数学演習 B 問題 (解析 1B) No.6

2025 年 12 月 22 日

$\mathbf{R}^2$ の集合で，$\{(x,y)\,|\,a \leqq x \leqq b,\ g_1(x) \leqq y \leqq g_2(x)\}$ の形に表される集合を**たて線集合**，
$\{(x,y)\,|\,c \leqq y \leqq d,\ h_1(y) \leqq x \leqq h_2(y)\}$ の形に表される集合を**横線集合**という.
D がどちらかの形で表されている集合 (境界も含む) で，$f(x,y)$ が D 上の連続関数であれば，
f の D 上の重積分は，

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \Big\{ \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy \Big\} dx \quad \text{または} \quad \int_c^d \Big\{ \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dx \Big\} dy.$$

によって計算される.

- 積分領域を図示し，たて線集合または横線集合としての表示，図示を行って解答すること.
- 表示式が問題に与えられている場合も書き写すこと.

積分領域の図示 (たて線または横線)，表示式のない答案は採点されない．

6-1. 次の重積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\iint_{D_1} 2xe^{x^2+y}dxdy$　　$D_1 = \{(x,y)\,|\,0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 2\}$

(2) $\displaystyle\iint_{D_2} \sin\Big(\frac{\pi}{2}x\Big)dxdy$　　$D_2 = \{(x,y)\ |\ 0 \leqq x \leqq y \leqq 1\}$

(3) $\displaystyle\iint_{D_3} \frac{y}{x}dxdy$　　D_3 は直線 $y = 2x$ と曲線 $y = x^2$ の $1 \leqq x \leqq 2$ の部分及び直線 $x = 1$ で囲まれた図形

(4) $\displaystyle\iint_{D_4} \sqrt{1-x^2}dxdy$　　$D_4 = \{(x,y)\,|\,x^2+y^2 \leqq 1,\ y \geqq 0\}$

6-2. (1) 3 直線 $y = x, y = 2x, y = 2$ で囲まれた部分 (境界も含む) を D_5 とするとき，
$\displaystyle\iint_{D_5} \sqrt{2xy-y^2}dxdy$ の値を求めよ.
(2) $D_6 = \{(x,y)\ |\ x \geqq 0, y \geqq 0, \sqrt{x}+\sqrt{y} \leqq 1\}$ とするとき，$\displaystyle\iint_{D_6} dxdy, \iint_{D_6} ydxdy$ の値を求めよ.
(ヒント：$\sqrt{x}+\sqrt{y} = 1$ で定まる曲線が点 $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ を通ることに注意し，$x+y = 1, x^2+y^2 = 1$ のグラフと比較すると D_6 は分かりやすい．)
(注．一般に，被積分関数が恒等的に 1 のときの重積分 $\displaystyle\iint_D dxdy$ は積分領域 D の面積に等しい．)

6-3. 次の重積分を極座標 (r,θ) に変数変換し，(r,θ) の動く範囲を $r\theta$ 平面に図示して計算せよ.

(1) $\displaystyle\iint_{D_7} (x^2+2y^2)dxdy$　　$D_7 = \{(x,y)\ |\ x^2+y^2 \leqq 1\}$

(2) $\displaystyle\iint_{D_8} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$　　$D_8 = \{(x,y)\ |\ x^2+y^2 \leqq R^2, y \geqq 0\}$　(R は正の定数)

6-4. 積分領域を図示し，横線集合としての表示をして，次の重積分の順序を交換せよ．つまり，
$\displaystyle\int_c^d \Big(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dx \Big) dy$ の形に書き換えよ.

(1) $\displaystyle\int_0^1 \Big\{ \int_{2x}^2 f(x,y)dy \Big\} dx$　　(2) $\displaystyle\int_{-1}^1 \Big\{ \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy \Big\} dx$

(3) $\displaystyle\int_{-1}^0 \Big\{ \int_{-x}^1 f(x,y)dy \Big\} dx + \int_0^1 \Big\{ \int_x^1 f(x,y)dy \Big\} dx$