

数学演習 B 問題 (解析) 略解 No.2

2-1. $f_x = ae^{ax+by} \sin(cy)$ より,

$$(f_x)_y = a \left(be^{ax+by} \sin(cy) + ce^{ax+by} \cos(cy) \right) = a \left(b \sin(cy) + c \cos(cy) \right) e^{ax+by}$$

である. 一方, $f_y = be^{ax+by} \sin(cy) + e^{ax+by} \cdot c \cos(cy) = (b \sin(cy) + c \cos(cy)) e^{ax+by}$ より,

$$(f_y)_x = (b \sin(cy) + c \cos(cy)) \times ae^{ax+by}$$

となり, $(f_x)_y = (f_y)_x$ が成り立つ.

2-2. $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2t}} \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{(x-a)^2}{2t} \right) = -\frac{1}{\sqrt{t}} \frac{x-a}{t} e^{-\frac{(x-a)^2}{2t}}$. 関数の積の微分に関する公式より

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = -\frac{1}{\sqrt{t}} \frac{1}{t} e^{-\frac{(x-a)^2}{2t}} - \frac{1}{\sqrt{t}} \frac{x-a}{t} \frac{\partial}{\partial x} \left(e^{-\frac{(x-a)^2}{2t}} \right) = -\frac{1}{t^{3/2}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2t}} + \frac{1}{\sqrt{t}} \left(\frac{x-a}{t} \right)^2 e^{-\frac{(x-a)^2}{2t}}$$

となる. t に関する偏導関数も, 同様に

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\sqrt{t}} \right) e^{-\frac{(x-a)^2}{2t}} + \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2t}} \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{(x-a)^2}{2t} \right) = -\frac{1}{2t^{3/2}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2t}} + \frac{1}{\sqrt{t}} \frac{(x-a)^2}{2t^2} e^{-\frac{(x-a)^2}{2t}}$$

となる. 比較すると, 主張を得る.

2-3. 偏導関数は, $f_x(x, y) = \frac{-2x/16}{2\sqrt{1-x^2/16-y^2/4}} = -\frac{x}{16z}$, $f_y(x, y) = \frac{-2y/4}{2\sqrt{1-x^2/16-y^2/4}} = -\frac{y}{4z}$ である.

(1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1/4 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$ またはこの定数倍を書けばよい.

(3) 法線ベクトルを $\begin{pmatrix} \ell \\ m \\ n \end{pmatrix}$ とすると, (1),(2) で得たベクトルと直交するので, $\ell - \frac{1}{4}n = 0$ かつ $m - \frac{\sqrt{2}}{2}n = 0$ が成り

立つ. これから, 法線ベクトルとして $\begin{pmatrix} 1 \\ 2\sqrt{2} \\ 4 \end{pmatrix}$ がとれる. したがって, 接平面の方程式は,

$$(x-2) + 2\sqrt{2}(y-\sqrt{2}) + 4\left(z-\frac{1}{2}\right) = 0, \quad x + 2\sqrt{2}y + 4z = 8,$$

または

$$z = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-2) - \frac{\sqrt{2}}{2}(y-\sqrt{2}).$$

どれでも正解である.

2-4. $x + y + \sqrt{2}z = 4$ 前回の問題 1-2 の結果と比較せよ.

2-5. (1) $2h^2 + 8hk + 5k^2 = 2(h+2k)^2 - 3k^2$ より (iii). (2) $2h^2 + 4hk + 5k^2 = 2(h+k)^2 + 3k^2$ より (i). (3) (iii).

2-6. $f_x = \frac{2x}{x^2+y^2}, f_y = \frac{2y}{x^2+y^2}$ であり,

$$f_{xx} + f_{yy} = 2 \frac{(x^2+y^2) - x \cdot (2x)}{(x^2+y^2)^2} + 2 \frac{(x^2+y^2) - y \cdot (2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2(-x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} + \frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} = 0$$

2-7. まず, $\frac{\partial}{\partial x}(xf_x + yf_y) = f_x + xf_{xx} + yf_{yx}$, $\frac{\partial}{\partial y}(xf_x + yf_y) = xf_{xy} + f_y + yf_{yy}$ となる. よって, 高階の偏導関数は偏微分の順序によらないこと, および $(f_{xx} + f_{yy})_x = \frac{\partial}{\partial x}(f_{xx} + f_{yy}) = f_{xxx} + f_{xyy}$ などに注意すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2}(xf_x + yf_y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(xf_x + yf_y) &= \frac{\partial}{\partial x}(f_x + xf_{xx} + yf_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y}(xf_{xy} + f_y + yf_{yy}) \\ &= (f_{xx} + (f_{xx} + xf_{xxx}) + yf_{xxy}) + (xf_{xyy} + f_{yy} + (f_{yy} + yf_{yyy})) \\ &= 2(f_{xx} + f_{yy}) + x(f_{xx} + f_{yy})_x + y(f_{xx} + f_{yy})_y = 2\Delta f + x\frac{\partial}{\partial x}(\Delta f) + y\frac{\partial}{\partial y}(\Delta f) \end{aligned}$$

となる. $\Delta f = 0$ よりこれは 0 である.