

数学演習 B 問題（解析） No.2

2025 年 10 月 13 日

2-1. a, b, c を定数として $f(x, y) = e^{ax+by} \sin(cy)$ とおくと、 $(f_x)_y$ および $(f_y)_x$ を計算してこれらが一致することを示せ.

2-2. $a \in \mathbf{R}$ を定数とし、 $t > 0, x \in \mathbf{R}$ に対して $p(t, x) = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2t}}$ とおくと、 $p(t, x)$ が方程式 $\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$ をみたすことを示せ. (この方程式は熱伝導の方程式と呼ばれる.)

2-3. 関数 $z = f(x, y) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4}}$ が表す曲面 (楕円面の $z \geq 0$ の部分) S を考える.

(1) S 上の曲線 $\begin{cases} z = f(x, y) \\ y = \sqrt{2} \end{cases}$ 上の点 $(x, y, z) = (2, \sqrt{2}, \frac{1}{2})$ における接ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x(2, \sqrt{2}) \end{pmatrix}$ を求めよ.

(2) S 上の曲線 $\begin{cases} z = f(x, y) \\ x = 2 \end{cases}$ 上の点 $(x, y, z) = (2, \sqrt{2}, \frac{1}{2})$ における接ベクトルを一つ求めよ.

(3) S 上の点における接平面の法線ベクトルは、(1),(2) で求めたような一次独立な二つの接ベクトルと直交するベクトルである. S 上の点 $(2, \sqrt{2}, \frac{1}{2})$ における接平面の法線ベクトルを一つ求め、この点における S の接平面の方程式を求めよ.

(ヒント：あるベクトルが考えている平面と直交していれば、その実数倍も平面と直交する.)

2-4. 関数 $z = f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ が表す曲面 (原点中心、半径 2 の球面の $z \geq 0$ の部分) 上の点 $(1, 1, \sqrt{2})$ における接平面の方程式を求めよ.

2-5. 次の (h, k) の 2 次関数が、

- (i) $(h, k) \neq (0, 0)$ ならばつねに正である、
 - (ii) $(h, k) \neq (0, 0)$ ならばつねに負である、
 - (iii) (i),(ii) 以外である (正負の判定はできない)、
- のいずれをみたすか判定せよ. ただし、0 は正でも負でもないことに注意すること.

$$(1) 2h^2 + 8hk + 5k^2 \quad (2) 2h^2 + 4hk + 5k^2 \quad (3) h^2 + 9hk$$

2-6. 何回でも偏微分可能ですべての偏導関数が連続である関数 $f(x, y)$ に対して、 Δf を

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{xx} + f_{yy}$$

によって定める. $f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$ のとき、 Δf を求めよ.

2-7. 何回でも偏微分可能ですべての偏導関数が連続である関数 f が $\Delta f = 0$ をみたせば $g(x, y) = xf_x + yf_y$ も $\Delta g = 0$ をみたすことを示せ.

(ヒント： $(f_x)_y = (f_y)_x$ であること、さらに $((f_x)_x)_y = ((f_x)_y)_x = ((f_y)_x)_x$ などが成り立つことを用いる. f は問題 2-6 の関数とは限らない.)