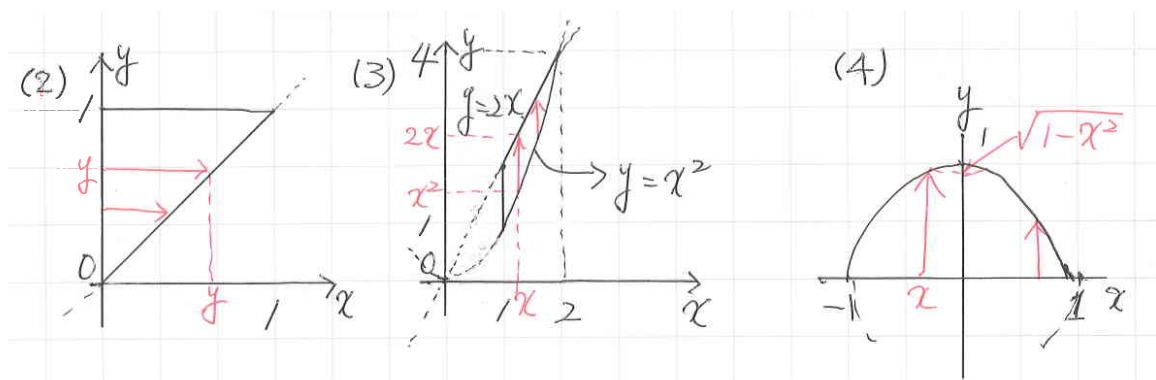


6-1.



$$(1) \int_0^2 e^y dy \int_0^1 2xe^{x^2} dx = \left[e^y \right]_{y=0}^2 \times \left[e^{x^2} \right]_{x=0}^1 = (e^2 - 1)(e - 1) = e^3 - e^2 - e + 1$$

(2) 横線集合 $D_2 = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y\}$ と考えると,

$$\int_0^1 \left\{ \int_0^y \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx \right\} dy = \int_0^1 \left[-\frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \right]_{x=0}^y dy = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{2}y\right) \right) dy = \frac{2}{\pi} \left(1 - \frac{2}{\pi} \right)$$

となる. たて線集合と考えると,

$$\int_0^1 \left\{ \int_x^1 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) dy \right\} dx = \int_0^1 (1-x) \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx$$

を計算することになって, こちらの方が少々面倒である.

(3) たて線集合としての表示が

$$D_3 = \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq 2x\}$$

とできるので,

$$\int_1^2 \left\{ \int_{x^2}^{2x} \frac{y}{x} dy \right\} dx = \int_1^2 \left[\frac{1}{x} \frac{y^2}{2} \right]_{y=x^2}^{2x} dx = \int_1^2 \left(2x - \frac{x^3}{2} \right) dx = \frac{9}{8}$$

となる.

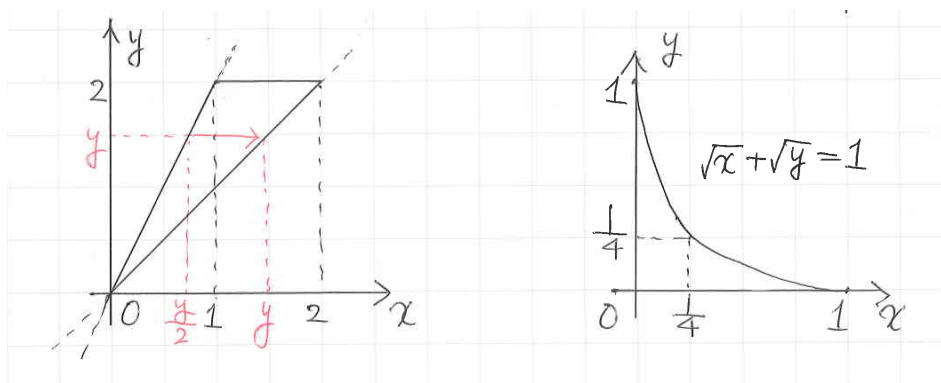
なお, D_3 を横線集合と考えるのは, $0 \leq y \leq 2$ の部分と $2 \leq y \leq 4$ の部分に分けて考えることになり面倒である.

(4) たて線集合 $D_4 = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$ と考えると,

$$\int_{-1}^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2} dy \right) dx = \int_{-1}^1 (1-x^2) dx = \frac{4}{3}$$

となる. 横線集合と考えると, $\int_0^1 \left\{ \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{1-x^2} dx \right\} dy$ と計算することになり面倒. (難しい?)

6-2.



(1) 図を描けば分かるように、たて線集合に書くのは適さない. 横線集合 $D_5 = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 2, \frac{y}{2} \leq x \leq y\}$ と考えると,

$$\iint_{D_5} \sqrt{2xy - y^2} dx dy = \int_0^2 \left\{ \int_{y/2}^y \sqrt{2xy - y^2} dx \right\} dy = \int_0^2 \left[\frac{1}{3y} (2yx - y^2)^{3/2} \right]_{x=y/2}^y dy = \int_0^2 \frac{1}{3y} y^3 dy = \frac{8}{9}.$$

(2) $D_6 = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq (1 - \sqrt{x})^2\}$ とたて線集合の形に書き直せば

$$\iint_{D_6} dx dy = \int_0^1 \left\{ \int_0^{(1-\sqrt{x})^2} dy \right\} dx = \int_0^1 (1 - \sqrt{x})^2 dx = \frac{1}{6},$$

$$\iint_{D_6} y dx dy = \int_0^1 \left\{ \int_0^{(1-\sqrt{x})^2} y dy \right\} dx = \int_0^1 \frac{1}{2} (1 - \sqrt{x})^4 dx = \cdots = \frac{1}{30}.$$

$D_6 = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq (1 - \sqrt{y})^2\}$ と横線集合と考えると, 4 次の展開は不要で

$$\iint_{D_6} y dx dy = \int_0^1 \left\{ \int_0^{(1-\sqrt{y})^2} y dx \right\} dy = \int_0^1 y (1 - \sqrt{y})^2 dy = \frac{1}{30}$$

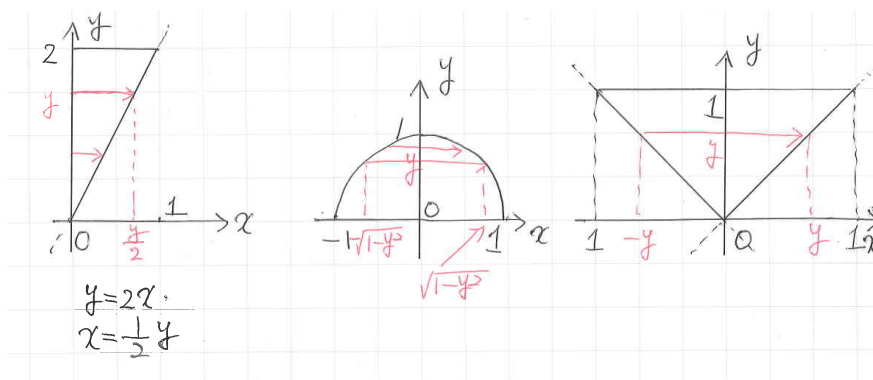
6-3. (1) $D_7 = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta < 2\pi\} = [0, 1] \times [0, 2\pi)$ より,

$$\iint_{D_7} r^2 (\cos^2 \theta + 2 \sin^2 \theta) r dr d\theta = \int_0^1 r^3 \left\{ \int_0^{2\pi} (1 + \sin^2 \theta) d\theta \right\} dr = \frac{3\pi}{4}.$$

(2) $D_8 = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta \leq \pi\} = [0, R] \times [0, \pi]$ より,

$$\int_0^R \left\{ \int_0^\pi e^{-r^2} d\theta \right\} r dr = \pi \int_0^R e^{-r^2} r dr = \pi \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_{r=0}^R = \frac{\pi}{2} (1 - e^{-R^2}).$$

6-4.



(1) 横線集合 $\{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 2, 0 \leq x \leq \frac{1}{2}y\}$ と考えると, $\int_0^2 \left\{ \int_0^{y/2} f(x, y) dx \right\} dy.$

(2) D_4 と同じ積分領域を横線集合 $\{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1, -\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2}\}$ と考えると,

$$\int_0^1 \left\{ \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx \right\} dy.$$

(3) 積分集合を横線集合 $\{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1, -y \leq x \leq y\}$ と考えると, $\int_0^1 \left\{ \int_{-y}^y f(x, y) dx \right\} dy.$