

解析学IA：第1回講義 (4月7日(月))

このノートを読んで、演習問題を解くことで、2025年度前期(月曜1限)「解析学IA」(担当：松本)の講義とします。今後も、話がまとまった段階で講義ノートの配信をします。

学習の際は、教科書としてあげた「解析学入門」(市原直幸，増田哲，松本裕行著，培風館)を合わせて参照してほしいと思います。青学の3人で書いた，できる限りわかりやすい記述を心がけ，図を多く入れ，演習問題の解答を詳しく書いた教科書で後期にも使用します。本の方が多くの学生には読みやすいと思うし，同じことの説明でも少しのことで理解しやすくなるものです。

「定義」というのは，数学的な概念を言葉や数式によって明瞭にするものです。まず，数学的な意味をハッキリさせることが学習の第一歩です。

第1回講義にはありませんが，「定理」とあるのは，高校で学習した平均値の定理のように，重要な数学的な事実です。定理から公式が生まれることが多いです。定理に関しては，このノートを見るだけでなく，自筆のノートを作成して，例題や応用例などを合わせてメモしてください。その際，単に写すだけでなく，自分が理解しているかどうかを考えてください。このときに，教科書があると役に立つと思います。

講義ノートには，

合成関数の微分 (5) は極めて重要である。理由も含めて，十分な理解が必要である。

の形の枠で囲まれた注意が数か所あります。特に，よく理解して欲しい事項です。

私から特にお願いしたいのは，

公式を丸覚えするのではなく，理由をつけて頭に入れてほしいということです。
演習問題を解く際は，公式や例題を見ながら解いてください。
そのときも，理由付けを忘れないようにしてください。

質問は，講義後演習中はもちろんのこと，コースパワー上からも可能です。遠慮なく，どうぞ！

第1章 微分法

1. 微分の定義

f を実数全体 $\mathbf{R}$ またはその部分区間 $([0, 1], [0, \infty)$ など) の上で定義された関数とする.
 f が定義される区間 (集合) を関数 f の **定義域**, f の値の全体を **値域** という.

例 1.1. (1) $x^n, e^x, \sin x$ は $\mathbf{R}$ 上の関数である.

(2) $\log x$ は, $(0, \infty)$ 上で定義された関数であり, 値域は $\mathbf{R}$ 全体である.

(3) $f(x) = \sqrt{x(1-x)}$ の定義域は $[0, 1]$ であり, 値域は $[0, \frac{1}{2}]$ である.

$$(x(1-x) = -(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4})$$

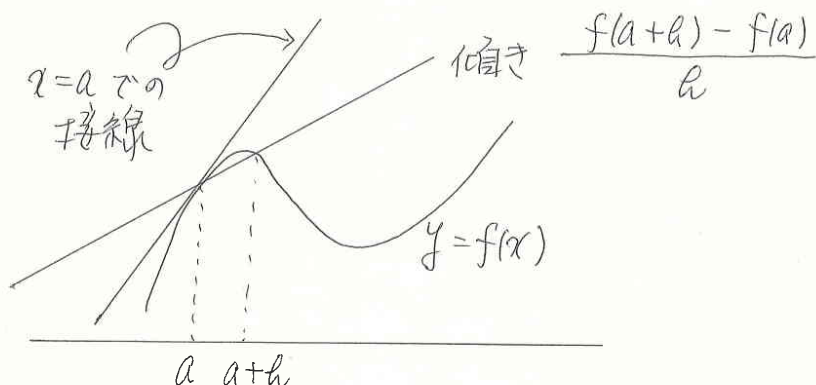
関数 $y = f(x)$ に対して $(x, f(x))$ を平面上にプロットしたのが f のグラフである. 一般には, $y = f(x)$ のグラフには増減があり, その変化を扱うのが解析学である. その基本となるのが **微分法** である.

微分係数

定義 1. $(a, f(a))$ と $(a+h, f(a+h))$ を結ぶ直線の傾き $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ が $h \rightarrow 0$ のとき収束するならば, f は $x = a$ で微分可能であるといって, 極限を $f'(a)$ と書き, f の $x = a$ における微分係数とよぶ:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}. \quad (*)$$

$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ は, グラフ上の2点 $(a, f(a)), (a+h, f(a+h))$ を結ぶ直線の傾きである. 次の図から, h を0に近づけたときの様子を想像してほしい.



注意 1.2. (1) f の定義域が区間 $[a, b]$ のとき、右からの極限 $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ が存在するならば、 f は $x = a$ で微分可能という。 $x = b$ での微分も同様に考える。

(2) $x = a$ における接線の方程式は $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ となることは知っていると思います。この形で、直線の傾きが $f'(a)$ で点 $(a, f(a))$ を通ることが直ぐ分かる。

展開しない方が後の話に繋がって良い！ 次はその一例である。

(3) (*) は、 x が a に近いとき、 $f(x)$ の値は $f(a) + f'(a)(x - a)$ と近いことを意味する。たとえば、 $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 1$ であれば、 $f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$, $f'(1) = \frac{1}{2}$ だから

$$x \doteq 1 \text{ のとき } f(x) \doteq 1 + \frac{1}{2}(x - 1)$$

である。 $\sqrt{1.02} \doteq 1 + \frac{0.02}{2} = 1.01$ と書いてみると理解しやすい。

ちなみに、電卓によると $\sqrt{1.02} = 1.00995\dots$ である。

次の導関数の定義は、よく知っていることと思う。

導関数

定義 2. f がその定義域の各点で微分可能のとき、 x における微分係数 $f'(x)$ の値を対応させる関数を f の**導関数**とよび f' または $\frac{df}{dx}$ と書く：

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \quad (\#)$$

前ページの注意でも述べたことだが, (#) は $|h|$ が小さいならば $f(x+h) - f(x) \doteq f'(x)h$ であること, つまり, x が $x+h$ に変化したとき, f の値が $f'(x)h$ ほど変化することを示している. これが「微分」の考えである. そして,

$$df = f'(x)dx$$

と書いて, df を f の**微分**という. df は, x の微小変化に対応する関数 f の値の微小変化を表す.

例 1.3. (1) $f(x) = \pi x^2$ のとき, $f'(x) = 2\pi x$. $h > 0$ ならば, $\pi(x+h)^2 - \pi x^2$ は半径 $x+h$ の円から, 同じ中心をもつ半径 x の円を除いた円環の面積である. これを h で割ると円周の長さに近い.

自分で図を書いて理解することは難しくないと思う. 教科書 44 ページ例 3.3 に図とともに解説がある.

(2) $f(x) = \frac{4}{3}\pi x^3$ のとき, $f'(x) = 4\pi x^2$. つまり, 球の体積を半径に関して微分すると, 球面の面積が得られる.

2. 基本的な関数の導関数

次の初等関数の導関数に関する公式は, 既知とする.

(1) $(x^n)' = nx^{n-1}$ ($n = \pm 1, \pm 2, \dots$)

(2) $(e^x)' = e^x$

(3) $(\log x)' = \frac{1}{x}$, $x > 0$.

(4) $(\sin x)' = \cos x$

(5) $(\cos x)' = -\sin x$

(3) の証明を述べる. まず,

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{t}\right)^{-t}$$

に注意する. $n \rightarrow \infty$ は自然数 n を大きくすること, $t \rightarrow \infty$ は実数 t を大きくすることを表す. 初めの等式が e の定義である. 3 番目は,

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{t}\right)^{-t} &= \left(\frac{t-1}{t}\right)^{-t} = \left(\frac{t}{t-1}\right)^t \\ &= \left(1 + \frac{1}{t-1}\right)^t = \left(1 + \frac{1}{t-1}\right)^{t-1} \times \left(1 + \frac{1}{t-1}\right) \end{aligned}$$

と変形すれば分かる.

よって, (3) は

$$\frac{\log(x+h) - \log x}{h} = \frac{1}{h} \log \frac{x+h}{x} = \frac{1}{x} \log \left(1 + \frac{h}{x}\right) = \frac{1}{x} \log \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}} \rightarrow \frac{1}{x} \log e = \frac{1}{x}$$

から得られる.

演習 2.1. 曲線 $y = \sin x$ 上の点 $(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2})$ における接線の方程式を求めよ.

3. 微分法の基本公式

公式を記憶しておくことは必要だが, 理由または証明のカギを合わせて理解して欲しい.

$$(1) (f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$$

$$(2) (f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\begin{aligned} (\because) \quad \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} &= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x+h) + f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &\rightarrow f'(x)g(x) + f(x)g'(x). \end{aligned}$$

$$(3) \left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -\frac{f'(x)}{f(x)^2} \quad \text{証明は数学演習の問題とする.}$$

$$(4) \left(\frac{g(x)}{f(x)}\right)' = \frac{g'(x)f(x) - g(x)f'(x)}{f(x)^2}$$

($\because$) (2) と (3) より

$$\begin{aligned} \left(g(x) \cdot \frac{1}{f(x)}\right)' &= g'(x) \cdot \frac{1}{f(x)} + g(x) \cdot \left(\frac{1}{f(x)}\right)' = g'(x) \cdot \frac{1}{f(x)} + g(x) \frac{-f'(x)}{f(x)^2} \\ &= \frac{g'(x)f(x) - g(x)f'(x)}{f(x)^2}. \end{aligned}$$

$$(5) (f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$$

($\because$) $g(x+h) - g(x) = k$ とおくと, $h \rightarrow 0$ のとき $k \rightarrow 0$ であり,

$$\frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} = \frac{f(g(x) + k) - f(g(x))}{k} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \rightarrow f'(g(x))g'(x).$$

(5) は $k = 0$ の場合もあるので少し乱暴な理由付けだが, このことが本質でありここではこれで十分だと思う. 詳しいことが知りたい人は, 教科書 45 ページ, 定理 3.2 の証明を参照.

(5) を応用すると, $(e^x)' = e^x$ を「証明」することができる. 前節で, $(\log x)' = \frac{1}{x}$ を示した. $g(x) = e^x$ とおくと $\log g(x) = x$ なので, 両辺を微分して

$$(\log g(x))' = \frac{g'(x)}{g(x)} = 1$$

となり, $(e^x)' = e^x$ を得る.

演習 3.1. 次の関数の導関数を求めよ．ただし，(7),(8) では $|x| < 1$ とする．

$$(1) (2x+3)^5 \quad (2) (x^2+1)^4 \quad (3) \sin^2 x \quad (4) \tan x$$

$$(5) \frac{x-1}{x^2+1} \quad (6) \frac{\sqrt{x}}{x+1} \quad (7) (1-x^2)^{\frac{1}{2}} \quad (8) \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

解析学IA：第1回講義演習問題解答，コメント

注意． 解答への道は一つとは限らない．解答の表示も一つは限らない．ただし，常識的な表現というものはある．また，このノートは松本が個人的に作成したもので，細かい計算ミスやタイプミスがあると思う．そのようなものを見つけたら，遠慮なく知らせてほしい．

演習 2.1. $y' = \cos x$ で $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ だから，求める接線の方程式は

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(x - \frac{\pi}{6} \right) + \frac{1}{2}$$

である．

講義ノートでも触れたが，カッコを展開しない方が，通る点(接点)の座標が見えて良い．逆に言うなら，展開をすると接点が見えなくなる． y 切片が必要な場合など，展開する必要があるなら展開すればよい．前半の重要事項であるテイラー展開は，接点の近くにおける「関数の近似」に端を発するので，この場合も展開は意味を失わせる．

演習 3.1. どの公式を用いたかを，確認することが重要である．

$$(1) ((2x+3)^5)' = 5(2x+3)^4 \times (2x+3)' = 10(2x+3)^4.$$

$$(2) ((x^2+1)^4)' = 4(x^2+1)^3 \times (x^2+1)' = 8x(x^2+1)^3.$$

$$(3) (\sin^2 x)' = 2 \sin x (\sin x)' = 2 \sin x \cos x.$$

$$(4) (\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$(5) \left(\frac{x-1}{x^2+1} \right)' = \frac{(x-1)'(x^2+1) - (x-1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}.$$

$$(6) (\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ より (ノートでは未出だけど，既習事項と思います)}$$

$$\left(\frac{\sqrt{x}}{x+1} \right)' = \frac{\frac{x+1}{2\sqrt{x}} - (x+1)' \sqrt{x}}{(x+1)^2} = \frac{-x+1}{2\sqrt{x}(x+1)^2}.$$

$$(7) ((1-x^2)^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} (1-x^2)' = -x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$(8) \left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \right)' = \frac{\frac{\sqrt{1-x}}{2\sqrt{1+x}} - \frac{\sqrt{1+x}}{2\sqrt{1-x}} \times (-1)}{(\sqrt{1-x})^2} = \frac{(1-x) + (1+x)}{2\sqrt{(1+x)(1-x)^3}} = \frac{1}{\sqrt{(1+x)(1-x)^3}}$$