (tessellation)
$G(S) = \{T : \mathbb{C} \cup \infty \to \mathbb{C} \cup \infty :$ 解析的変換 $\mid T(H) = H, T(S) = S\}$
$S =$ (下図の tessellation) のとき $G(S) = SL_2(\mathbb{Z})$

$$SL_2(\mathbb{Z}) \ni \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : z \to \frac{az+b}{cz+d} : \text{一次分数変換}$$

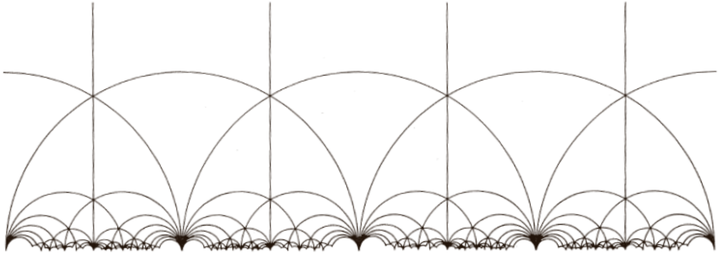


Figure 3.14. Tessellation of H for $SL(2, \mathbb{Z})$. (Computer drawing by the UCSD VAX and Mark Eggert.)

(A. Terras, "Harmonic analysis and symmetric spaces and applications. I", Springer [AI] より)

四元数の空間タイル張り

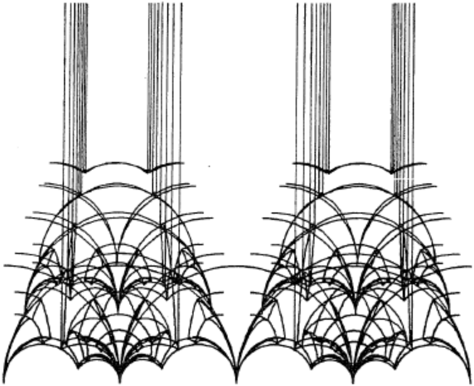


Figure 5.3. Tessellation of the quaternionic upper half plane from $SL(2, \mathbb{Z}[i])$ in stereo. (Drawn by the UCSD VAX computer and Mark Eggert.)

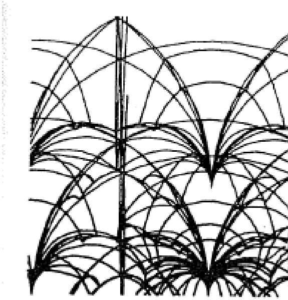


Figure 5.5. Tessellation of the q
(Drawn by the UCSD VAX co

高次元の tessellation を stereo graphics に表したもの

(A. Terras, "Harmonic analysis and symmetric spaces and applications. II", Springer [AII] より)

図形 S $\iff$ 方程式 $f(x_1, \cdots, x_n) = 0$

Example

- 円 : $x^2 + y^2 = 1$ 　球 : $x^2 + y^2 + z^2 = 1$
- 双曲線 : $xy = 1$ または $x^2 - y^2 = 1$
- 放物線 : $y = x^2$ または $yz = x^2$ (射影的表示)

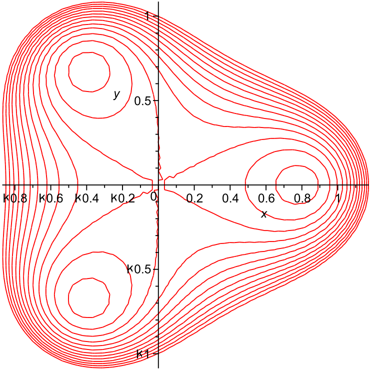
Point

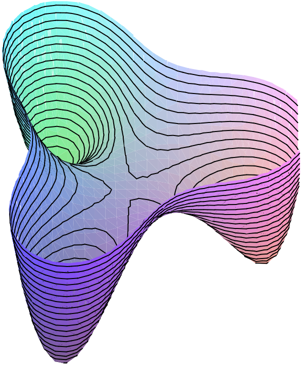
[図形 = 陽な表示 (**光**)] $\iff$ [方程式 = 陰な表示 (**影**)]

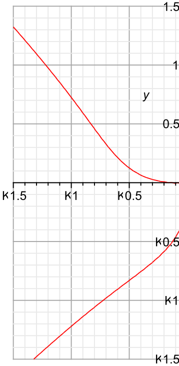
図形 S の**不変性** $\iff$ 関数 f の**不変性**

$$\begin{tikzcd} & G(S) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \boxed{\text{図形 } S} \arrow[rr, Leftrightarrow] & & \boxed{\text{方程式 } f(x) = 0} \end{tikzcd}$$

方程式による図形の例







$S : f(x, y) = (x^2 + y^2)^3 - x(x^2 - 3y^2) = 0$

- 原点中心の 120° 回転、および x 軸に関する対称移動で不変
- $G(S) = S_3$ は関数 $f(x, y)$ も不変にする

$S : f(x, y) = x^4 + xy - y^4 = 0$

- 原点中心の 90° 回転で不変

保型関数

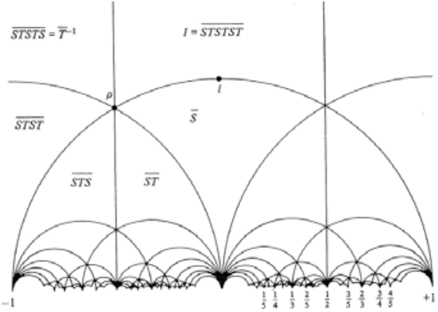


Figure 3.15. Poincaré's method of generators and relations illustrated for $SL(2, \mathbb{Z})/\{+I, -I\}$. $\bar{S}z = -1/z$; $\bar{T}z = z + 1$; $\rho = (-1 + \sqrt{-3})/2$; $i = \sqrt{-1}$. Generators of $SL(2, \mathbb{Z})/\{+I, -I\}$ are $\bar{S}$ and $\bar{T}$. Defining relations are $\bar{S}^2 = \bar{I}$ and $(\bar{S}\bar{T})^3 = \bar{I}$.

(A. Terras, "Harmonic analysis and symmetric spaces and applications. I", Springer [AI] より)

$S \subset H$: 上図の tessellation $\Longrightarrow$ $G(S) = SL_2(\mathbb{Z})$

- **保型関数** : $G(S)$-不変な H 上の有理型函数 $\Longleftrightarrow$ S
- 保型関数は本質的に一つしかない $\Longrightarrow$ j と書く
  (他の保型関数は j の有理式として表される。)
- j は楕円関数論と深く結び付いている

終

- 一松信, 高次元の正多面体, 数セミ・ブックス 7, 日本評論社, 1983.
- 一松信, 正多面体を解く, 東海科学選書, 東海大学出版会, 1983.
- 平井武, 線形代数と群の表現 I・II, すうがくぶっくす 20, 朝倉書店, 2001.
- 難波誠, 群と幾何学, 現代数学社, 1997.
- Audrey Terras, *Harmonic analysis and symmetric spaces and applications. I.* Springer-Verlag, Berlin, 1985.
- Audrey Terras, *Harmonic analysis and symmetric spaces and applications. II.* Springer-Verlag, Berlin, 1988.