

一次分数変換による円と点の配置

青山学院大学 理工学部 数理サイエンス学科

西山研究室

学籍番号:15A21024

鎌倉 有梨

2024 年 2 月 20 日

目次

1	序	3
1.1	研究の背景	3
1.2	研究の主結果	3
1.3	本論文の構成	4
2	一次分数変換	6
2.1	一次分数変換の定義	6
2.2	行列との対応	8
2.3	一次分数変換の重要な定理	10
3	円と点の配置	17
3.1	単位円板を保存する一次分数変換	17
3.2	研究テーマ 1 (円と点の配置問題)	18
3.3	研究テーマ 2	20
3.4	研究テーマ 3	21
3.5	研究テーマ 4 (2 つの円の配置問題)	23
4	最後に	28
4.1	卒研発表会での質問	28
4.2	今後の課題	28
4.3	謝辞	28

1 序

1.1 研究の背景

私がこの研究テーマに興味をもったきっかけは、一次分数変換が引き起こす円円対応について学んだ際に、円は円に必ず移るが、円の中心は必ずしも円の中心に対応しているわけではないということがおもしろいと感じたことである。そこで私は、一次分数変換による円と点の配置について調べることにした。研究を進めるにあたって、教科書として野村隆昭『複素関数論講義』[1]で学習をした。この論文で紹介する定義や定理は、参考文献[1], [4], [5]から多く引用している。また、参考文献[2], [3], [6]も定理を証明することや結果の理解を深めることに役立った。

研究を進める中で、具体的な計算をしなくとも考え方次第で予想することができることを学んだ。その方法を身につけて紹介することが、この研究のポイントであると感じている。

1.2 研究の主結果

一次分数変換とは、

$$\phi: \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \left\{\frac{a}{c}\right\} \quad \phi(z) := \frac{az+b}{cz+d} \quad (a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad-bc \neq 0)$$

の形をした有理関数による写像である。この論文では、複素平面 $\mathbb{C}$ に無限遠点 $\{\infty\}$ を追加したリーマン球面 $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 上で考える。また、全体を集めたものは群になって、記号で $PSL(2, \mathbb{C})$ と表す。

一次分数変換は、円を円に写すという性質をもち、これを円円対応と呼んでいる。ただし、複素平面上の直線も無限遠点を通る円とみなすことにする。一次分数変換の円円対応の性質を使って、円や点の写り方を考え、円と点の対応について考察した。

任意の円を単位円に写すことが可能であることはよく知られている。そこで、単位円板を単位円板に写すような一次分数変換

$$f(z) = e^{i\theta} \frac{z-\gamma}{1-\bar{\gamma}z} \quad (|\gamma| < 1, \theta \in \mathbb{R})$$

に焦点を当てた。その全体は群となり、記号で $PSU(1, 1)$ と表す。

この論文の主結果は、以下の3つの定理と、2つの結果である。

定理 1.1 (定理 3.3). 単位円板を保存する一次分数変換 f で、単位円板内の任意の点 α を、単位円板内の任意の点 β に写すようなものが存在し、

$$f(z) = \frac{(\bar{\alpha}\beta - 1)z + \alpha - \beta}{(\bar{\alpha} - \bar{\beta})z + \alpha\bar{\beta} - 1}$$

と書ける。

定理 1.2 (定理 3.4). 円とその円上にない 1 点の任意の 2 組は、すべて一次分数変換で写りあう。

定理 1.3 (定理 3.5). 単位円板を保存する一次分数変換 f で、単位円板内の任意の 2 点 α, u を、それぞれ単位円板内の任意の 2 点 β, v に写すようなものが存在するための必要十分条件は、

$$\left| \frac{\alpha - u}{\bar{\alpha}u - 1} \right| = \left| \frac{\beta - v}{\bar{\beta}v - 1} \right|$$

である。

他にも問題を考えてみたので、その結果を挙げる。

[研究テーマ 3]

三角形の内心と垂心の一次分数変換による像を考えた。三角形を一次分数変換で写すと、各辺は円弧になり、円弧を辺とするような円弧三角形になる。また角の二等分線や垂線などの直線も同じように円に写る。

一次分数変換の等角性を保つという性質より、三角形の五心のうち内心と垂心については角度から定義が定まっているため一次分数変換による像を考えることができる。内心や垂心を定めるために必要な角の二等分線や垂線も 3 つの円に写され、内心や垂心の像として 1 点で交わることが分かった。

[研究テーマ 4]

円と円、2 つの円の配置についての問題を考えた。互いに交わらない 2 つの円について、一方を単位円に写すような一次分数変換で写したとき、もう一方は単位円と同心円になるような円に写すことができそうであることが分かった。ただし、その同心円の半径は決まってしまうと予想される。実際に 2 つの円の写り方を計算によって求めるのことは大変だが、考え方を工夫することで写り方を考えることができた。

1.3 本論文の構成

第 2 章では、一次分数変換について学んだことをまとめ、定義から性質まで説明する。

第 3 章では、実際に考えた問題を紹介する。任意の円は単位円に写すことが可能なため、単位円板を保存するような一次分数変換を中心に、円と点の配置について考えた問題を 2 つ紹介する。また、一次分数変換の等角性を保つという性質より考えたことを 2 つ紹介する。

最後に第 4 章には、卒研発表会でいただいた質問と今後の課題をまとめた。

2 一次分数変換

2.1 一次分数変換の定義

定義 2.1. 次の形をした有理関数による写像 $\phi: \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{\frac{a}{c}\}$ ($c \neq 0$ のとき)

$$\phi(z) := \frac{az + b}{cz + d} \quad (a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc \neq 0) \quad (2.1)$$

を一次分数変換という。

複素平面 $\mathbb{C}$ から複素平面 $\mathbb{C}$ への写像として考えると、2つの問題が生じる。

分母である $cz + d$ が 0 であるとき、すなわち $z = -\frac{d}{c}$ のときに定義することができないことと、 ϕ の像でない点 $\frac{a}{c}$ が存在するという問題である。そのため、ここではひとまず $-\frac{d}{c}$ と $\frac{a}{c}$ の点を除いた写像 $\phi: \mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{\frac{a}{c}\}$ として定義している。この問題を解決するためにリーマン球面を導入したい。

リーマン球面は、複素平面 $\mathbb{C}$ と $\{\infty\}$ を合わせたものである。これを単位球面として実現する。その方法を立体射影という。

- 立体射影の方法 [参考文献 [6]]

XYZ 座標空間内に中心 $(0, 0, 0)$ 、半径 1 の単位球面を用意し、その北極にあたる点を $N(0, 0, 1)$ とする。まず、 XY 平面と複素平面 $\mathbb{C}$ を同一視する。次に、北極 N と複素平面 $\mathbb{C}$ ($= XY$ 平面) 上の点 $z = x + iy$ を直線で結ぶと、北極以外のもう一つの点 $P(X, Y, Z)$ で単位球面と交わる。この $P(X, Y, Z)$ を z に対応させ、対応 $z \leftrightarrow (X, Y, Z)$ を立体射影による対応という。この対応で北極 N 以外の点は複素平面 $\mathbb{C}$ と一対一に対応するが、北極 N だけは対応する点がない。そこで、北極 N を無限遠点と呼んで ∞ で表す。このようにして得られた単位球面をリーマン球面という。

リーマン球面は今後、 $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ で表す。

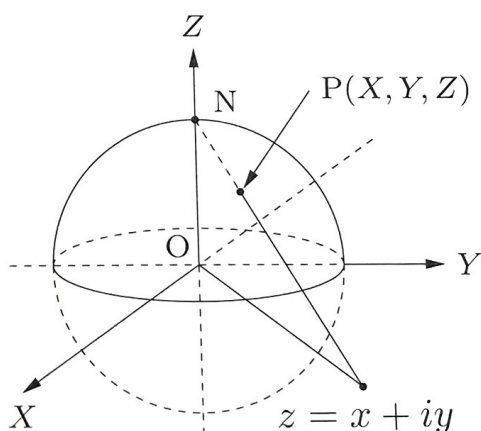


図1 リーマン球面 (参考文献 [1] より)

一次分数変換 (2.1) は、リーマン球面 $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ からそれ自身への写像 $\phi: \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ として、次のように再定義される。

- $c \neq 0$ のとき

$$\begin{cases} \phi(z) &= \frac{az+b}{cz+d} & (z \neq \infty, -\frac{d}{c}) \\ \phi(-\frac{d}{c}) &= \infty \\ \phi(\infty) &= \frac{a}{c} \end{cases}$$

- $c = 0$ のとき $\phi(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$ は $\mathbb{C}$ から $\mathbb{C}$ への全単射である。 ∞ だけが決まっていないが、

$$\phi(\infty) = \infty$$

と定義する。

複素平面 $\mathbb{C}$ とリーマン球面 $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ の部分集合の対応を、以下の表 1 にまとめる。

複素平面 $\mathbb{C}$	リーマン球面 $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$
単位円 S^1	赤道
単位円板 $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \mid z < 1\}$	南半球
$\{z \in \mathbb{C} \mid z > 1\} \cup \{\infty\}$	北半球
0	南極 $S = (0, 0, -1)$
∞	北極 $N = (0, 0, 1)$

表 1 複素平面とリーマン球面の対応

一次分数変換の逆変換は、 $\phi^{-1}(w) = \frac{dw - b}{-cw + a}$ である。導出は、 $w = \frac{az + b}{cz + d}$ として、 z について解けばよい。

$$\begin{aligned}
w(cz + d) &= az + b \\
cwz - az &= b - dw \\
z &= \frac{b - dw}{cw - a} = \frac{dw - b}{-cw + a}
\end{aligned}$$

$a = d, b = -b, c = -c, d = a$ と考えれば、逆変換も一次分数変換であることが分かる。

また、逆写像をもつことから一次分数変換は全単射であることも分かる。

2.2 行列との対応

命題 2.2. 2 次正方行列 (可逆行列) であって、行列式が 1 である行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (\det A = 1)$$

に対して、一次分数変換 $\phi_A(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ を対応させると $\phi_{AB} = \phi_A \circ \phi_B$ が成り立つ。つまり、行列の積と一次分数変換の合成が対応する。

証明. 行列 A, B を

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{C})$$

とおく。行列の積は、

$$AB = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + bb' & ab' + bd' \\ a'c + c'd & b'c + dd' \end{pmatrix}$$

である。

行列の積に一次分数変換を対応させると

$$\phi_{AB}(z) = \frac{(aa' + bb')z + (ab' + bd')}{(a'c + c'd)z + (b'c + dd')}$$

である。

次に、一次分数変換 $\phi_A(z)$, $\phi_B(z)$ を

$$\phi_A(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad \phi_B(z) = \frac{a'z + b'}{c'z + d'}$$

とおくと、その合成は

$$\begin{aligned} \phi_A \circ \phi_B = \phi_A(\phi_B(z)) &= \frac{a(\phi_B(z)) + b}{c(\phi_B(z)) + d} = \frac{a \frac{a'z + b'}{c'z + d'} + b}{c \frac{a'z + b'}{c'z + d'} + d} \\ &= \frac{a(a'z + b') + b(c'z + d')}{c(a'z + b') + d(c'z + d')} = \frac{(aa' + bb')z + (ab' + bd')}{(a'c + c'd)z + (b'c + dd')} = \phi_{AB}(z) \end{aligned}$$

である。よって一次分数変換は、行列の積と対応することが分かった。 $\square$

一次分数変換の全体は、

$$SL(2, \mathbb{C}) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) \mid \det A = 1 \right\} \quad : \quad \text{特殊線形群}$$

を構成している。また、 $A \in SL(2, \mathbb{C})$ に対して、 $\{\pm A\}$ は同じ一次分数変換を表す。そこで $SL(2, \mathbb{C})$ の元のうち $\{\pm A\}$ を同一視したものを射影特殊線形群といい、

$$PSL(2, \mathbb{C}) = \left\{ f : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \mid f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, (a, b, c, d \in \mathbb{C}), (ad - bc \neq 0) \right\}$$

で表す。

$A \in SL(2, \mathbb{C})$ に対して、 $\{\pm A\}$ が同じ一次分数変換を表すのかを以下で確認する。

2つの一次分数変換を $\frac{az + b}{cz + d}, \frac{a'z + b'}{c'z + d'} \in PSL(2, \mathbb{C})$ とおく。

$$\frac{az + b}{cz + d} = \frac{a'z + b'}{c'z + d'}$$

$$(az + b)(c'z + d') = (a'z + b')(cz + d)$$

$$ac'z^2 + ad'z + bc'z + bd' = a'cz^2 + a'dz + b'cz + b'd$$

$$(ac' - a'c)z^2 + (ad' + bc' - a'd - b'c)z + (bd' - b'd) = 0 \quad (\forall z \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$$

上式が恒等的に成り立つためには、

$$\begin{cases} ac' - a'c = 0 \\ ad' + bc' - a'd - b'c = 0 \\ bd' - b'd = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

の条件が必要である。(2.2) の 1 番目の式より、 $ac' = a'c$, $a : a' = c : c'$ だから、 $\frac{a'}{a} = \frac{c'}{c} = k$ とおくと、 $ba' = kb$, $a' = kd$ で書ける。同様に (2.2) の 3 番目の式より、 $bd' = b'd$, $b : b' = d : d'$ だから、 $\frac{b'}{b} = \frac{d'}{d} = l$ とおくと、 $b' = lb$, $d' = ld$ で書ける。よって、(2.2) の 2 番目の式に代入すると、

$$\begin{aligned} ad' + bc' - a'd - b'c &= 0 \\ kad + lbc - ald - bkc &= 0 \\ k(ad - bc) + l(bc - ad) &= 0 \\ (k - l)(ad - bc) &= 0 \\ ad - bc \neq 0 \text{ より } k &= l \end{aligned}$$

である。

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C}) \text{ なので } \det \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} = k^2 = 1 \quad \therefore k = \pm 1$$

ゆえに、 $\{\pm A\}$ を同一視してよい。

2.3 一次分数変換の重要な定理

ここからは、これから用いたい一次分数変換に関する様々な定理を説明する。

2.3.1 一次分数変換の分解

定理 2.3. 一次分数変換 $\phi(z)$ は次の 3 つのタイプの変換の合成である。

1. 平行移動： $w = z + \alpha$ ($\alpha \in \mathbb{C}$)
2. 定数倍： $w = \gamma z$ ($\gamma \neq 0, \gamma \in \mathbb{C}$)
3. 反転： $w = \frac{1}{z}$ (原点を中心とする)

定数倍については、 $\gamma = re^{i\theta}$ と書けるので、回転と相似変換の組み合わせとして考えられる。

証明. ・ $c = 0$ のとき

$$\frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$$

例えば、 $f_1 = z + \frac{b}{d}$ ($z + \alpha$; $\alpha = \frac{b}{d}$), $f_2 = \frac{a}{d}z$ (γz ; $\gamma = \frac{a}{d}$) とおくと

$$f_1 \circ f_2(z) = f_1(f_2(z)) = f_2(z) + \frac{b}{d} = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$$

・ $c \neq 0$ のとき

$$\begin{aligned} az + b &= \frac{a}{c}(cz + d) + \left(b - \frac{ad}{c}\right) \text{ より、} \\ \frac{az + b}{cz + d} &= \frac{a}{c} + \left(\frac{b}{cz + d} - \frac{ad}{c(cz + d)}\right) \\ &= \frac{a}{c} - \frac{1}{c} \frac{ad - bc}{cz + d} \\ &= \frac{a}{c} - \frac{ad - bc}{c^2} \frac{1}{z + \frac{d}{c}} \end{aligned}$$

例えば、 $f_3(z) = z + \frac{d}{c}$, $f_4(z) = \frac{1}{z}$, $f_5(z) = -\frac{ad - bc}{c}z$, $f_6(z) = z + \frac{a}{c}$ とおくと

$$(f_6 \circ f_5 \circ f_4 \circ f_3)(z) = \frac{a}{c} - \frac{ad - bc}{c^2} \frac{1}{z + \frac{d}{c}} = \frac{az + b}{cz + d}$$

よって、一次分数変換は、平行移動・定数倍・反転の合成である。 □

2.3.2 円円対応

定理 2.4. 一次分数変換は、 $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ 上の円を $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ 上の円に写す。

注意：複素平面 $\mathbb{C}$ 上の直線は、無限遠点 ∞ を通る円とみなす。

証明. 一次分数変換を定理 2.3 によって、平行移動・定数倍・反転に分解し、それぞれが円を円に写すことを証明すればよい。ところが、平行移動と定数倍のときは、円が円に対応していることは明らかなので反転のときのみ示せばよい。

まず、円の方程式を求める。中心を z_0 、半径を r とすると、円の方程式は、

$$\begin{aligned} |z - z_0| &= r \\ |z - z_0|^2 &= r^2 \\ (z - z_0)(\overline{z - z_0}) &= r^2 \\ z\overline{z} - z\overline{z_0} - \overline{z}z_0 + z_0\overline{z_0} &= r^2 \\ z\overline{z} - z\overline{z_0} - \overline{z}z_0 - (r^2 - |z_0|^2) &= 0 \end{aligned}$$

である。ここで、 $A = -z_0$, $B = -(r^2 - |z_0|^2)$ とおくと円の方程式は、

$$z\overline{z} - \overline{A}z - A\overline{z} + B = 0 \quad (A \in \mathbb{C}, B \in \mathbb{R}) \quad : \quad \text{円の方程式}$$

となる。この式を $w = \frac{1}{z}$ を用いて反転させる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{w} \frac{1}{\overline{w}} + \overline{A} \frac{1}{w} + A \frac{1}{\overline{w}} + B &= 0 \\ 1 + \overline{A}\overline{w} + Aw + Bw\overline{w} &= 0 \end{aligned} \tag{2.3}$$

$B \neq 0$ と $B = 0$ で場合分けして考えよう。

・ $B \neq 0$ のとき。 式 (2.3) の両辺を B で割って、

$$w\overline{w} + \frac{A}{B}w + \frac{\overline{A}}{B}\overline{w} + \frac{1}{B} = 0$$

これは、中心 $-\frac{\overline{A}}{B} = -\frac{\overline{z_0}}{r^2 - |z_0|^2}$, 半径 $\frac{r}{||z_0|^2 - r^2|}$ の円の方程式である。半径 R は

$R^2 = \left| -\frac{\overline{A}}{B} \right| - \frac{1}{B}$ を計算すれば求まる。(計算は省略した。)

・ $B = 0$ のとき。

$$1 + \overline{A}\overline{w} + Aw = 0$$

これは、直線の方程式なので、 ∞ を通る円とみなす。

次に、直線の場合も同様に考える。平面 $\mathbb{R}^2$ 上の直線の方程式は $ax + by + c = 0$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) であるから、 $z = x + iy$ より

$$x = \frac{z + \overline{z}}{2}, \quad y = \frac{z - \overline{z}}{2i}$$

として $\mathbb{C}$ 上の直線の方程式を求める。

$$\begin{aligned} a\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right) + b\left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right) + c &= 0 \\ \frac{az+a\bar{z}}{2} + \frac{bz-b\bar{z}}{2i} + c &= 0 \\ az+a\bar{z} - i(bz-b\bar{z}) + 2c &= 0 \\ (a-ib)z + (a+ib)\bar{z} + 2c &= 0 \end{aligned}$$

ここで、 $A = a + ib$, $B = 2c$ とおくと、

$$\bar{A}z + A\bar{z} + B = 0 \quad (A \in \mathbb{C}, B \in \mathbb{R}) : \quad \mathbb{C} \text{ 上の直線の方程式}$$

となる。この式を $w = \frac{1}{z}$ を用いて反転させる。

$$\begin{aligned} \bar{A}\frac{1}{w} + A\frac{1}{\bar{w}} + B &= 0 \\ \bar{A}\bar{w} + Aw + Bw\bar{w} &= 0 \end{aligned} \tag{2.4}$$

$B \neq 0$ と $B = 0$ で場合分けして考えよう。

・ $B \neq 0$ のとき。 式 (2.4) の両辺を B で割って、

$$\frac{\bar{A}}{B}\bar{w} + \frac{A}{B}w + w\bar{w} = 0$$

これは、円の方程式である。

・ $B = 0$ のとき。

$$A\bar{w} + Aw = 0$$

これは直線の方程式である。

以上から、反転の変換によって円は円に対応していることが分かる。 □

2.3.3 一次分数変換と 3 点の像

定理 2.5 (参考文献 [4] 定理 6.5). 一次分数変換は 3 点の行き先が決まれば、ただ一つに定まる。

証明. 背理法で示す。相異なる 3 点 z_1, z_2, z_3 を w_1, w_2, w_3 に写す一次分数変換が $w = \phi_1(z)$ と $w = \phi_2(z)$ の 2 つあったとする。ここで、 $w = \phi_2(z)$ の逆変換 $z = \phi_2^{-1}(w)$ も

一次分数変換である。したがって、一次分数変換の合成 $\phi_2^{-1} \circ \phi_1(z)$ は 3 点 z_1, z_2, z_3 を不動点にする一次分数変換であり、恒等変換 $\phi(z) = z$ となる。その理由は、以下の通りである。 $z = \frac{az+b}{cz+d}$ について、 $c \neq 0$ のとき、 $cz^2 + (d-a)z - b = 0$ で不動点は高々 2 つである。 $c = 0$ のときは、 $(d-a)z - b = 0$ より、 $d-a=0$ ならば $b=0$ で不動点は 3 つ以上で恒等変換のみであって、 $d-a \neq 0$ ならば不動点は ∞ , $\frac{b}{d-a}$ の 2 つである。

したがって、 $z = \phi_2^{-1} \circ \phi_1(z)$ となり、 ϕ_2 との合成を取ると $\phi_2(z) = \phi_1(z)$ となる。すなわち、 z_1, z_2, z_3 を w_1, w_2, w_3 に写す一次分数変換は 1 つしかない。□

行き先として、 $1, 0, \infty$ と定めた一次分数変換は特別な形になるため、例として紹介する。

例 2.6. $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ で $(z_i \neq z_j (i \neq j))$ とする。

3 点の行き先としてそれぞれ $\phi(z_2) = 1$, $\phi(z_3) = 0$, $\phi(z_4) = \infty$ のように決め、一次分数変換 ϕ を求めてみる。

方針： $\phi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ の b, c, d を a を用いて表す $\rightarrow a$ が決まる $\rightarrow a, b, c, d$ が求まる

$$\begin{aligned}
\bullet \phi(z_3) = \frac{az_3+b}{cz_3+d} = 0 & \quad \bullet \phi(z_4) = \frac{az_4+b}{cz_4+d} = \infty & \bullet \phi(z_2) = \frac{az_2+b}{cz_2+d} = 1 \\
az_3+b=0 & \quad cz_4+d=0 & b = -az_3, d = -cz_4 \\
b = -az_3 & \quad d = -cz_4 & \text{より} \\
& & \frac{az_2 - az_3}{cz_2 - cz_4} = 1 \\
& & az_2 - az_3 = cz_2 - cz_4 \\
& & a(z_2 - z_3) = c(z_2 - z_4) \\
& & c = \frac{a(z_2 - z_3)}{z_2 - z_4}
\end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned}
\phi(z) &= \frac{az - az_3}{\frac{a(z_2 - z_3)z}{z_2 - z_4} - \frac{a(z_2 - z_3)z_4}{z_2 - z_4}} \\
&= \frac{(az - az_3)(z_2 - z_4)}{\left(\frac{a(z_2 - z_3)z}{z_2 - z_4} - \frac{a(z_2 - z_3)z_4}{z_2 - z_4}\right)(z_2 - z_4)} \\
&= \frac{(z - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_2 - z_3)(z - z_4)} = (z, z_2; z_3, z_4) : \text{複比} \tag{2.5}
\end{aligned}$$

相異なる 4 点 $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ が与えられたとき、 $\phi(z_2) = 1$, $\phi(z_3) = 0$, $\phi(z_4) = \infty$ になる一次分数変換は、定義 2.7 で紹介する複比そのものであることに注意しておく。

また一般の形として、3点の行き先をそれぞれ $\phi(z_2) = w_2$, $\phi(z_3) = w_3$, $\phi(z_4) = w_4$ と定める。これを満たす一次分数変換 ϕ を求めるには、 $\phi(z_2) = 1$, $\phi(z_3) = 0$, $\phi(z_4) = \infty$ になる一次分数変換 $\phi_3(z)$ と、 $\phi(1) = w_2$, $\phi(0) = w_3$, $\phi(\infty) = w_4$ になる一次分数変換 $\phi_4^{-1}(z)$ との合成を考えればよい。

2.3.4 複比

定義 2.7 (参考文献 [1] 定義 11.40). 異なる複素数 z_1, z_2, z_3, z_4 に対して、

$$(z_1, z_2; z_3, z_4) = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} \frac{z_2 - z_4}{z_2 - z_3}$$

とおく。また、いずれかの z_j が ∞ であるときは、上式の右辺で $z_j \rightarrow \infty$ としたときの極限を定義式とする。このとき、 $(z_1, z_2; z_3, z_4)$ を $\mathbb{C}$ の異なる4点の複比と呼ぶ。

複比の定義について、いずれかの z_j が ∞ であるときの解釈の仕方について、例を紹介する。

例 2.8. $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1$, $z_3 = i$, $z_4 = z \rightarrow \infty$ とすると、複比の定義より、

$$\begin{aligned} (z_1, z_2; z_3, z_4) &= \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} \frac{z_2 - z_4}{z_2 - z_3} = \frac{1 + i - i}{1 + i - z} \frac{1 - z}{1 - i} = \frac{1}{1 - i} \frac{1 - z}{1 + i - z} \\ &= \frac{1}{1 - i} \frac{\frac{1}{z} - 1}{\frac{1+i}{z} - 1} \rightarrow \frac{1}{1 - i} \quad (z \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

定理 2.9. 複比は任意の一次分数変換 ϕ に対して不変である。

証明. 相異なる4点 $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ に対して、 $(\phi(z_1), \phi(z_2); \phi(z_3), \phi(z_4)) = (z_1, z_2; z_3, z_4)$ を示す。 $g(z) = (z_1, z_2; z_3, z_4)$ とすると、

$$\begin{aligned} (f \circ g^{-1})(g(z_2)) &= f \circ g^{-1} \circ g(z_2) = f(z_2) = 1 \\ (f \circ g^{-1})(g(z_3)) &= f \circ g^{-1} \circ g(z_3) = f(z_3) = 0 \\ (f \circ g^{-1})(g(z_4)) &= f \circ g^{-1} \circ g(z_4) = f(z_4) = \infty \end{aligned}$$

より、 $g \circ \phi^{-1}$ は異なる3点 $\phi(z_2)$, $\phi(z_3)$, $\phi(z_4)$ をそれぞれ $1, 0, \infty$ に写す一次分数変換であるから、

$$g \circ \phi^{-1}(z) = (z, \phi(z_2); \phi(z_3), \phi(z_4))$$

となる。 $z = \phi(z_1)$ とおけば、 $g \circ \phi^{-1}(\phi(z_1)) = (\phi(z_1), \phi(z_2); \phi(z_3), \phi(z_4))$ より、

$$g \circ \phi^{-1}(\phi(z_1)) = g(z_1) = (z_1, z_2; z_3, z_4)$$

計算でも示すことができる。 $g(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ とする。

$$\begin{aligned}
(g(z_1), g(z_2); g(z_3), g(z_4)) &= \frac{g(z_1) - g(z_3)}{g(z_1) - g(z_4)} \frac{g(z_2) - g(z_4)}{g(z_2) - g(z_3)} \\
&= \frac{\frac{az_1+b}{cz_1+d} - \frac{az_3+b}{cz_3+d}}{\frac{az_1+b}{cz_1+d} - \frac{az_4+b}{cz_4+d}} \frac{\frac{az_2+b}{cz_2+d} - \frac{az_4+b}{cz_4+d}}{\frac{az_2+b}{cz_2+d} - \frac{az_3+b}{cz_3+d}} \\
&= \frac{(az_1+b)(cz_3+d) - (az_3+b)(cz_1+d)}{(az_1+b)(cz_4+d) - (az_4+b)(cz_1+d)} \times \\
&\quad \frac{(az_2+b)(cz_4+d) - (az_4+b)(cz_2+d)}{(az_2+b)(cz_3+d) - (az_3+b)(cz_2+d)} \\
&= \frac{(ad-bc)z_1 + (bc-ad)z_3}{(ad-bc)z_1 + (bc-ad)z_4} \frac{(ad-bc)z_2 + (bc-ad)z_4}{(ad-bc)z_2 + (bc-ad)z_3} \\
&= \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} \frac{z_2 - z_4}{z_2 - z_3} = (z_1, z_2, z_3, z_4)
\end{aligned}$$

よって、一次分数変換は複比を保つ。 □

2.3.5 等角性

まず最初に、関数が正則であれば等角性であるといえる定理を紹介する。証明は省略する。

定理 2.10 (参考文献 [1] 定理 12.1). $f(z)$ は $\mathcal{D}$ で正則とし、 $f'(z_0) \neq 0$ とする。また、 C_1, C_2 を z_0 を通るなめらかな曲線とし、それらの f による像曲線を Γ_1, Γ_2 とする： $\Gamma_j := f(C_j)$ ($j = 1, 2$)。曲線 C_j 上に点 $z_j \in \mathcal{D}$ をとり、 $w_j := f(z_j)$ ($j = 1, 2$) とおくと、次式が成り立つ。

$$\frac{\angle w_1 w_0 w_2}{\angle z_1 z_0 z_2} = 1, \quad \lim_{z_1, z_2 \rightarrow z_0} \left| \frac{w_2 - w_0}{w_1 - w_0} \frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0} \right| = 1.$$

定理 2.11. 一次分数変換は、等角性をもつ。

証明. 一次分数変換 $\phi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ を考える。多項式は正則であるため、分母が 0 でなければ $\phi(z)$ も正則であると言える。 $\phi(z)$ を微分すると、 $\phi' = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2}$ であるから、 $\phi(z)$ は、 $z = -\frac{d}{c}$, ∞ を除いて正則である。よって、一次分数変換は等角性をもつ。 □

3 円と点の配置

3.1 単位円板を保存する一次分数変換

ここからは、一次分数変換による円と円上にない 1 点の配置について考えたことを紹介する。前のセクションの定理より、

1. 一次分数変換は円を円に写す。(円円対応)
2. 一次分数変換は任意の相異なる 3 点を任意の相異なる 3 点に写す。

が成り立っている。また、異なる 3 点を通る円は唯一つしかないことは知られている。

任意の円上の相異なる 3 点を選び、それぞれの行き先として単位円上の 3 点を指定すれば、この一次分数変換によって元の円は単位円に写る。つまり、任意の円ではなく、単位円のみを考えても一般性を失われない。

よってここからは、単位円に焦点を当てて考えたい。

定義 3.1. 単位円の内部を単位円板と呼び、 $\Delta := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ で表す。

単位円板を単位円板に写す一次分数変換は、

$$f(z) = e^{i\theta} \frac{z - \gamma}{1 - \bar{\gamma}z} \quad (|\gamma| < 1, \theta \in \mathbb{R}) \quad (3.1)$$

である。

定理 3.2. 単位円板を保存する一次分数変換は、(3.1) 式で表されるものですべてである。

証明はしないが、(3.1) 式の形の一次分数変換が単位円を保つことを確かめてみる。

そこで $|z| = 1$ のとき $|f(z)| = |e^{i\theta}| \left| \frac{z - \gamma}{1 - \bar{\gamma}z} \right|$ を考えて、 $|f(z)| = 1$ を示す。

$|e^{i\theta}| = 1$ より、 $\left| \frac{z - \gamma}{1 - \bar{\gamma}z} \right| = 1$ であることを確かめればよい。ここで、 $|z| = 1$ のとき、 $\bar{z} = \frac{1}{z}$ である。

$$\text{分子: } |z - \gamma|^2 = (z - \gamma)(\bar{z} - \bar{\gamma}) = (z - \gamma)\left(\frac{1}{z} - \bar{\gamma}\right) = 1 - z\bar{\gamma} - \frac{\gamma}{z} + \gamma\bar{\gamma}$$

$$\text{分母: } |1 - \bar{\gamma}z|^2 = (1 - \bar{\gamma}z)(1 - \gamma\bar{z}) = (1 - \bar{\gamma}z)\left(1 - \gamma\frac{1}{z}\right) = 1 - \frac{\gamma}{z} - \bar{\gamma}z + \gamma\bar{\gamma}$$

分子 = 分母より、 $\left| \frac{z - \gamma}{1 - \bar{\gamma}z} \right| = 1$ であるから、 $|z| = 1$ のとき、 $|f(z)| = 1$ で式 (3.1) が単位円から単位円に写すような一次分数変換であることが分かる。□

また、 f の逆変換は $\phi^{-1}(w) = e^{-i\theta} \frac{w + \gamma e^{i\theta}}{1 + \bar{\gamma} e^{-i\theta} w}$ であり、式 (3.1) の形である。逆変換の導出のポイントは以下に記す。 $\phi(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ に対して、 $a = e^{i\theta}$, $b = -\gamma e^{i\theta}$, $c = -\bar{\gamma}$, $d = 1$ とすれば、 $f(z) = e^{i\theta} \frac{z - \gamma}{1 - \bar{\gamma}z}$ に対応するので、 $\phi^{-1}(z) = \frac{dz - b}{-cz + a}$ より

$$f^{-1}(z) = \frac{z + \gamma e^{i\theta}}{\bar{\gamma}z + e^{i\theta}} = \frac{z - (-\gamma e^{i\theta})}{e^{i\theta}(1 - (-\frac{\bar{\gamma}}{e^{i\theta}})z)} = e^{-i\theta} \frac{z - (-\gamma e^{i\theta})}{1 - (-\bar{\gamma} e^{-i\theta})z}$$

単位円板を保存する一次分数変換の全体を、

$$\begin{aligned} PSU(1, 1) &= \left\{ f \in PSL(2, \mathbb{C}) \mid f(S^1) = S^1, f(\Delta) = \Delta \right\} \\ &= \left\{ f \in PSL(2, \mathbb{C}) \mid f(z) = e^{i\theta} \frac{z - \gamma}{1 - \bar{\gamma}z} \quad (|\gamma| < 1, \theta \in \mathbb{R}) \right\} \end{aligned}$$

と書く。これは、 $PSL(2, \mathbb{C})$ の部分群になっている。

3.2 研究テーマ 1 (円と点の配置問題)

単位円板を保存する一次分数変換 (3.1) によって、単位円板内の任意の点を単位円板内の任意の位置に写すことは可能かどうかを考えたい。

そのためにまずは、単位円板を保存する一次分数変換 (3.1) で写した時、原点 (中心) は単位円板内の任意の位置に写すことは可能かどうかを考える。以上を記号でまとめると次のようになる。

$$\forall \alpha \in \Delta, \exists f_1 \in PSU(1, 1) \quad s.t. \quad \alpha = f_1(0)$$

まず、 $f \in PSU(1, 1)$ において、原点はどこに写るのかを求める。

$$f(z) = e^{i\theta} \frac{z - \gamma}{1 - \bar{\gamma}z}$$

に $z = 0$ を代入すると、

$$f(0) = e^{i\theta} \frac{0 - \gamma}{1 - \bar{\gamma}0} = -\gamma e^{i\theta}$$

である。よって、 $\forall \alpha \in \Delta$ に写すためには、 $-\gamma e^{i\theta} = \alpha$ とすればよい。これが成り立つような γ は $\gamma = -\alpha e^{-i\theta}$ である。ここでは、 $\theta = 0$, $\gamma = -\alpha$ とおくことにすると、

$$f_1(z) = \frac{z + \alpha}{1 + \bar{\alpha}z}$$

である。ゆえに、以下の定理を得ることができた。

定理 3.3. $f \in PSU(1, 1)$ であって、原点 0 を単位円板内の任意の点 ($\forall \alpha \in \Delta$) に写すような一次分数変換 f は存在し、

$$f(z) = \frac{z + \alpha}{1 + \bar{\alpha}z}$$

と書ける。

次に、単位円板を保存する一次分数変換 (3.1) によって、単位円板内の任意の点を単位円板内の任意の位置に写すことは可能かどうかを定理 3.2 を使って考える。以上を記号でまとめると次のようになる。

$$\forall \alpha, \beta \in \Delta, \exists f \in PSU(1, 1) \quad s.t. \quad \beta = f(\alpha)$$

定理 3.2 より、 $f \in PSU(1, 1)$ において原点 0 を単位円板内の任意の点 ($\forall \alpha \in \Delta$) に写すような一次分数変換は $f_1(z) = \frac{z + \alpha}{1 + \bar{\alpha}z}$ である。ここでのポイントは、 $\alpha \xrightarrow{f_1^{-1}} 0 \xrightarrow{f_2} \beta$ のように 0 を経由して考えることである。先ほどの f_1 の逆変換 f_1^{-1} と原点 0 を $\forall \beta \in \Delta$ に写すような一次分数変換との合成を考えることで $\beta = f(\alpha)$ となるような一次分数変換を求める。

$$0 \xrightarrow{f_1} \alpha \quad f_1(z) = \frac{z + \alpha}{1 + \bar{\alpha}z}$$

$$\alpha \xrightarrow{f_1^{-1}} 0 \quad f_1^{-1}(z) = \frac{\alpha - z}{\bar{\alpha}z - 1}$$

$$0 \xrightarrow{f_2} \beta \quad f_2(z) = \frac{z + \beta}{1 + \bar{\beta}z}$$

これより f_1^{-1} と f_2 の合成を考えると、

$$f_2 \circ f_1^{-1}(z) = \frac{\frac{\alpha - z}{\bar{\alpha}z - 1} + \beta}{1 + \bar{\beta} \frac{\alpha - z}{\bar{\alpha}z - 1}} = \frac{(\bar{\alpha}\beta - 1)z + \alpha - \beta}{(\bar{\alpha} - \bar{\beta})z + \alpha\bar{\beta} - 1}$$

である。また、 $f_2 \circ f_1^{-1}(z)$ は、 $\alpha - \beta$ と $\alpha\bar{\beta} - 1$ とそれぞれの複素共役で構成されることが分かる。ゆえに、先ほど得られた定理 3.2 の原点 0 を任意の点として、仮定をゆるくでき、以下の定理を得ることができた。

定理 3.4. $f \in PSU(1, 1)$ であって、単位円板内の任意の点 ($\forall \alpha \in \Delta$) を、単位円板内の任意の点 ($\forall \beta \in \Delta$) に写すような一次分数変換 f は存在し、

$$f(z) = \frac{(\bar{\alpha}\beta - 1)z + \alpha - \beta}{(\bar{\alpha} - \bar{\beta})z + \alpha\bar{\beta} - 1}$$

と書ける。

定理 3.4 より、単位円板を保存する一次分数変換で単位円板内の任意の点を任意の位置に写せることが分かった。これにより、任意の円とその円上にない 1 点の組が一次分数変換によって任意の別の円と点の組みに写せることも次のようにして分かる。

任意の円を単位円に写すような一次分数変換が ϕ_5 であったとする。 ϕ_5 で点を写したとき、点が単位円板外にあった場合は、反転操作によって単位円板内に写すようにする。すると任意の円とその円上にない 1 点の組は、単位円と単位円板内の 1 点に写すことが可能である。あとは定理 3.4 を用いればよい。

これをまとめると次の定理になる。

定理 3.5. 円とその円上にない 1 点の任意の 2 組は、すべて一次分数変換で写りあう。

3.3 研究テーマ 2

単位円板を保存する一次分数変換 (3.1) によって、単位円板内の任意の 2 点を単位円板内の任意の 2 点に写すことは可能かどうかを考えたい。以上を記号でまとめると次のようになる。

$$\forall \alpha, \beta, u, v \in \Delta, \exists f \in PSU(1, 1) \quad s.t. \quad (\beta = f(\alpha)) \quad \text{かつ} \quad (v = f(u))$$

$\beta = f(\alpha)$ は、先ほどのセクションと同様に $\alpha \xrightarrow{f_1^{-1}} 0 \xrightarrow{f_2} \beta$ として 0 を経由して考える。このような f_1, f_2 をまず選んで、一次分数変換 f_1^{-1} によって u を写し、写った先を u' とおく。

$$f_1^{-1}(u) = \frac{\alpha - u}{\bar{\alpha}u - 1} = u'$$

次に、一次分数変換 f_2 によって、写される v の像を v' とおく。

$$f_2(v') = \frac{v' + \beta}{1 + \bar{\beta}v'} = v$$

ここで、 v' を v を用いた式で表すと、

$$v' = f_2^{-1}(v) = \frac{\beta - v}{\bar{\beta}v - 1}$$

である。 α と β はどちらも 0 に写っていることに注意する。ここで、 u', v' の条件を考えたい。0 を固定しながら、 u' を v' に写すことができればよい。そのために、単位円板を

保存し、同時に原点を固定するような一次分数変換を求めることで条件を探る。まず、単位円板と原点を保存する一次分数変換を求める。

$$f(0) = e^{i\theta} \frac{0 - \gamma}{1 - \bar{\gamma}0} = -\gamma e^{i\theta} = 0$$

より、 $\gamma = 0$ であるから、 $\gamma = 0$ のとき、

$$f(z) = e^{i\theta} \frac{z}{1} = e^{i\theta} z$$

である。よって、単位円板と原点を保存する一次分数変換は、 $f(z) = e^{i\theta} z$ しか存在しない。このことから、 $u' = \frac{\alpha - u}{\bar{\alpha}u - 1}$ と $v' = \frac{v - \beta}{1 - \bar{\beta}v}$ が同一円上にあることが、 u', v' が写りあうための必要十分条件である。つまり、 $\left| \frac{\alpha - u}{\bar{\alpha}u - 1} \right| = \left| \frac{\beta - v}{\bar{\beta}v - 1} \right|$ が求める条件である。ゆえに、以下の定理を得ることができた。

定理 3.6. $f \in PSU(1, 1)$ であって、単位円板内の任意の 2 点 ($\forall \alpha, u \in \Delta$) を、それぞれ単位円板内の任意の 2 点 ($\forall \beta, v \in \Delta$) に写すような一次分数変換 f が存在するための必要十分条件は、

$$\left| \frac{\alpha - u}{\bar{\alpha}u - 1} \right| = \left| \frac{\beta - v}{\bar{\beta}v - 1} \right|$$

である。

3.4 研究テーマ 3

一次分数変換の等角性を保つという性質から、一次分数変換による三角形の内心や垂心の像について考えたい。最初に、内心について考える。

定義 3.7. 三角形の内心とは、それぞれの内角の二等分線の交点である。

三角形の内心については、以下の性質が知られている。

- 角を二等分する。
- 内心と各辺との距離が等しい。
- 内接円の中心である。

上記の性質の中で注目したのが、角を二等分するという性質である。というのも、一次分数変換が等角性をもつからである。

三角形は図 2 のように 3 つの直線で構成されている。3 つの直線を一次分数変換によって変換すると、図 3 のように同じ点（無限遠点 ∞ ）で交わるような 3 つの円ができる。

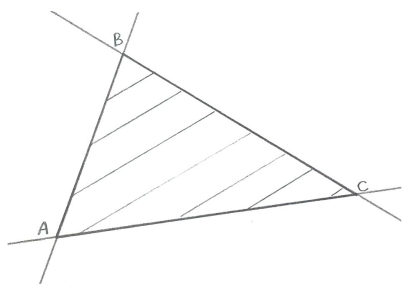


図 2

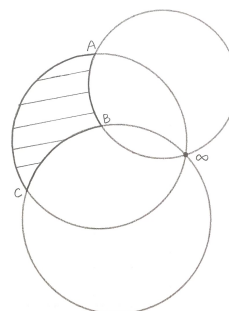


図 3

角の二等分線は 3 つの角にそれぞれ存在するので、これもまた図 5 のように同じ点（無限遠点 ∞ ）を通るような 3 つの円ができる。ここで、一次分数変換の等角性を保つという性質より、角を二等分するという性質は変わらない。すると、角の二等分線である 3 つの円は無限遠点 ∞ 以外のたった 1 点で交わることが分かる。もちろんこの点は内心の一次分数変換による像である。

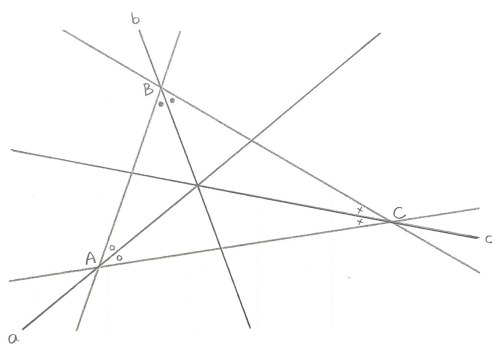


図 4

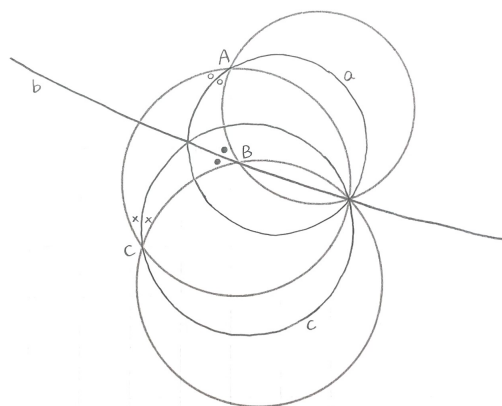


図 5

次に、垂心について考える。角度から垂心の定義は決まるため、内心と同様に等角性を保つことに注目して考える。

定義 3.8. 三角形の垂心とは、各頂点から対辺に引いた垂線の交点である。

内心のときと同様に、三角形を一次分数変換によって写すと、同じ点（無限遠点 ∞ ）で交わるような3つの円ができる。各頂点から対辺に引く垂線は3つの角にそれぞれ存在するので、これもまた図7のように同じ点（無限遠点 ∞ ）を通るような3つの円ができる。ここで、一次分数変換の等角性を保つという性質より、対辺に垂直に交わるということ是不変である。すると、各頂点から対辺に引いた垂線に対応する3つの円は無限遠点 ∞ を除くとたった1点で交わることが分かった。もちろんこの点は垂心の一次分数変換による像である。

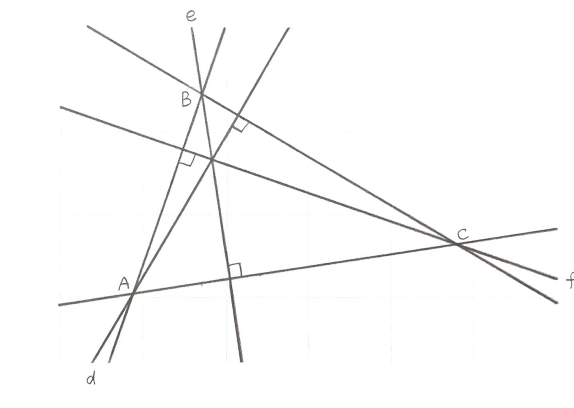


図 6

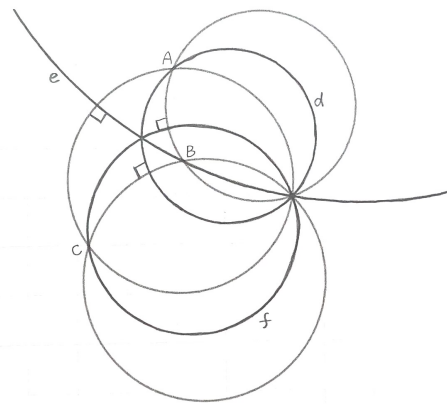


図 7

三角形の五心のうち内心と垂心は角度から定義が定まっているため一次分数変換の等角性を保つという性質に注目し、三角形の内心と垂心の一次分数変換による像を考えた。内心や垂心を定めるために必要な二等分線や垂線も3つの円に写され、内心や垂心の像として1点で交わることが分かった。

3.5 研究テーマ 4 (2つの円の配置問題)

互いに交わらない2つの円について考えたい。ここでは、例として図8のような2つの円を考える。

- 外側の円は、 $8 - 2i$, $-4 + 6i$, $12 + 6i$ の3点を通る円であり、 C_1 とする。
- 内側の円は、 $6 + 2i$, $4 + 10i$, $2 + 6i$ の3点を通る円であり、 C_2 とする。

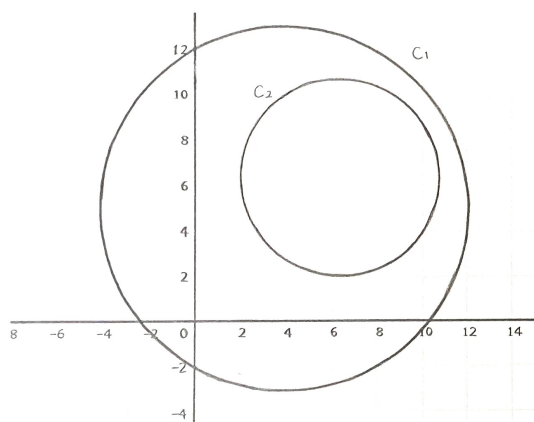


図 8

C_1 を $1, 0, \infty$ を通る円（実軸）に写すような一次分数変換 ϕ_6 を求める。式 (2.5) より、

$$\begin{aligned}\phi_6(z) &= \frac{(z - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_2 - z_3)(z - z_4)} = \frac{(z + (-4 + 6i))((8 - 2i) - (12 + 6i))}{((8 - 2i) - (-4 + 6i))(z - (12 + 6i))} \\ &= \frac{(-4 - 8i)(z + 4 - 6i)}{(12 - 8i)(z - 12 - 6i)}\end{aligned}$$

である。この ϕ_6 によって写した $1, 0, \infty$ を通る円を C_3 する。これに伴い、 C_2 も ϕ_6 によって写すと、

$$\phi_6(6 + 2i) = \frac{9}{13} + \frac{8}{13}i, \quad \phi_6(4 + 10i) = -\frac{7}{13} + \frac{4}{13}i, \quad \phi_6(2 + 6i) = -\frac{3}{65} + \frac{24}{65}i$$

より、 $\phi_6(6 + 2i)$, $\phi_6(4 + 10i)$, $\phi_6(2 + 6i)$ の 3 点を通る円に写る。この円を図 9 の C_4 とする。

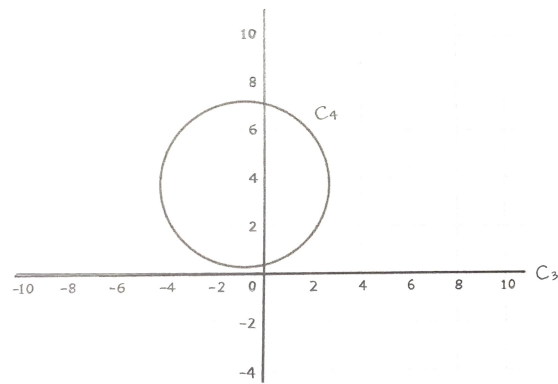


図 9

ここで、 C_3 上のある 1 点を通る C_4 の接線を 2 本引き、 C_3 上のある 1 点を中心とするような、円と接線との交点を通る円を描く。すると、円と C_3 に直角に交わるような円になっているはずである。

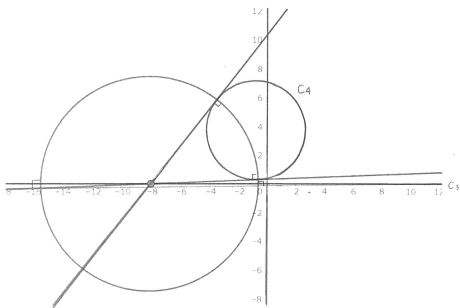


図 10

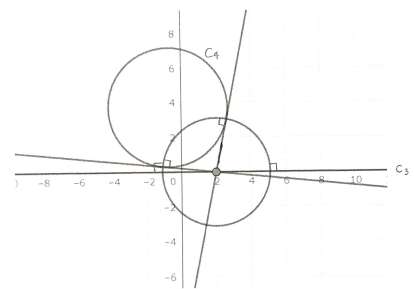


図 11

これを何回か繰り返し、円と C_3 に直角に交わるような円をたくさん書くと、図 12 のように交わる点が 2 点あることに気づく。

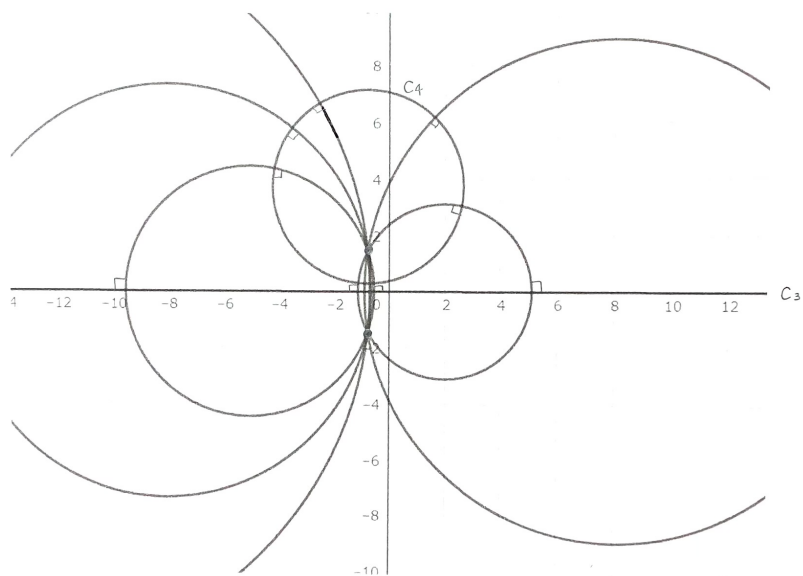


図 12

ここで、同心円について考えたい。同心円は、図 13 のように中心 0 を通るような直線をたくさん描くことができる。これらの直線はすべて、2 つの円それぞれと直角に交わっている。

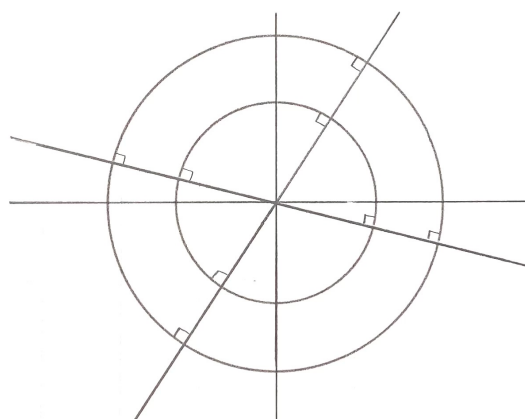


図 13 2 つの同心円

これらのことから、円と C_3 に直角に交わるようなたくさんの円の 2 点の交点を、一方は単位円の中心であり、もう一方は無限遠点だと考えると単位円ともう一方の円は同心円

であることがいえそうである。互いに交わらない2つの円について、一方を単位円に写すような一次分数変換で写したとき、もう一方は単位円と同心円になるような円に写すことができることが証明できそうである。ただし、その同心円の半径を任意に設定することはできないと予想される。

4 最後に

4.1 卒研発表会での質問

卒研発表会で先生方からいただいた質問を以下にまとめる。

- (松田先生) 研究テーマ 2 について、 u' と v' が同一円上にあるというのは、必要十分条件か。
→ 必要十分条件です。(本論文では明確になるように気を付けて定理 3.5 に書きました。)
- (松田先生) 研究テーマ 3 の内心について、証明できているか。
→ できていると思います。(3.4 節)
- (津田先生) 一次分数変換の分解において、 $z = \frac{1}{z}$ を反転という言い方をしているが、反転と単位円に関する鏡映との違いは何か。
→ 偏角の違いだと思います。
- (関先生) 研究テーマについては、すべて自分で考えたことか。
→ 指導教員である西山先生に相談にのっていただき、ご助言をいただきました。
- (小林先生) いろいろなテーマを考えて思ったことはあったか。ユークリッド幾何との比較についてなど一次分数変換全体としての幾何について分かったことはあるか。
→ そこまではまとめることができませんでした。

卒研発表会で質問やコメントをしてくださった先生方、ありがとうございました。

4.2 今後の課題

- 研究テーマ 4, 5 については、もっとしっかり証明を含めて考え、まとめたい。
- 他にも考えられる問題をたくさん見つけ、卒研発表会で小林先生からいただいた質問について考えたい。

4.3 謝辞

まず最初に、本研究の指導教員である西山先生には、研究の構想から論文の完成に至るまで、多大なご助言とご指導を賜りました。特に研究の方向性から迷いがあり、なかなか

テーマを定めることができなかった際も相談に乗っていただき、最後まで指導してくださいました。そのおかげで、今日この成果を形にすることができました。この場をお借りして、感謝申し上げます。

この4年間の間に講義を担当してくださった先生方をはじめとする多くの先生方から貴重なご指導をいただきました。心より感謝申し上げます。

また、同じ西山研究室の皆さまには、研究活動をともに進める中で、多くの励ましをいただきました。研究を進める上でのモチベーションを維持することができました。

最後に、卒業までの間に関わってくださったすべての方々に、深く感謝申し上げます。皆さまのご支援がなければ、今回の卒業論文を完成させることはできませんでした。ありがとうございました。

参考文献

- [1] 野村隆昭 『複素関数論講義』 共立出版, 2016.
- [2] G・トス, (蟹江幸博 訳) 『数学 名所案内 上』 丸善出版, 2012.
- [3] 深谷賢治 『双曲幾何』 岩波書店, 2013.
- [4] 相川弘明 『複素関数入門』 共立出版, 2016.
- [5] R.V. チャーチル / J.W. ブラウン, (中野實 訳) 『複素関数入門』 数学書房, 2015.
- [6] 西山享 『幾何学と不変量』 日本評論社, 2024.