

フーリエ級数の平均二乗収束定理

青山学院大学 理工学部 数理サイエンス学科

15119094 長嶋元太 西山研究室

2025年2月17日

目次

1	序論	3
1.1	研究の背景	3
1.2	研究の主結果	3
1.3	本論文の構成	4
1.4	謝辞	4
2	フーリエ級数の定義	4
2.1	ディリクレ核と畳み込み	5
2.2	良い核	7
2.3	フーリエ級数のチェザロとアーベルの総和法	8
3	フーリエ級数の平均二乗収束定理	10
3.1	最良近似	10
4	卒研発表会で受けた質問	13
4.1	中田先生	13
5	将来への展望	13
6	参考文献	14

1 序論

1.1 研究の背景

私は卒業研究のセミナーではスタイン・シャカルチの『フーリエ解析入門』[1] をテキストにし、輪講を進めた。テキストの第2章ではフーリエ級数の基本性質と、 f を閉区間 $[0, 2\pi]$ 上のか R 可積分かつ有界な関数として、そのフーリエ級数の定義と収束について学んだ。第3章でフーリエ級数の平均二乗収束について後期の輪講でも学んだ。後期の輪講で学んだことをしっかり理解するためにも、この定理を題材に選んだ。

1.2 研究の主結果

スタイン・シャカルチの『フーリエ解析入門』[1] の用語を踏襲して、本論文では可積分関数とは、 $\mathbb{R}$ 上の可積分かつ有界な関数を意味するものとする。 f を可積分として f のフーリエ係数を

$$\hat{f}(n) = a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) e^{-in\theta} d\theta, \quad (n \in \mathbb{Z})$$

と決める。また

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{inx}$$

と書いて、右辺の級数をフーリエ級数と呼ぶ。ただし右辺の級数は収束しているかどうかはわからない。また $S_N(f)$ を

$$S_N(f)(x) = \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) e^{inx}$$

f のフーリエ級数の第 N 部分和という。

$f(x)$ が連続かつ可積分関数というだけでは f の第 N 部分和 $S_N(f)$ が元の関数 f に各点収束することは期待できない。しかし f が連続で、次の二つの強い条件

- ・ f のフーリエ係数の和が絶対収束する
- ・ f が C^2 級

のうちいずれかを満たせば、 f のフーリエ級数 $S_N(f)$ は f に閉区間 $[0, 2\pi]$ 上絶対かつ一様に収束する。では f が可積分関数という仮定だけなら、どうなるか。その時は平均二乗収束を示すことができる。ときどき閉区間 $[-\pi, \pi]$ で考えることもある。

定理 1.1 (平均二乗収束定理). f を円周上の可積分関数とする。このとき

$$\|f - S_N(f)\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x) - S_N(f)(x)|^2 dx \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty)$$

これは L^2 空間内の距離に関して、 $S_N(f)$ が f に収束していることを表している。この定理を教科書に従って証明することが本論文の主目的である。

1.3 本論文の構成

第二章ではシャカルチ・スタインの『フーリエ解析入門』に記載している、フーリエ級数の平均二乗収束定理を証明するための基本性質を説明する。第三章では第二章で扱った内容を元に、平均二乗収束定理を証明する。また卒研発表であった答えられなかった質問を解決する。また、本論文に携わっていただいた方への謝辞もここに記述する。

1.4 謝辞

卒業研究中間発表会では、私はフーリエ級数の基本性質について発表しました。主にフーリエ級数にまつわる定義と定理について発表しました。卒業研究中間発表会が終わってから、輪講でフーリエ級数の平均二乗収束定理の証明について進めて行きました。西山先生とフーリエ級数の話以前からの、基本知識や公式などを確認させていただいて、理解することができました。西山先生には心から感謝申し上げます。

2 フーリエ級数の定義

定義 2.1. f 閉区間 $[0, 2\pi]$ 上の可積分関数とする.

- f の n 番目のフーリエ係数: $\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx \quad (n \in \mathbb{Z})$
- f のフーリエ級数の第 N 部分和: $S_N(f)(x) = \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) e^{inx}$
- f のフーリエ級数: $f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{inx}$ (収束するとは限らない)

以下 $\hat{f}(n)$ を a_n と書くこともよくある。

次の補題は以下で必要となるので、教科書より引用する。

補題 2.2 ([1], § 2. 補題 3.2). f を閉区間 $[0, 2\pi]$ 上の可積分関数とし、 $|f(x)| \leq B \quad (x \in [0, 2\pi])$ とする。このとき次の二条件を満たす単位円周上の連続関数の列 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ が存在する:

1. $\sup_{x \in [0, 2\pi]} |f_k(x)| \leq B, \quad k = 1, 2, \dots$
2. $\int_0^{2\pi} |f(x) - f_k(x)| dx \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty$

2.1 ディリクレ核と畳み込み

定義 2.3 (第 N ディリクレ核).

$$D_N(x) = \sum_{n=-N}^N e^{inx} \quad (x \in [0, 2\pi], N \geq 0)$$

定義 2.4 (f と g の畳み込み).

$$f, g \in L^1(S^1) \quad (f * g)(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x-y)dy$$

f のフーリエ級数の部分和 $S_N(f)(x)$ は次のように表せる。

$$\begin{aligned} S_N(f)(x) &= \sum_{n=-N}^N \widehat{f}(n)e^{inx} = \sum_{n=-N}^N \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y)e^{-iny}dy \right) e^{inx} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \left(\sum_{n=-N}^N e^{in(x-y)} \right) dy = (f * D_N)(x) \end{aligned}$$

命題 2.5. $f, g, h \in L^1(S^1)$

1. $f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$ (分配律) $f, g, h \in L^1(S^1)$
2. $(cf) * g = c(f * g) = f * (cg)$ ($c \in \mathbb{C}$)
3. $f * g = g * f$ (可換律)
4. $(f * g) * h = f * (g * h)$ (結合律)
5. $f * g$ は連続
6. $\widehat{f * g}(n) = \widehat{f}(n)\widehat{g}(n)$ ($n \in \mathbb{Z}$)

[証明]. (1), (2) は積分の線形性からわかる。(3) ~ (6) を証明する。
(3)

$$\begin{aligned} (f * g)(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x-y)dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(-y)g(x+y)d(-y) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x-y)g(y)dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(y)f(x-y)dy = (g * f)(x) \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}
((f * g) * h)(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f * g)h(x - y)dy \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(z)g(y - z)dz \right) h(x - y)dy \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(z)g(y - z)h(x - y)dzdy \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} f(z) \left(\int_{-\pi}^{\pi} g(y - z)h(x - y)dy \right) dz \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(z) \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t)h(t - x - z)dt \right) dz \\
&= (f * (g * h))(x)
\end{aligned}$$

(5) g は連続で周期 2π の関数なので g は $\mathbb{R}$ 全体で一様連続であることに注意する。そこで $\forall \epsilon > 0$ になおして $|g(z) - g(w)| < \epsilon$ となるように δ をとっておく。このとき $|x_1 - x_2| < \delta$ ならば

$$\begin{aligned}
|(f * g)(x_1) - (f * g)(x_2)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y)(g(x_1 - y) - g(x_2 - y))dy \right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(y)| \left| (g(x_1 - y) - g(x_2 - y)) \right| dy < \frac{\epsilon}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(y)| dy
\end{aligned}$$

これが $\forall \epsilon > 0$ が成立するので、 $f * g$ は一様連続である。

(6)

$$\begin{aligned}
\widehat{f * g}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f * g)(x) e^{-inx} dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x - y)dy \right) e^{-inx} dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x - y)e^{-inx} dy dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \int_{-\pi}^{\pi} g(x - y)e^{-inx} dx dy \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} f(y)e^{-iny} \left(\int_{-\pi}^{\pi} g(x - y)e^{-in(x - y)} dx \right) dy \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y)e^{-iny} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x)e^{-inx} dx \right) dy \\
&= \widehat{f}(n)\widehat{g}(n)
\end{aligned}$$

□

2.2 良い核

定義 2.6. 閉区間 $[0, 2\pi]$ 上の関数の列 $\{K_n\}_{n=1}^\infty$ は、次の 3 つの性質を持つとき、良い核の列であるという

1. $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K_n(x) dx = 1 \quad (n = 1, 2, \dots)$
2. $\exists M \quad \text{s.t.} \quad \int_{-\pi}^{\pi} |K_n(x)| dx \leq M \quad (n = 1, 2, \dots)$
3. $\forall \delta > 0 \quad \int_{\delta \leq |x| \leq \pi} |K_n(x)| dx \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$

ディリクレ核 $\{K_N\}_{N=1}^\infty$ は良い核の列の例である。

定理 2.7. K_n : 良い核の列, $f \in L^1(S^1)$ のとき、次が成り立つ：

1. f が点 x で連続 $\implies \lim_{n \rightarrow \infty} (f * K_n)(x) = f(x)$
2. $f \in C^0(S^1) \implies f * K_n \implies f \quad (n \rightarrow \infty)$

[証明]. 証明：1 の仮定より、 f の x における連続性より

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \quad \text{s.t.} \quad |y| < \delta \implies |f(x - y) - f(x)| < \epsilon$$

が成り立つ。これを使って積分を評価しよう。

$$\begin{aligned} |(f * K_n)(x) - f(x)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(y) f(x - y) dy - f(x) \right| \\ &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(y) (f(x - y) - f(x)) dy \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |K_n(y)| |f(x - y) - f(x)| dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{|y| < \epsilon} |K_n(y)| |f(x - y) - f(x)| dy \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{\epsilon \leq |y| \leq \pi} |K_n(y)| |f(x - y) - f(x)| dy \end{aligned}$$

定数 B を $|f(x)| \leq B$ となるようにとると

$$\begin{aligned} &\leq \frac{\epsilon}{2\pi} \int_{|y| < \epsilon} |K_n(y)| dy + \frac{B}{\pi} \int_{\epsilon \leq |y| \leq \pi} |K_n(y)| dy \\ &\leq \frac{M}{2\pi} \epsilon + \frac{B}{\pi} \int_{\epsilon \leq |y| \leq \pi} |K_n(y)| dy \rightarrow \frac{M}{2\pi} \epsilon \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

ϵ は正の任意なので、 $\lim_{n \rightarrow \infty} (f * K_n)(x) = f(x)$ が成り立つことがわかった。

2 は難しいので、省略する。

□

2.3 フーリエ級数のチェザロとアーベルの総和法

定義 2.8 (チェザロ平均). 数列 $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ に対して $S_n = \sum_{k=0}^n c_k$ とおく。

$$\sigma_N = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} S_n$$

をチェザロ平均という。 σ_N が $N \rightarrow \infty$ で収束するとき、 S_n はチェザロ総和可能という。

以下 $\sigma_N(f) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} S_n(f)$ とおく。

定義 2.9 (第 N フェイエル核).

$$F_N(x) := \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} D_n(x)$$

補題 2.10. $f \in L^1(S^1)$ に対して、 $\sigma_N(f)(x) = f * F_N(x)$ が成り立つ。

[証明].

$$\begin{aligned} \sigma_N(f)(x) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} S_n(f)(x) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (f * D_n(x)) \\ &= f * \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} D_n(x) = f * F_N(x) \end{aligned}$$

□

補題 2.11. $F_N(x) = \frac{1}{N} \frac{\sin^2(\frac{Nx}{2})}{\sin^2(\frac{x}{2})}$ と表される。

[証明].

$$NF_N(x) = \sum_{n=0}^{N-1} D_n(x) = \sum_{n=0}^{N-1} \left(\sum_{k=-n}^n e^{ikx} \right) = \sum_{n=0}^{N-1} \left(\sum_{k=-n}^n \omega^k \right) = \sum_{n=0}^{N-1} \left(\sum_{k=-n}^{-1} \omega^k + \sum_{k=0}^n \omega^k \right)$$

1. $\omega = 1$ のとき

$$\sum_{n=0}^{N-1} \left(\sum_{k=-n}^{-1} \omega^k + \sum_{k=0}^n \omega^k \right) = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=-n}^n 1 = N^2$$

2. $\omega \neq 1$ のとき

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} \left(\sum_{k=-n}^{-1} \omega^k + \sum_{k=0}^n \omega^k \right) &= \frac{1}{(\omega^{\frac{1}{2}} - \omega^{-\frac{1}{2}})^2} \times (\omega^{\frac{N}{2}} - \omega^{-\frac{N}{2}})^2 \\ &= \frac{1}{\frac{\omega^{\frac{1}{2}} - \omega^{-\frac{1}{2}}}{2}} \times \frac{\omega^{\frac{N}{2}} - \omega^{-\frac{N}{2}}}{2} = \frac{\sin^2(\frac{Nx}{2})}{\sin^2(\frac{x}{2})} \end{aligned}$$

□

定理 2.12. フェイエル核は良い核である

[証明]. 定義 1.10 の 3 つの性質を確かめる。

$$\begin{aligned}
 1. \quad & \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_N(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} D_n(x) dx = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} 1 = 1 \\
 2. \quad & \int_{-\pi}^{\pi} |F_N(x)| dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} D_n(x) \right| dx \\
 & \leq \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |D_n(x)| dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left| \sum_{k=-n}^n e^{ikx} \right| dx \\
 & \leq \frac{1}{N} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=0}^{N-1} \left(\sum_{k=0}^n |e^{ikx}| \right) dx = \frac{1}{N} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=0}^{N-1} \left(\sum_{k=-n}^n 1 \right) dx \\
 & = 2\pi N^2 \times \frac{1}{N} = 2\pi N \leq M \quad (M \leq 2\pi N)
 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
 & \exists C_\delta \quad \text{s.t.} \quad \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \geq C_\delta (> 0) \quad (\delta \leq |x| \leq \pi) \\
 & F_N(x) = \frac{1}{N} \frac{\sin^2\left(\frac{Nx}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} \leq \frac{1}{N} \frac{\sin^2\left(\frac{Nx}{2}\right)}{C_\delta} \leq \frac{1}{NC_\delta} \\
 & \int_{\delta \leq |x| \leq \pi} \frac{1}{N} \frac{\sin^2\left(\frac{Nx}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} dx \leq \int_{\delta \leq |x| \leq \pi} \frac{1}{NC_\delta} dx \leq \frac{2\pi}{NC_\delta} \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty)
 \end{aligned}$$

よって、フェイエル核は良い核である。

□

定理 2.13 (フェイエルの定理). f を閉区間 $[0, 2\pi]$ 上の可積分関数とする。 f のフーリエ級数は、 f が連続である点で、 f にチェザロ総和可能である。とくに、 f が閉区間 $[0, 2\pi]$ 上で連続ならば、 f のフーリエ級数は f に一様にチェザロ総和可能である。

[証明]. f が x において連続であるとする。 $\{F_N\}$ は良い核なので、定理 2.7 より

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (f * F_N)(x) = f(x)$$

$$\sigma_N(f)(x) = (f * F_N)(x)$$

だったので、 f のフーリエ級数は x において f にチェザロ総和可能である。一様性については省略する。

□

系 2.14. 閉区間 $[0, 2\pi]$ 上の任意の連続関数は、三角多項式によって一様に近似できる。すなわち、 f が閉区間 $[0, 2\pi]$ 上の連続関数で、 $f(-\pi) = f(\pi)$ ならば、任意の $\epsilon > 0$ に対して

$$|f(x) - P(x)| < \epsilon \quad (0 \leq x \leq 2\pi)$$

を満たす三角多項式 P が存在する

[証明]. フーリエ級数の部分和は三角多項式だから、そのチェザロ平均も三角多項式である。よって、この系はフェイェールの定理から証明できる $\square$

3 フーリエ級数の平均二乗収束定理

3.1 最良近似

系 3.1 (系 $\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ の正規直交性). 各整数 n に対して、 $n \in \mathbb{Z}$ 、 $e_n(\theta) = e^{in\theta}$ とおくと、 $e_n \in L^2(S^1)$ であって、系 $\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ は $L^2(S^1)$ の正規直交基底である

1. $n = m$ のとき:

$$(e_n, e_n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e_n(\theta) \overline{e_n(\theta)} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{in\theta} \overline{e^{in\theta}} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |e^{in\theta}|^2 d\theta = 1$$

2. $n \neq m$ のとき:

$$(e_n, e_m) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e_n(\theta) \overline{e_m(\theta)} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{in\theta} \overline{e^{im\theta}} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta} d\theta = 0$$

フーリエ係数は f と正規直交系 $\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ の元との内積で表される。

$$(f, e_n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \overline{e^{in\theta}} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) e^{-in\theta} d\theta = \hat{f}(n) = a_n$$

また $S_N(f)$ は

$$S_N(f)(\theta) = \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) e^{in\theta} = \sum_{n=-N}^N a_n e_n \quad (N \in \mathbb{N})$$

と書ける。このとき系 $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ の正規直交性と $a_n = (f, e_n)$ であることより、 $\forall b_n \in \mathbb{C}$ に対して

$$\left(f - \sum_{n=-N}^N a_n e_n\right) \perp \sum_{n=-N}^N b_n e_n$$

となる。

補題 3.2. f を可積分関数、 $S_N(f)$ を f のフーリエ級数の第 N 部分和とする。このとき $f - S_N(f)$ と $S_N(f)$ は L^2 空間 $L^2[0, 2\pi]$ において直行する。

[証明]. 内積がゼロであることを、計算によって示せばよい。

$$\begin{aligned}
(f - S_N(f), S_N(f)) &= (f - \sum_{n=-N}^N a_n e_n, \sum_{n=-N}^N a_n e_n) \\
&= (f, \sum_{n=-N}^N a_n e_n) - (\sum_{n=-N}^N a_n e_n, \sum_{n=-N}^N a_n e_n) \\
&= (f, \sum_{n=-N}^N (f, e_n) e_n) - \sum_{n=-N}^N \sum_{k=-N}^N (a_n e_n, a_k e_k) \\
&= \sum_{n=-N}^N \overline{a_n} (f, e_n) - \sum_{n=-N}^N |a_n|^2 = \sum_{n=-N}^N (\overline{a_n} a_n - |a_n|^2) \\
&= |a_n|^2 - |a_n|^2 = 0
\end{aligned}$$

より $(f - S_N(f)) \perp S_N(f)$ となる。 □

補題 3.3 (最良近似). f を閉区間 $[0, 2\pi]$ 上の可積分関数とする。このとき、 $\forall c_n \in \mathbb{C}$ ($-N \leq n \leq N$) に対して次の不等式が成り立つ。

$$\|f - S_N(f)\| \leq \left\| f - \sum_{n=-N}^N c_n e_n \right\|$$

等号が成り立つのは、 $c_n = a_n$ ($\forall n, |n| \leq N$) のときに限る。

[証明]. $a_n - c_n = b_n$ とする

$$\begin{aligned}
f - \sum_{n=-N}^N c_n e_n &= f - \sum_{n=-N}^N a_n e_n + \sum_{n=-N}^N a_n e_n - \sum_{n=-N}^N c_n e_n \\
&= f - \sum_{n=-N}^N a_n e_n + \sum_{n=-N}^N (a_n - c_n) e_n = f - \sum_{n=-N}^N a_n e_n + \sum_{n=-N}^N b_n e_n
\end{aligned}$$

系 $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ の正規直交性と $a_n = (f, e_n)$ であることより、 $(f - \sum_{n=-N}^N a_n e_n) \perp b_n e_n$ が成り立つので、ピタゴラスの定理より

$$\left\| f - \sum_{n=-N}^N c_n e_n \right\|^2 = \left\| f - \sum_{n=-N}^N a_n e_n \right\|^2 + \left\| \sum_{n=-N}^N b_n e_n \right\|^2 \geq \left\| f - \sum_{n=-N}^N a_n e_n \right\|^2$$

□

定理 3.4 (平均二乗収束定理). f を円周上の可積分関数とする。このとき

$$\|f - S_N(f)\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x) - S_N(f)(x)|^2 dx \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty)$$

[証明]. f が連続のときに示す。系 2.14 より、

$$\exists P(x) = \sum_{n=-N}^N c_n e_n \quad \text{s.t.} \quad |f(\theta) - P(\theta)| < \epsilon, \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

最良近似の補題 3.3 から、 N を $P(x)$ にあわせて十分下にとれば

$$\begin{aligned} \|f - S_N(f)\|^2 &\leq \left\| f - \sum_{n=-N}^N c_n e_n \right\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\theta) - P(\theta)|^2 d\theta \\ &< \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \epsilon^2 d\theta = \epsilon^2 \end{aligned}$$

$\epsilon > 0$ は任意なので

$$\|f - S_N(f)\|^2 \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty)$$

が分かる。次に f が閉区間 $[0, 2\pi]$ 上の任意の可積分関数のときに考える。補題 2.2 の連続間数列 f_k をとって、 k を十分下にすれば

$$\int_0^{2\pi} |f(\theta) - f_k(\theta)| d\theta < \epsilon$$

となる。この f_k を $g(\theta)$ とする。また $g(\theta)$ は連続関数なので三角多項式 $P(\theta)$ が存在して、

$$\|g - P\| < \epsilon, \quad \sup |g(\theta)| \leq \sup |f(\theta)| \leq B$$

を満たす。

$$\int_0^{2\pi} |f(\theta) - g(\theta)|^2 d\theta \leq \int_0^{2\pi} 2B |f(\theta) - g(\theta)| d\theta = 2B \int_0^{2\pi} |f(\theta) - g(\theta)| d\theta < 2B\epsilon$$

$$\therefore \|f - g\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\theta) - g(\theta)|^2 d\theta < \frac{B}{\pi} \epsilon^2$$

一方最良近似補題 3.3 より十分大きな N になおして、 $\|f - S_N(f)\| \leq \|f - P\|$ だから、

$$\begin{aligned} \|f - S_N(f)\| &\leq \|f - P\| = \|f - g + g - P\| \\ &\leq \|f - g\| + \|g - P\| < \sqrt{\frac{B}{\pi}} \epsilon + \epsilon \end{aligned}$$

ϵ は任意だから

$$\|f - S_N(f)\| \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty)$$

これで定理は証明された。 □

系 3.5 (プランシエルの定理). f が可積分のとき $\|f\|^2 = \sum_{n=-N}^N |\hat{f}(n)|^2$ が成り立つ。

[証明]. $(f - S_N(f)) \perp S_N(f)$ なので、ピタゴラスの定理より

$$\|f\|^2 = \|f - S_N(f)\|^2 + \|S_N(f)\|^2.$$

$N \rightarrow \infty$ とすると、 $\|f - S_N(f)\| \rightarrow 0$ であって、

$$\|S_N(f)\|^2 \rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2$$

となり証明できた。 □

4 卒研発表会で受けた質問

4.1 中田先生

Q. 系 $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ の正規直交性と $a_n = (f, e_n)$ であることより、 $\forall b_n \in \mathbb{C}$ に対して

$$(f - \sum_{n=-N}^N a_n e_n) \perp \sum_{n=-N}^N b_n e_n$$

は成立するのか。

答：成立します。以下にその証明を書きます。

[証明]. A. $(f - \sum_{n=-N}^N a_n e_n) \perp e_k$ を確かめればよい ($-N \leq k \leq N$)

$$(f - \sum_{n=-N}^N a_n e_n, e_k) = (f, e_k) - (a_{-N}e_{-N} + a_{-N+1}e_{-N+1} + \cdots + a_{N-1}e_{N-1} + a_N e_N, e_k)$$

系 2.7 より、系 $\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ は正規直交基底なので

$$(f - \sum_{n=-N}^N a_n e_n, e_k) = (f, e_k) - (f, e_k) = a_k - a_k = 0$$

□

5 将来への展望

本研究では、フーリエ級数をはじめとする数学の基本的な用語の定義などの知識不足を西山先生の下で学びながら研究を進めた。特に、数学的な厳密さを保ちながら理論を展開することの重要性を認識し、西山先生のご指導のもとで学びを深めることができた。本研究を通じて得た知識や考察の多くを本論文にまとめることで、今後の西山研究室における研究活動の一助となれば幸いである。

また、一年間にわたり輪講において熱心にご指導くださった西山先生には、心より深く感謝申し上げます。研究の過程で貴重なアドバイスをくださったメンターの飛鳥さんや、議論を交わしながら共に学びを深めた研究室の仲間にも、改めて感謝の意を表したい。さらに、卒業研究発表会において鋭いご質問や貴重なご助言をくださった松田先生、中田先生にも、心より御礼申し上げます。

6 参考文献

References

- [1] E.M. スタイン、R. シャカルチ (新井仁之他訳) 『フーリエ解析入門』 日本評論社, 2007.