# オイラーの五角数定理とヤコビの三重積公式

青山学院大学　理工学部　物理・数理学科

西山研究室

15107022　大宗勇輝

15107097　守谷貴秀

# 目次

# １　プロローグ

分割とは、自然数 $n$ を自然数の和として書いたものをいう。例えば

$$4=3+1=2+2=2+1+1=1+1+1+1$$

その分割の個数を分割数という。分割、分割数の話の中に必ず登場するのが「ヤコビの３重積公式」である。ヤコビの３重積公式を特殊化することにより、オイラーの五角数定理が得られる。

さらに、ヤコビの三重積公式の別の特殊化を考えることでガウスの三角数定理、ガウスの四角数定理が得られる。この論文ではその延長として、六角数定理を導いた。これらの定理は三角数や四角数、あるいは六角数などの母函数をオイラー函数を用いて表示する関数等式である。

六角数定理までは導くことができたので、最終目標としては、七角数定理以降をオイラー函数を用いて表し、オイラー函数による表示を一般項に書き下す方法を考察したいが、これは将来の課題である。

# ２　分割

## 2.1　分割と分割数

正整数 $n$ をいくつかの正整数 (和因子という)の和に分ける方法のことを**分割**という。例として、5 の分割を書き上げてみると次のようになる。

5 の分割：5=4+1=3+2=3+1+1=2+2+1=2+1+1+1=1+1+1+1+1

このとき、4+1 のような和を(4,1)と書くと、5 の分割は以下のように表される。

(5) (4,1) (3,2) (3,1,1) (2,2,1) (2,1,1,1) (1,1,1,1,1)

必要に応じて

$$(3,1,1)=(3,1^2)\quad (2,1)=(2^2,1)\quad (2,1,1,1)=(2,1^3)\quad (1,1,1,1,1)=(1^5)$$

などと表す。

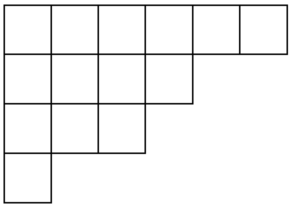
分割において、和因子の順番を入れ替えたものは同じとみなす。例えば 4+1 と 1+4 は同じである。一般に $n$ の分割の個数を $p(n)$と表し、**分割数**という。今の場合、$p(5)=7$ である。正整数 $n$ に対して$n=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_l$と書けているとき、その和因子$\lambda_1\cdots\lambda_l$を大きいものから広義減少に並べて分割 $\lambda$ を

$$\lambda = (\lambda_{1,} \lambda_{2,} \cdots, \lambda_l) \qquad \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_l > 0$$

と表す。分割の成分の総和を$|\lambda| = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_l$と表す。$|\lambda| = n$となるときが $n$ の分割である。また $l$ を分割 $\lambda$ の長さという。

## 2.2　ヤング図形

分割を次のように視覚的に図示したものを**ヤング図形**と呼ぶ。分割$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots)$を表すヤング図形とは、第１行目に$\lambda_1$個、第２行目に$\lambda_2$個…と、対応する個数の箱を左端を揃えて並べたものである。例として(6,4,3,1)のヤング図形を示す。



(6,4,3,1)のヤング図形

## 2.3　分割数と母函数

母函数とは、数列をすべて記憶しておく役目を果たす冪級数である。ここでは、分割数の母函数について考える。今 $q$ を文字とする。あるいは $q$ を「不定元」と言ってもよい。収束を考えない形式的冪級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(n)\, q^n$$

を考える。まず等比級数の和の公式より

$$\frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n$$

これを用いて、無限個の積について考えると

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^k} = \frac{1}{1-q} \cdot \frac{1}{1-q^2} \cdot \cdots \cdot \frac{1}{1-q^k} \cdot \cdots$$

$$= \sum_{m_1=0}^{\infty} q^{m_1} \cdot \sum_{m_2=0}^{\infty} q^{2m_2} \cdot \cdots \cdot \sum_{m_k=0}^{\infty} q^{km_k} \cdot \cdots$$

$$= \sum_{m_1, m_2 \cdots = 0}^{\infty} q^{m_1 \cdot 1 + m_2 \cdot 2 + \cdots + m_k k + \cdots}$$

がわかる。ここで$\prod$は乗積の記号である。右辺において$q^n$の係数について考えてみよう。

$$\sum_{m_k=0}^{\infty} q^{km_k} = 1 + q^k + q^{2k} + \cdots + q^{lk} + \cdots$$

の $l$ 項である$q^{lk}$に縦が $l$, 横が $k$ の長方形のヤング図形を対応させる。

$$q^{lk} = q^{k+k+\cdots+k}$$

と書き直して、肩の$k + k + \cdots + k$を分割の一部分と思うと、$m_1 \cdot 1 + m_2 \cdot 2 + \cdots + m_k k + \cdots$は和因子 1 が$m_1$個、和因子 2 が$m_2$個、…というような分割とみなすことができる。つまり、長方形のヤング図形の組合せで任意のヤング図形(分割)を表すことができる。従ってこの級数における$q^n$の係数は $p(n)$である。以上より分割の母函数は

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(n) q^n = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^k}$$

であることがわかった。

<u>定理 2.1</u>　　$P(n)$を分割数とすると次の恒等式が成り立つ。

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(n) q^n = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^k}$$

右辺の無限乗積で表されている函数の逆数を$\Phi(q)$と書いて**オイラー函数**と呼ぶ。オイラー函数はこのあとで重要な役割を果たすことになる。

$$\Phi(q) \coloneqq \prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^k)$$

# 3　ヤコビの三重積公式

## 3.1　ヤコビの三重積公式

分割、分割数の話に必ず出てくるのが「**ヤコビの三重積公式**」である。ヤコビの三重積公式とは次のようなものである。

<u>定理 3.1(ヤコビの三重積公式)</u>　$z, q$を不定元とすると次の等式が成り立つ。

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)(1 + zq^n)(1 + z^{-1} q^{n-1}) = \sum_{m \in Z} z^m q^{\frac{m(m+1)}{2}} \qquad (1)$$

3.2　絵による証明

ヤコビの三重積公式は有名な公式であり、いくつもの証明があるが、そのうちの一つである、マヤ図形を使った証明を紹介する(参考文献[3]組合せ論プロムナードP42参照)。証明を行うにあたり、次の図を用いる。

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 1 | 4 | 7 | 10 | 13 | ⋯ | $3m-2$ | ⋯ |
| | | | | | | | | |
| B | 2 | 5 | 8 | 11 | 14 | ⋯ | $3m-1$ | ⋯ |
| | | | | | | | | |

この図をゲーム盤とみなして次のようなルールのゲームを考えよう。

(1) まず最初のステップで 1 と 2 のマスにコマを 1 つずつ置く。

(2) 以後、一つのステップでどちらか一方が 1 マス右に進む(各マスの番号は 3 ずつ増えていることに注意)。

(3) 同じマスに 2 個が同時に入ることはできない。

(4) 1 と 2 のマスがともに空いているときには、1 ステップとして新たなコマを 1 と 2 に同時に置くことができる。

<u>補題 3.2</u>　$n$ ステップ後のコマたちの状態の個数は、$n$ の分割数 $p(n)$に等しい。

[証明]

・$n$ ステップ後の状態の全体を $B(n)$とする。

・$n$ の分割、すなわちマス目の個数が $n$ のヤング図形の全体を $P(n)$とする。

この証明では $B(n)$から $P(n)$への全単射を構成する。
まずは例で考えてみよう。

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 1 | 4 | 7 | 10 | 13 | ⋯ | $3m-2$ | ⋯ |
| | | $a_2$ | $a_1$ | | | | | |
| B | 2 | 5 | 8 | 11 | 14 | ⋯ | $3m-1$ | ⋯ |
| | $b_2$ | | $b_1$ | | | | | |

先ほどのルールの通りにゲームを行い、上の図の状態を作るには 7 ステップが必要である。つまり、上の図の状態は B(7)の元である。

この図を B コースの右側無限遠方から左に向かってコマの有無を見ていく。Bの最初

のマスまで来たら、A コースに乗り移り、今度は最初のマス(１)から右側無限遠方までコマの有無を見ていく。B コースにおいて、コマの置いてあるマスを「○」、コマを置いていないマスを「●」とする。A コースにおいては、コマを置いてあるマスを「●」、コマを置いていないマスを「○」と B コースとは逆にする。以上をコースについて読んだ順に「○」「●」を左から一直線に並べる(十分左にはすべて●が並び、十分右には○が並ぶ)。
例について並べてみると

| … | ● | ● | ○ | ● | ○ | ○ | ● | ● | ○ | ○ | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 0 | | 1 | | | 3 | 3 | | | |

このような図形を**マヤ図形**と呼ぶ。

各●の左側にある○の個数を勘定して、大きい順番に並べることにより分割を読み取ることができる。上記の例においてできる分割は、(3,3,1)∈$P$(7)となることがわかる。このようにして写像

$$\varphi: B(n) \to P(n)$$

が定義される。
この写像が全単射を与えるが以下これを示そう。そのためには、φの逆写像を構成すればよい。

逆写像は、分割 $\lambda$ に対してまずマヤ図形を作り、これを「折り曲げて」A、B コースにする。折る場所の右側の●の個数と、左側の○の個数が等しくなるようにする。あとは●と○をそれぞれコマに置き直せばよい。これが全単射になっていることは、作り方から明らかである。以上より補題は証明された。■

以下、この補題を用いてヤコビの三重積公式を証明しよう。
次のような初期状態でゲームを始めることもできる。

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 1 | 4 | 7 | 10 | 13 | … | $3m-2$ | … |
| | $a_3$ | $a_2$ | $a_1$ | | | | | |
| B | 2 | 5 | 8 | 11 | 14 | … | $3m-1$ | … |
| | | | | | | | | |

(A のマスに左端から連続して $m$ 個のコマが埋まっている状態)

又は

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 1 | 4 | 7 | 10 | 13 | $\cdots$ | $3m-2$ | $\cdots$ |
| | | | | | | | | |
| B | 2 | 5 | 8 | 11 | 14 | $\cdots$ | $3m-1$ | $\cdots$ |
| | $b_3$ | $b_2$ | $b_1$ | | | | | |

(B のマスに左端から連続して $m$ 個のコマが埋まっている状態)

A コース上のコマから B コース上のコマの数を引いた量を「**電荷**」と呼ぶ。電荷はゲームの途中で変化しないので、初期状態で決まる。

電荷が 0 のとき、$n$ ステップ後のコマのいるマスにふられている数の和はちょうど $3n$ である。さらに、電荷が$m \geq 1$のときには、この数は $3n$ に

$$1+4+7+\cdots+(3m-2)=\frac{m(3m-1)}{2}$$

を加えた数になる。電荷$m \leq -1$のときには

$$2+5+8+\cdots+(3(-m)-1)=\frac{m(3m-1)}{2}$$

を加えた数になる。

A のコマの数を $k$ 人、B のコマの数を $l$ 人とすると、各状態におけるコマのある位置のマスの番号の和の母函数は

$$\sum_{k\geq 0} z^k q^{(3n_1-2)+(3n_2-2)+\cdots+(3n_k-2)} \times \sum_{l\geq 0} z^{-l} q^{(3N_1-1)+(3N_2-1)+\cdots+(3N_l-1)}$$

$$=\sum z^m q^{(3n_1-2)+\cdots+(3n_k-2)+(3N_1-1)+\cdots+(3N_l-1)} \qquad (k-l=m)$$

と計算できる。電荷 $m$ のゲームにおける $N$ ステップ目のマスの番号の合計は

$3N+\frac{m(3m-1)}{2}$であり、この配置方法は補題 3.2 より $P(N)$通りあるので、

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} z^m \sum_{\substack{(n_1\cdots n_k)\\(N_1\cdots N_l)\\k-l=m}} q^{(3n_1-2)+(3n_2-2)+\cdots+(3n_k-2)} \times q^{(3N_1-1)+(3N_2-1)+\cdots+(3N_l-1)}$$

$$=\sum_{-\infty}^{\infty} z^m \sum_{N=0}^{\infty} P(N) q^{3N+\frac{m(3m-1)}{2}}$$

となる。整理すると

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+zq^{3n-2})(1+z^{-1}q^{3n-1})=\sum_{m\in Z}z^m\sum_{N=0}^{\infty}P(N)q^{3N+\frac{m(3m-1)}{2}}$$

$$=\sum_{m\in Z}z^m q^{\frac{m(3m-1)}{2}}\sum_{N=0}^{\infty}P(N)q^{3N}$$

ここで分割の母函数を考える。

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-q^n}=\sum_{N=0}^{\infty}P(N)q^N$$

分割の母函数において、$q\to q^3$と置換をする。

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-q^{3n}}=\sum_{N=0}^{\infty}P(N)(q^3)^N$$

この結果を用いると

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+zq^{3n-2})(1+z^{-1}q^{3n-1})=\sum_{m\in Z}z^m q^{\frac{m(3m-1)}{2}}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-q^{3n}}$$

右辺の乗積の部分を左辺に移項すると

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{3n})(1+zq^{3n-2})(1+z^{-1}q^{3n-1})=\sum_{m\in Z}z^m q^{\frac{m(3m-1)}{2}}$$

ここで$q^3=Q$と置き換えると

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-Q^n)(1+zQ^nq^{-2})(1+z^{-1}Q^{n-1}q^2)=\sum_{m\in Z}z^m q^{\frac{m(3m-1)}{2}}$$

また、$\mathrm{z}q^{-2}=Z$とすると、$\mathrm{z}=q^2Z\quad z^{-1}q^2=Z^{-1}$なので

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-Q^n)(1+ZQ^n)(1+Z^{-1}Q^{n-1})=\sum_{m\in Z}(q^2Z)^m q^{\frac{m(3m-1)}{2}}$$

$$=\sum_{m=Z}Z^m q^{\frac{m(3m-1)}{2}+2m}$$

ここで右辺の $q$ の指数に注目する。

$$q^{\frac{m(3m-1)}{2}+2m}=q^{\frac{1}{2}(3m^2-m+4m)}=q^{\frac{1}{2}(3m^2+3m)}=q^{\frac{3m(m+1)}{2}}=Q^{\frac{m(m+1)}{2}}$$

よって

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-Q^n)(1+ZQ^n)(1+Z^{-1}Q^{n-1})=\sum_{m\in Z}Z^m Q^{\frac{m(m+1)}{2}}$$

最後に$Q\to q,Z\to z$と書き直してやると

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)(1+zq^n)(1+z^{-1}q^{n-1})=\sum_{m\in Z}z^m q^{\frac{m(m+1)}{2}}$$

以上より、ヤコビの三重積公式が導かれた。

# ４　オイラーの五角数定理

## 4.1　オイラーの五角数定理

<u>定理 4.1(オイラーの五角数定理)</u>　　$q$ を不定元とするとき、次の恒等式が成り立つ。

$$\Phi(q)=\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)=\sum_{m\in Z}(-1)^m q^{\frac{m(3m-1)}{2}}$$

この定理はオイラーによって証明されたが、式の右辺の $q$ の指数が五角数となっているので、**オイラーの五角数定理**と呼ばれている。

[証明]　オイラーの五角数定理を定理 3.1 で導いたヤコビの三重積公式(1)を用いて導く。(1)式において$q=q^3$、$z=-q^{-1}$と特殊化すると

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{3n})(1+(-q^{-1})q^{3n})(1+(-q^{-1})^{-1}q^{3n-3})=\sum_{m\in Z}(-q)^{-m}q^{\frac{3m(m+1)}{2}}$$

整理してやると

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{3n})(1-q^{3n-1})(1-q^{3n-2})=\sum_{m\in Z}(-1)^m q^{\frac{m(3m+1)}{2}}$$

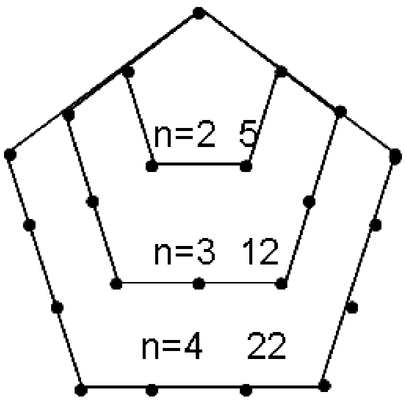
となる。右辺の範囲が整数全体なので、$m$ を $-m$ で入れ替えると

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{3n})(1-q^{3n-1})(1-q^{3n-2})=\sum_{m\in Z}(-1)^m q^{\frac{m(3m-1)}{2}}$$

左辺に注目すると、左辺はオイラー函数であるから

$$\Phi(q)=\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)=\sum_{m\in Z}(-1)^m q^{\frac{m(3m-1)}{2}} \qquad (2)$$ ■

## 4.2　五角数とは




五角数とは、正五角形の形に点を並べたときの、点の総数にあたる自然数のことである。五角数は無数にあり、中でも 1 が最も小さい。3 で割ると 1 余る整数を 1 から小さい順に足した数でもある。図で示すと左のようになる。
また、三角数、四角数も同様に点の総数を表している。

4.3　$N$ 角数

　$N$ を自然数とするとき、$N$ 角数は漸化式

$$a_1 = 1$$
$$a_n = a_{n-1} + (N-2)(n-1) + 1 \quad (n = 2,3,\cdots)$$

で定まる数列$a_n (n = 1,2,\cdots)$である。

$$a_1 = 1$$
$$a_2 = a_1 + (N-2) + 1 = (N-2) + 2$$
$$a_3 = a_2 + 2(N-2) + 1 = 2(N-2) + 1 + (N-2) + 2 = 3(N-2) + 3$$
$$a_4 = a_3 + 3(N-2) + 1 = 3(N-2) + 1 + 3(N-2) + 3 = 6(N-2) + 4$$
$$\vdots$$

一般項　$$a_n = (N-2)\binom{n}{2} + n \quad (n = 1,2,\cdots)$$

例　$N$=2,3,4,5,6 の場合

| | $N$ | $a_n$ | $n$=1,2,3,⋯ |
|---|---|---|---|
| 2 角数 | 2 | $n$ | 1　2　3　4　5⋯ |
| 3 角数 | 3 | $n(n+1)/2$ | 1　3　6　10　15⋯ |
| 4 角数 | 4 | $n^2$ | 1　4　9　16　25⋯ |
| 5 角数 | 5 | $n(3n-1)/2$ | 1　5　12　22　35⋯ |
| 6 角数 | 6 | $n(2n-1)$ | 1　6　15　28　45⋯ |

$N$=5 のとき、$a_n = n(3n-1)/2$となっており、(2)式の $q$ の指数と一致するので、(2)式は五角数定理と呼ばれる。

4.4　オイラーの五角数定理とその仲間たち

　オイラーの五角数定理はオイラー函数の展開式として有名であるが、五角数だけでなく、三角数、四角数についてもガウスによる定理があるので、紹介しておく。

<u>定理 4.2(ガウスの三角数定理)</u>　　$q$ を不定元とするとき、次の恒等式が成り立つ。

$$\frac{\Phi(q^2)^2}{\Phi(q)} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1-q^{2n}}{1-q^{2n-1}} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} q^{\frac{m(m+1)}{2}} = \sum_{m=0}^{\infty} q^{\frac{m(m+1)}{2}}$$

[証明]　ヤコビの三重積公式(1)式において、$z = q^{-1}$と置き換えると

$$左辺 = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)(1+q^{n-1})(1+q^n)$$

$$= \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1+q^{n-1})$$

この式を書き下すと

$$= (1-q^2)(1+q^0)(1-q^4)(1+q)(1-q^6)(1+q^2)\cdots$$

となり、$(1+q^0) = 2$であるので、2 を括りだしてまとめると

$$= 2\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1+q^n) \tag{3}$$

ここで

$$P^{odd}(n) = q(n)$$

左辺は奇数による分割数であり、右辺はストリクト(狭義)な分割数を示している。これを母函数用いて表すと次のようになる。

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1+q^k) = \prod_{k=1}^{\infty}\frac{1-q^{2k}}{1-q^k} = \prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-q^{2k-1}} \tag{4}$$

今示した式を用いると(3)式は

$$2\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1-q^{2n}}{1-q^{2n-1}}$$

となる。同様にヤコビの三重積公式(1)式の右辺を計算すると

$$右辺 = \sum_{m\in Z} q^{-m} q^{\frac{m(m+1)}{2}}$$

$$= \sum_{m\in Z} q^{\frac{m(m+1)}{2} - m}$$

計算範囲が整数全体、つまり$-\infty\sim\infty$なので書き直すと

$$= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} q^{\frac{m(m+1)}{2} - m} + \sum_{m=1}^{\infty} q^{\frac{-m(-m+1)}{2} - m}$$

$$= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} q^{\frac{m^2+m-2m}{2}} + \sum_{m=}^{\infty} q^{\frac{m^2-m+2m}{2}}$$

$$= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} q^{\frac{m(m-1)}{2}} + \sum_{m=}^{\infty} q^{\frac{m(m+1)}{2}}$$

第二項に注目すると

$$\sum_{m=1}^{\infty} q^{\frac{m(m-1)}{2}} = q^0 + q^{\frac{2(2-1)}{2}} + q^{\frac{3(3-1)}{2}} + \cdots$$

$$= 1 + \sum_{m=2}^{\infty} q^{\frac{m(m-1)}{2}}$$

$$= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} q^{\frac{m(m+1)}{2}}$$

以上より右辺は

$$2 + 2\sum_{m=1}^{\infty} q^{\frac{m(m+1)}{2}}$$

左辺と右辺をまとめると

$$\frac{\Phi(q^2)^2}{\Phi(q)} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1-q^{2n}}{1-q^{2n-1}} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} q^{\frac{m(m+1)}{2}} = \sum_{m=0}^{\infty} q^{\frac{m(m+1)}{2}}$$

以上のようにして**ガウスの三角数定理**が導かれた。■

<u>定理 4.3(ガウスの四角数定理)</u>　$q$ を不定元とするとき、次の恒等式が成り立つ。

$$\frac{\Phi(q)^2}{\Phi(q^2)} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1-q^n)}{(1+q^n)} = \sum_{m \in Z} (-1)^m q^{m^2}$$

[証明]　ヤコビの三重積公式(1)式において$q = q^2$　$z = -q^{-1}$と置き換えると

$$\text{左辺} = \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{2n})(1+q^{-1}q^{2n})(1+qq^{2n-2})$$

$$= \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{2n})(1-q^{2n-1})(1-q^{2n-1})$$

$$= \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n) \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{2n-1})$$

式変形(4)より

$$= \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n) \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+q^n}$$

$$= \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1-q^n)}{(1+q^n)} = \frac{\Phi(q)^2}{\Phi(q^2)}$$

同様に右辺を計算すると

$$\text{右辺} = \sum_{m \in Z} -q^{-m} q^{m(m+1)}$$

$$= \sum_{m \in Z} (-1)^m q^{m^2+m-m}$$

$$= \sum_{m \in Z} (-1)^m q^{m^2}$$

左辺と右辺をまとめると

$$\frac{\Phi(q)^2}{\Phi(q^2)} = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1-q^n)}{(1+q^n)} = \sum_{m\in Z}(-1)^m q^{m^2}$$

以上のようにして**ガウスの四角数定理**が導かれた。■

# 5　ヤコビの三重積公式とオイラーの五角数定理の応用

## 5.1　ガウスの三角数定理の一般化

ヤコビの三重積公式の両辺を $z$ について微分をする。

$$\frac{d}{dz}(\text{左辺}) = \frac{d}{dz}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)(1+zq^n)(1+z^{-1}q^{n-1})$$

$$= \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)\frac{d}{dz}\prod_{n=1}^{\infty}(1+zq^n)(1+z^{-1}q^n)(1+z^{-1})$$

$$= \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)\frac{d}{dz}\prod_{n=1}^{\infty}(1+z^{-1})(1+(z+z^{-1})q^n+q^{2n})$$

ここで、$1+(\mathrm{z}+z^{-1})q^k+q^{2k} = F_k$とおくと

$$= \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)\frac{d}{dz}\{(1+z^{-1})\cdot F_1\cdot F_2\cdot F_3\cdots\}$$

$$= \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)\left\{-z^{-2}\prod_{k=1}^{\infty}F_k + (1+z^{-1})(1-z^{-2})\,q\prod_{k\neq 1}^{\infty}F_k \right.$$

$$\left. + (1+z^{-1})(1-z^{-2})q^2\prod_{k\neq 2}^{\infty}F_k + \cdots \right\} \quad (5)$$

次に$F_1=0$とする。そのために$z\to -q$とすると、上記の式において、$F_1$を含む項は消去されるので、中括弧内の第２項目のみ残る。計算すると

$$= \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)\,(1-q^{-1})(1-q^{-2})q\prod_{k\neq 1}^{\infty}(1+(-q-q^{-1})q^k+q^{2k})$$

$$= \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)\,(1-q^{-1})(1-q^{-2})q\prod_{k\neq 1}^{\infty}(1-q^{k+1})(1-q^{k-1})$$

$$= \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)\,(1-q^{-1})(1-q^{-2})q\prod_{k\neq 1}^{\infty}(1-q^{k+1})\prod_{k\neq 1}^{\infty}(1-q^{k-1})$$

ここで

$$\prod_{k\neq 1}^{\infty}(1-q^{k-1}) = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n) = \Phi(q)$$

なので

$$= \Phi(q)^2(1-q^{-1})(1-q^{-2})q\prod_{k=2}^{\infty}(1-q^{k+1})$$

$$= \Phi(q)^2(q-1)(q^2-1)q^{-2}\prod_{k=2}^{\infty}(1-q^{k+1})$$
$$= \Phi(q)^2(1-q)(1-q^2)q^2\prod_{k=2}^{\infty}(1-q^{k+1})$$
$$= q^{-2}\Phi(q)^2\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-q^k\right) = q^{-2}\Phi(q)^3$$

同様にヤコビの三重積公式の右辺も計算すると

$$\frac{d}{dz}(\text{右辺}) = \frac{d}{dz}\sum_{m\in Z} z^m q^{\frac{m(m+1)}{2}}$$
$$= \sum_{m\in Z} m z^{m-1} q^{\frac{m(m+1)}{2}} \qquad (6)$$

左辺と同様に$z \to -q$と置き換えると

$$= \sum_{m\in Z} m(-q)^{m-1} q^{\frac{m(m+1)}{2}}$$
$$= \sum_{m\in Z} (-1)^{m-1} m q^{\frac{m^2+m+2m-2}{2}}$$
$$= \sum_{m\in Z} (-1)^{m-1} m q^{\frac{m^2+3m-2}{2}}$$
$$= \sum_{m\in Z} (-1)^{m-1} m q^{\frac{m(m+3)}{2}-1}$$

左辺と右辺をまとめると

$$q^{-2}\Phi(q)^3 = \sum_{m\in Z} (-1)^{m-1} m q^{\frac{m(m+3)}{2}-1}$$

計算範囲を整数全体からではなく 0 から∞にしてまとめると

$$\Phi(q)^3 = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m (2m+1) q^{\frac{m(m+1)}{2}}$$

右辺の $q$ の指数に注目すると、$\frac{m(m+1)}{2}$と三角数になっているのがわかる。

以上より次の定理が得られた。

<u>定理 5.1</u>　　$q$ を不定元とするとき、次の恒等式が成り立つ。

$$\Phi(q)^3 = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m (2m+1) q^{\frac{m(m+1)}{2}}$$

上の計算では$F_1 = 0$としたが、同様に$F_2 = 0$ の場合や$F_3 = 0$ の場合を計算してみる。

まず(5)式において$F_2 = 0$とする。そのために$z = -q^2$と代入すると$F_2$を含む項は消去されるので中括弧内の第３項のみ残る。計算すると

$$左辺 = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)(1-q^{-2})(1-q^{-4})q^2\prod_{k\neq 2}F_k$$

乗積の範囲が $k$=2 を除く、1〜∞なので、$k$=1 の項を前に出すと

$$= \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)\,(1-q^{-2})(1-q^{-4})q^2(1-(q^2+q^{-2})q+q^2)\prod_{k=3}^{\infty}(1-q^{k+2})(1-q^{k-2})$$

$$= \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)\,(1-q^{-2})(1-q^{-4})q^2(1-q^3)(1-q^{-1})\prod_{k=3}^{\infty}(1-q^{k+2})\prod_{k=3}^{\infty}(1-q^{k-2})$$

ここで、

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n) = \prod_{k=3}^{\infty}(1-q^{k-2}) = \Phi(q)$$

であるので、書き直すと

$$= \Phi(q)^2(1-q^{-2})(1-q^{-4})q^2(1-q^3)(1-q^{-1})\prod_{k=3}^{\infty}(1-q^{k+2})$$

$$= q^{-5}\Phi(q)^2(q^2-1)(q^4-1)(1-q^3)(q-1)\prod_{k=3}^{\infty}(1-q^{k+2})$$

$$= -q^{-5}\Phi(q)^2(1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)\prod_{k=3}^{\infty}\left(1-q^{k+2}\right)$$

$$= -q^{-5}\Phi(q)^2\prod_{k=1}^{\infty}(1-q^k) = -q^{-5}\Phi(q)^3$$

同様に(6)の式において$z \to -q^2$として計算すると

$$右辺 = \sum_{m\in Z} m(-q^2)^{m-1}q^{\frac{m(m+1)}{2}}$$

$$= \sum_{m\in Z} m(-1)^{m-1}q^{2m-2}q^{\frac{m(m+1)}{2}}$$

$$= \sum_{m\in Z} m(-1)^{m-1}q^{\frac{m^2+m+4m-4}{2}}$$

$$= \sum_{m\in Z} m(-1)^{m-1}q^{\frac{m^2+5m-4}{2}}$$

$$= \sum_{m\in Z} m(-1)^{m-1}q^{\frac{m(m+5)}{2}-2}$$

左辺と右辺をまとめると

$$-q^{-5}\Phi(q)^3 = \sum_{m\in Z} m(-1)^{m-1}q^{\frac{m(m+5)}{2}-2}$$

$m$ に関する和の範囲を整数全体ではなく 0 から∞にしてまとめると

$$\Phi(q)^3=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m(2m+1)q^{\frac{m(m+1)}{2}}$$

$F_1=0$とおいたときと同じ結果になってしまった。

$F_3=0$のときも繰り返しになるので省略するが、同じ結果が得られた。

# 6　六角数定理

定理 6.1　　$q$ を不定元とするとき、次の恒等式が成り立つ。

$$\frac{\Phi(q)\Phi(q^4)}{\Phi(q^2)}=\sum_{m\in Z}(-1)^m q^{m(2m-1)}$$

右辺の $q$ の指数が六角数 $m(2m\text{-}1)$となっているので、これが**六角数定理**と呼ぶ。

[証明]　ヤコビの三重積公式において、$\mathrm{z}=-q^{-3}, q=q^4$と置き換える。

$$\begin{aligned}
\text{右辺}&=\sum_{m\in Z}(-1)^m q^{-3m}q^{2m(m+1)}\\
&=\sum_{m\in Z}(-1)^m q^{2m^2+2m-3m}\\
&=\sum_{m\in Z}(-1)^m q^{2m^2-m}\\
&=\sum_{m\in Z}(-1)^m q^{m(2m-1)}
\end{aligned}$$

同様に左辺を計算する。

$$\begin{aligned}
\text{左辺}&=\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{4n})(1-q^{-3}q^{4n})(1-q^3q^{4n-4})\\
&=\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{4n})(1-q^{4n-3})(1-q^{4n-1})
\end{aligned}$$

ここで分母、分子に$(1-q^{4n-2})$をかけると

$$=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1-q^{4n})(1-q^{4n-1})(1-q^{4n-2})(1-q^{4n-3})}{(1-q^{4n-2})}$$

分子に注目すると

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{4n})(1-q^{4n-1})(1-q^{4n-2})(1-q^{4n-3})=\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)=\Phi\,(q)$$

となる。書き直すと、

$$= \Phi(q)\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1-q^{4n-2})}$$

$$= \Phi(q)\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+q^{2n-1})(1-q^{2n-1})}$$

ここで(4)での変形を用いると

$$= \Phi(q)\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1+q^{n})}{(1+q^{2n-1})}$$

$$= \Phi(q)\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n}) \tag{5}$$

ここで$\Phi(q^4)$について考える。

$$\Phi(q^4) = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{4n}) = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1+q^{2n}) = \Phi(q^2)\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n})$$

つまり

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n}) = \frac{\Phi(q^4)}{\Phi(q^2)}$$

以上より(5)式は

$$\Phi(q)\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n}) = \frac{\Phi(q)\Phi(q^4)}{\Phi(q^2)}$$

左辺と右辺をまとめると

$$\frac{\Phi(q)\Phi(q^4)}{\Phi(q^2)} = \sum_{m\in Z}(-1)^m q^{m(2m-1)}$$

となって、定理 6.1 は証明された。■

## 7　今後の展望

本研究で、ヤコビの三重積公式とオイラーの五角数定理を用いて、その一般化として六角数定理を導いた。本研究の目標は $N$ 角数定理の一般項をオイラー函数を用いて表すものである。三～六角数定理までは得られているので、規則性を発見し、一般項を求めるはずだったが、規則性を見つけ出せずに、結果を残せなかったことが大変残念である。

題材として取り上げた $N$ 角数定理は存在すると思うので、今後の課題として七角数定理以降を導き、規則性を発見してみたいと思う。

## 8　参考文献


[1]　G.アンドリュース・K.エリクソン：　『整数の分割』, 佐藤文宏訳, 数学書房, 2006.

[2]　野海正俊：　『オイラーに学ぶ―無限乗積序説への誘い』, 日本評論社，2007.

[3]　山田裕史：　『組合せ論プロムナード』, 日本評論社，2009.