

# 旗多様体上の軌道と表現論

## Orbits on Flag Varieties and Representation Theory: An Overview

西山亨 (青山学院大学理工)\*

2025年9月18日

### 概要

旗多様体について基礎的な性質や事項を紹介した後、旗多様体と表現論や組合せ論とのさまざまな関わりについて概観する。後半では、近年研究を進めている二重旗多様体について得られた成果を報告する。

## 1 はじめての旗多様体

**旗多様体** (flag variety/ flag manifold) は表現論のいたるところに現れるが、馴染みのない人も多いかもしれない。そこで、この講演の主役である旗多様体について基本事項を手短かにまとめておこう。

複素数体  $\mathbb{C}$  上の代数多様体として考えると、旗多様体は、**簡約代数群の等質空間であってコンパクトなもの**として特徴付けられる。例を見てみよう。

たとえば  $(n-1)$  次元の**射影空間**  $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C}) = \mathbb{P}(\mathbb{C}^n)$  は旗多様体の一種である。 $V = \mathbb{C}^n$  には行列の積によって一般線型群  $GL_n(\mathbb{C})$  が働くが、その作用は自然に  $V$  の一次元部分空間全体、つまり  $\mathbb{P}(V)$  上の推移的な作用を引き起こす。たとえば、基本ベクトル  $e_1$  の生成する部分空間  $E_1 = \langle e_1 \rangle$  の固定部分群を計算してみるとそれは

$$P = P_{(1, n-1)} = \left\{ g = \begin{pmatrix} a & * \\ 0 & b \end{pmatrix} \in GL_n(\mathbb{C}) \mid a \in \mathbb{C}^\times, b \in GL_{n-1}(\mathbb{C}) \right\}$$

となるから  $*1$ ,  $\mathbb{P}(V) \simeq GL_n(\mathbb{C})/P_{(1, n-1)}$  であって、射影空間はコンパクトな等質多様体、つまり旗多様体である。同様に  $V = \mathbb{C}^n$  の  $d$  次元部分空間の全体である **Grassmann 多様体**  $Gr_d(V) \simeq GL_n(\mathbb{C})/P_{(d, n-d)}$  も旗多様体の一種である。

さまざまな次元の部分空間を考えると、それらの部分空間の「配置空間」(部分空間の相対的位置関係の空間) には  $GL(V)$  が自然に働く。このような配置全体を考え

\* 〒252-5258 相模原市中央区淵野辺 5-10-1 青山学院大学理工学部

e-mail: kyo.nishiyama@gmail.com

web: [https://www.math.aoyama.ac.jp/users/kyo/index\\_math.html](https://www.math.aoyama.ac.jp/users/kyo/index_math.html)

本原稿は、2025年度日本数学会秋季総合分科会のアブストラクトに加筆したものである。また、本研究は科研費(課題番号:25K06938)の助成を受けて行われた。

2020 Mathematics Subject Classification: 14M15, 22E46, 14L30, 17B08

キーワード: 旗多様体, 二重旗多様体, 対称対, Robinson-Schensted 対応, Steinberg 写像, 冪零多様体

$*1$  一般に  $P_{(a_1, a_2, \dots, a_\ell)}$  で対角ブロックのサイズが  $a_1, a_2, \dots, a_\ell$  のブロック上半三角行列全体のなす  $GL_n(\mathbb{C})$  の部分群を表す。 $(a_1, \dots, a_\ell)$  は  $n$  の合成であって、このような部分群を放物型部分群と呼ぶ。

てしまうと等質空間にはならないが、そのうちで  $\dim V_k = k$  であるような部分空間の増大列  $V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_k \subset \dots \subset V_n = V$  からなる配置全体は等質的になり、コンパクト複素多様体の構造が入る。この部分空間の増大列  $(V_k)_{k=0}^n$  を**旗**と呼び、旗の全体を**完全旗多様体** (complete —) と呼ぶ。完全旗多様体を  $X = \mathcal{F}l(\mathbb{C}^n)$  で表そう。射影空間や Grassmann 多様体は完全旗の一部分を抜きだしたもののなので**部分旗多様体**と呼ばれることもある<sup>\*2</sup>。旗の中でも、標準基底を順番に追加してできる旗  $E = (E_k)_{k=0}^n, E_k = \text{span}_{\mathbb{C}}\{e_1, \dots, e_k\}$  を**標準旗**と呼ぶが、この旗の  $GL_n(\mathbb{C})$  における固定部分群は上半三角行列の全体からなる。この部分群は**Borel 部分群**と呼ばれ、しばしば  $B_n(\mathbb{C})$  と書く。したがって完全旗多様体は等質空間として  $X = GL_n(\mathbb{C})/B_n(\mathbb{C})$  と表されることになる。一般の(部分)旗多様体は  $B_{\mathbb{C}} = B_n(\mathbb{C})$  を含むような  $G_{\mathbb{C}} = GL_n(\mathbb{C})$  の部分群  $P_{\mathbb{C}}$  を取って  $G_{\mathbb{C}}/P_{\mathbb{C}}$  と書くことができる。この  $P_{\mathbb{C}}$  を**放物型部分群** (parabolic subgroup) と呼ぶ。

$GL_n(\mathbb{C})$  のコンパクト実形  $K_{\mathbb{R}} = U_n$  ( $n$  次ユニタリ群) を取ると、 $K_{\mathbb{R}}$  もまた  $X = G_{\mathbb{C}}/B_{\mathbb{C}}$  に推移的に働き、標準旗の固定部分群は  $K_{\mathbb{R}}$  の極大コンパクトトーラス  $T_{\mathbb{R}} = U_1^n = \{\text{diag}(z_1, \dots, z_n) \mid |z_k| = 1\}$  になる。したがって旗多様体のコンパクト群による商多様体としての表示  $X \simeq K_{\mathbb{R}}/T_{\mathbb{R}} = U_n/U_1^n$  を得る。

以上紹介したのは A 型の旗多様体であるが、任意の連結な簡約代数群  $G_{\mathbb{C}}$  に対して、連結な可解部分群のうち極大なものを  $B_{\mathbb{C}}$  と書くと、 $X = G_{\mathbb{C}}/B_{\mathbb{C}}$  はコンパクト複素多様体となり、 $G_{\mathbb{C}}$  が古典型の場合には、A 型の場合と同じように、ある種の旗(たとえば**等方的部分空間のなす旗**)の全体と同型になる。これが一般の**完全旗多様体**である。極大連結可解部分群  $B_{\mathbb{C}}$  を**Borel 部分群**と呼び、 $B_{\mathbb{C}}$  を含むような部分群  $P_{\mathbb{C}}$  を**放物型部分群**と呼ぶ。上で紹介した  $GL_n(\mathbb{C})$  の部分群たちはそのうちの特殊なものである。このアブストラクトでは**部分旗多様体**  $G_{\mathbb{C}}/P_{\mathbb{C}}$  も単に旗多様体と呼ぶ<sup>\*3</sup>。

## 2 簡約代数群とその部分群, 実形

旗多様体を考える際に複素リー群  $G_{\mathbb{C}}$  を必ずしも代数群に限る必要はないが、以下、記述を簡単にするため、本稿では  $G_{\mathbb{C}}$  は常に**連結な簡約代数群**であると仮定する。また、 $G_{\mathbb{C}}$  の**実形**(実数体に値を持つ有理点のなすリー群)を  $G_{\mathbb{R}}$  で表す。<sup>\*4</sup>

さらに、本稿ではほとんどの場合、一般線型群  $G_{\mathbb{C}} = GL_n(\mathbb{C})$  を考える。したがって実形としては、 $G_{\mathbb{R}} = GL_n(\mathbb{R})$  や  $U(p, q)$  ( $n = p + q$ ) (不定値ユニタリ群)などを考えることになる。また  $n = 2m$  が偶数のときには実形として  $G_{\mathbb{R}} = GL_m(\mathbb{H})$  (四元数体  $\mathbb{H}$

<sup>\*2</sup> 英語では partial flag variety. 紛らわしいが、部分多様体ではないので用語にご注意。不完全旗多様体 (incomplete —) と呼ばれることもあるが、よい用語とは思えない。

<sup>\*3</sup> 文献によっては完全旗多様体のみを旗多様体と呼ぶものもあるので少しだけ注意が必要である。

<sup>\*4</sup> 簡約性は本質的であるが、必ずしも代数群ではないような実リー群に対して、本稿の議論はそのまま通用することが多い。連結性についても有限個の連結成分を持つような場合には有限群の理論を援用すればすむこともある。ただ、一般の非連結、非線型な実リー群の表現論は完全に理解されているとは言い難い。

上の一般線型群) を考えることもできる. これらは一般に非コンパクト, 非連結な実リー群である.

実リー群  $G_{\mathbb{R}}$  は極大コンパクト部分群  $K_{\mathbb{R}}$  を持ち, その複素化を  $K_{\mathbb{C}} \subset G_{\mathbb{C}}$  で表わす.  $G_{\mathbb{C}}$  のコンパクト実形は  $G_{\mathbb{C}}$  の極大コンパクト部分群である.  $G_{\mathbb{R}}$  の Cartan 対合 (Cartan involution) を  $\theta$  と表すと,  $K_{\mathbb{R}} = G_{\mathbb{R}}^{\theta}$  はその固定点部分群であって,  $G_{\mathbb{R}}/K_{\mathbb{R}}$  はリーマン対称空間である [堀田良 19]. 対称性を表す自己同型は  $\theta$  で与えられるので, その複素化  $K_{\mathbb{C}} = G_{\mathbb{C}}^{\theta}$  を  $G_{\mathbb{C}}$  の対称部分群 (symmetric subgroup), そして  $(G_{\mathbb{R}}, K_{\mathbb{R}})$  や  $(G_{\mathbb{C}}, K_{\mathbb{C}})$  を対称対 (symmetric pair) と呼ぶ.

$G_{\mathbb{C}} = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$  のとき,  $G_{\mathbb{R}}, K_{\mathbb{R}}, K_{\mathbb{C}}$  などをまとめて表にしておこう.

$G_{\mathbb{R}}$	$K_{\mathbb{R}}$	$K_{\mathbb{C}}$	条件
$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$	$\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$	$\mathrm{O}_n(\mathbb{C})$	
$\mathrm{U}(p, q)$	$\mathrm{U}_p(\mathbb{C}) \times \mathrm{U}_q(\mathbb{C})$	$\mathrm{GL}_p(\mathbb{C}) \times \mathrm{GL}_q(\mathbb{C})$	$n = p + q$
$\mathrm{GL}_m(\mathbb{H})$	$\mathrm{USp}_{2m}$	$\mathrm{Sp}_{2m}(\mathbb{C})$	$n = 2m$

ここで  $\mathrm{USp}_{2m}$  は  $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C})$  のコンパクト実形であるユニタリシンプレクティック群を表す. また表中の群のうち  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$  は非連結であって, 連結成分を 2 つ持つことに注意しておく.

とくに何も断らなければ,  $G_{\mathbb{C}}$  の Borel 部分群のうち, Cartan 対合  $\theta$  で安定なものを  $B_{\mathbb{C}}$  と書く. また  $B_{\mathbb{C}}$  の極大な代数的トーラス (以下, 単にトーラスという) のうちやはり  $\theta$  安定なものを選びそれを  $T_{\mathbb{C}}$  と書く.  $B_{\mathbb{C}} = T_{\mathbb{C}} \times U_{\mathbb{C}}$  は Levi 分解で  $U_{\mathbb{C}}$  は  $B_{\mathbb{C}}$  の冪単根基である.  $T_{\mathbb{C}}$  は  $G_{\mathbb{C}}$  の極大トーラスでもあり, Cartan 部分群とも言う.

### 3 旗多様体上の軌道の有限性

旗多様体  $X = G_{\mathbb{C}}/B_{\mathbb{C}}$  には  $G_{\mathbb{C}}$  の部分群が自然に作用するが, 上に登場する Borel 部分群  $B_{\mathbb{C}}$  や対称部分群 (極大コンパクト部分群の複素化) である  $K_{\mathbb{C}}$ , 極大トーラス  $T_{\mathbb{C}}$  の作用などは非常に興味深い. あとで必要になるので概略をまとめておこう.

#### 3.1 Borel 部分群の作用と Bruhat 分解

$X = G_{\mathbb{C}}/B_{\mathbb{C}}$  上の  $B_{\mathbb{C}}$  軌道は両側剰余類分解と同一視でき, よく知られているように, Bruhat 分解によって

$$X/B_{\mathbb{C}} \simeq B_{\mathbb{C}} \backslash G_{\mathbb{C}}/B_{\mathbb{C}} \simeq W_G$$

のように Weyl 群  $W_G$  を用いて分類される. ここで  $W_G$  は  $G_{\mathbb{C}}$  のリー環  $\mathfrak{g}$  のルート系から定まる Weyl 群を表し, とくに有限群であるから,  $X$  における  $B_{\mathbb{C}}$  軌道も有限個である. ルート系を持ち出すといささか抽象的になるが, Weyl 群を群論的に  $W_G = N_{G_{\mathbb{C}}}(T_{\mathbb{C}})/T_{\mathbb{C}}$  と定義することもできる. ただし  $T_{\mathbb{C}}$  は  $B_{\mathbb{C}}$  に含まれる  $G_{\mathbb{C}}$  の極大トーラス (Cartan 部分群),  $N_{G_{\mathbb{C}}}(T_{\mathbb{C}})$  は  $G_{\mathbb{C}}$  における  $T_{\mathbb{C}}$  の正規化部分群を表す. このように  $W_G$  を表しておくと, 両側剰余類  $B_{\mathbb{C}}wB_{\mathbb{C}}$  の代表元として  $N_{G_{\mathbb{C}}}(T_{\mathbb{C}})$  の元をとることができ, 剰余類分解

$$G_{\mathbb{C}} = \bigsqcup_{w \in W_G} B_{\mathbb{C}}wB_{\mathbb{C}}$$

は具体的で理解しやすくなる．両側剰余類の  $X$  における像  $C_w = B_{\mathbb{C}}wB_{\mathbb{C}}/B_{\mathbb{C}}$  を **Bruhat 胞体**と呼ぶが<sup>\*5</sup>,  $B_{\mathbb{C}}$  軌道による分解  $X = \bigsqcup_{w \in W_G} C_w$  が旗多様体の胞体分割を与えることになる．また,  $X$  上の極大トーラス  $T_{\mathbb{C}}$  による固定点は各 Bruhat 胞体にちょうど一つずつ存在し,  $C_w$  における固定点が  $wB_{\mathbb{C}}/B_{\mathbb{C}}$  ( $w \in W_G$ ) である．トーラス固定点は同変コホモロジーの計算などによく現れる．

### 3.2 対称部分群 $K_{\mathbb{C}}$ による軌道の有限性

旗多様体  $X$  上の  $K_{\mathbb{C}}$  軌道  $X/K_{\mathbb{C}}$  の分類は Richardson-Springer によって与えられた [RS90]．彼等の結果は (本質的には同じだが) いくつかの異なって見える分類方法を与える．本稿で詳細に述べるのは不可能だが, 大略次のような分類である．

- (1)  $X/K_{\mathbb{C}} \simeq \coprod_{T_i} W_{G_{\mathbb{C}}}(T_i)/W_{K_{\mathbb{C}}}(T_i), \{T_i\}_{i=1}^{\ell}: \theta$  安定な極大トーラスの  $K_{\mathbb{C}}$  共役類
- (2)  $T_{\mathbb{C}}$  を  $\theta$  安定な  $G_{\mathbb{C}}$  の極大トーラスとすると,  $X/K_{\mathbb{C}} \simeq (\tau(G_{\mathbb{C}}) \cap N_{G_{\mathbb{C}}}(T_{\mathbb{C}}))/T_{\mathbb{C}}$ , ただし  $\tau(G_{\mathbb{C}}) = \{\tau(x) = x\theta(x^{-1}) \mid x \in G_{\mathbb{C}}\}$ , であって  $N_{G_{\mathbb{C}}}(T_{\mathbb{C}})$  への  $T_{\mathbb{C}}$  の作用は  $\theta$ -twisted な作用  $g \cdot x = gx\theta(g^{-1})$  である．

簡単な計算により  $\theta(\tau(x)) = \tau(x)^{-1}$  が確かめられる．このような  $\tau(x)$  を  **$\theta$ -twisted な対合**と呼ぶ．定義より  $W_{G_{\mathbb{C}}}(T_{\mathbb{C}}) = N_{G_{\mathbb{C}}}(T_{\mathbb{C}})/T_{\mathbb{C}}$  なので, 上の分類の (2) における代表元は**ほぼ**  $W_{G_{\mathbb{C}}}(T_{\mathbb{C}})$  における  $\theta$ -twisted な対合であることを意味している． $G_{\mathbb{C}} = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), K_{\mathbb{C}} = \mathrm{O}_n(\mathbb{C})$  のときには, 実際に  $W_{G_{\mathbb{C}}}(T_{\mathbb{C}}) \simeq S_n$  における  $\theta$ -twisted な対合と  $X/K_{\mathbb{C}}$  軌道は一対一に対応するが, これを  $G_{\mathbb{C}} = \mathrm{SL}_n(\mathbb{C}), K_{\mathbb{C}} = \mathrm{SO}_n(\mathbb{C})$  とすると, 一部の  $\theta$ -twisted な対合には  $K_{\mathbb{C}}$  軌道が2つずつ対応していることが分かり, 微妙な違いが生ずる．(この場合には  $\theta$ -twisted 対合と対称群  $S_n$  の対合とは一対一に対応している．) [RS94, §10.2, §10.3]

大島・松木による組合せ論的な  $K_{\mathbb{C}}$  軌道の分類も知られている．[MO90] これは上記  $\theta$ -twisted 対合に符号などの付加的な情報をつけ加えて  $X/K_{\mathbb{C}}$  を記述するもので **clan による分類**<sup>\*6</sup> と呼ばれている．

Richardson-Springer による  $K_{\mathbb{C}}$  軌道の分類と有限性とは別の, まったく異なる  $K_{\mathbb{C}}$  軌道の分類もある．それは  $X$  の余接束  $T^*X$  からのモーメント写像を経由し,  $\mathfrak{g}$  の冪零随伴軌道とその Springer ファイバーを用いるものである．軌道の有限性は冪零軌道の有限性 (Kostant-Rallis による) と Springer ファイバーの有限性から示される.<sup>\*7</sup> 詳細については [CNT12] を参照して欲しい．分類の手法については, 二重旗多様体の場合に §7.3 でもう少し詳しく解説する．

<sup>\*5</sup> Schubert 胞体と呼ばれることもある．また  $\overline{C}_w$  は Schubert 多様体である．

<sup>\*6</sup> clan は部族を意味する．

<sup>\*7</sup> 軌道の有限性のみであれば  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{b}$  となることから簡単に従うのでさほど重要ではなく, 冪零軌道との対応の方がより重要である．

### 3.3 $G_{\mathbb{R}}$ 軌道と松木対応

$G_{\mathbb{R}}$  を  $G_{\mathbb{C}}$  の実形とすると,  $X = G_{\mathbb{C}}/B_{\mathbb{C}}$  上の  $G_{\mathbb{R}}$  軌道も有限であることが青本, Wolf によって知られていた. [Aom66], [Wol69] 対称部分群  $K_{\mathbb{C}}$  は  $G_{\mathbb{R}}$  の極大コンパクト群の複素化なので,  $K_{\mathbb{C}}$  軌道と  $G_{\mathbb{R}}$  軌道の間には関係性があるはずだが, 松木によって, 両者の間には閉包関係を逆転するような全単射対応があることが明らかになった [Mat79].

**Theorem 3.1 (松木対応)** 上の設定の元に, 旗多様体  $X = G_{\mathbb{C}}/B_{\mathbb{C}}$  上の  $K_{\mathbb{C}}$  軌道と  $G_{\mathbb{R}}$  軌道の間には閉包関係を逆にするような全単射対応が存在する.

$$K_{\mathbb{C}} \backslash G_{\mathbb{C}}/B_{\mathbb{C}} \xrightarrow{\sim} G_{\mathbb{R}} \backslash G_{\mathbb{C}}/B_{\mathbb{C}}$$

この全単射対応によって  $K_{\mathbb{C}}$  軌道  $\mathbb{O}$  と  $G_{\mathbb{R}}$  軌道  $\mathcal{O}$  が対応するための条件は  $O = \mathbb{O} \cap \mathcal{O}$  がコンパクトであることであり, そのとき共通部分  $O$  は唯一つの  $K_{\mathbb{R}}$  軌道である.

$K_{\mathbb{C}}$  の作用は既約代数多様体  $X = G_{\mathbb{C}}/B_{\mathbb{C}}$  への代数群の作用であり,  $K_{\mathbb{C}}$  軌道は有限個しかないので, 唯一つの稠密な開軌道を持つ. 松木対応を考慮すると, これは閉  $G_{\mathbb{R}}$  軌道が唯一つであることを意味している. また, (複数ある) 閉  $K_{\mathbb{C}}$  軌道のそれぞれに対して,  $X$  の開  $G_{\mathbb{R}}$  軌道が対応するが,  $X$  は複素多様体なので, これらの開  $G_{\mathbb{R}}$  軌道は複素構造を持つ. このように松木対応は軌道の非自明な性質を明らかにする魔法のような道具である.

有名で簡単な例ではあるが,  $SL_2(\mathbb{R})$  における例を紹介しておこう.

**Example 3.2.**  $G_{\mathbb{C}} = SL_2(\mathbb{C})$  とし,  $B_{\mathbb{C}} = \left\{ \begin{pmatrix} t_1 & u \\ 0 & t_2 \end{pmatrix} \mid t_1, t_2, u \in \mathbb{C}, t_1 t_2 = 1 \right\}$  を Borel 部分群とする. すでに説明したように  $X = G_{\mathbb{C}}/B_{\mathbb{C}} \simeq \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  は複素射影直線である. また  $G_{\mathbb{C}}$  の  $X$  への作用は一次分数変換で与えられていることに注意する.

$G_{\mathbb{R}} = SL_2(\mathbb{R})$  とおくと,  $K_{\mathbb{R}} = SO_2(\mathbb{R})$  で,  $K_{\mathbb{C}} = SO_2(\mathbb{C})$  は極大トーラスである.

$G_{\mathbb{R}} = SL_2(\mathbb{R})$  の  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  への一次分数変換は古典的によく知られており, その軌道は上半平面  $\mathcal{O}^+ = H^+$  と下半平面  $\mathcal{O}^- = H^-$  および実射影直線  $\mathcal{O}^0 = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  の3つである.  $H^{\pm}$  は複素構造を持っており, 保型形式論などでその複素解析的な構造は重要な役割を果たす. 一方

$$K_{\mathbb{C}} = SO_2(\mathbb{C}) = \left\{ g = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{C}, a^2 + b^2 = 1 \right\}$$

は  $g$  に  $a + ib$  を対応させることによって複素トーラス  $\mathbb{C}^{\times}$  と同型であり,  $g$  による一次分数変換は  $\pm i$  を固定し, 適当な  $g$  によって  $\infty$  を含むその他の複素数は互いに写り合うことがわかる. つまり  $K_{\mathbb{C}}$  軌道は  $\mathbb{O}^{\pm} = \{\pm i\}$  と  $\mathbb{O}^0 = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{i, -i\}$  である. これより

$$\mathcal{O}^+ \cap \mathbb{O}^+ = \{i\}, \quad \mathcal{O}^0 \cap \mathbb{O}^0 = \mathbb{P}^1(\mathbb{R}), \quad \mathcal{O}^- \cap \mathbb{O}^- = \{-i\}$$

であるが, 対応する軌道の共通部分はそれぞれ  $K_{\mathbb{R}} = SO_2(\mathbb{R})$  の一次分数変換による軌道になっていることが分かる.

## 4 旗多様体と表現論

### 4.1 Borel-Weil の定理と離散系列表現

旗多様体  $X$  はコンパクトなので、その上の代数的な関数（正則関数）は定数関数だけである。しかし、 $X$  上の直線束  $L \rightarrow X$  をとってその切断を考えると  $G$  の有限次元既約表現がすべて得られることを Borel と Weil が見いだした。これが有名な **Borel-Weil の定理**である。直線束は  $B_{\mathbb{C}}$  の一次元既約指標  $\mathbb{C}_{-\lambda}$  をとって、 $L_{\lambda} = G_{\mathbb{C}} \times_{B_{\mathbb{C}}} \mathbb{C}_{-\lambda} \rightarrow X$  と表される。 $\lambda$  を整ウェイトと呼ぶが、この整ウェイト  $\lambda$  がある正值性を持つとき、直線束の大域切断全体  $V_{\lambda} = \Gamma(G_{\mathbb{C}} \times_{B_{\mathbb{C}}} \mathbb{C}_{-\lambda})^*$  は  $G_{\mathbb{C}}$  の最高ウェイトが  $\lambda$  の有限次元既約表現になる。ただし  $(\cdot)^*$  は双対表現を表す。

これを解析的に述べると次のようになる。コンパクト複素多様体  $X = K_{\mathbb{R}}/T_{\mathbb{R}}$  上の正則直線束  $L_{\lambda} \rightarrow X$  の複素解析的な正則切断全体は有限次元であって、コンパクト群  $K_{\mathbb{R}}$  の有限次元既約表現になる。コンパクト群  $K_{\mathbb{R}}$  にはあらかじめ複素構造はないので  $X = K_{\mathbb{R}}/T_{\mathbb{R}}$  が複素多様体になることや、正則直線束の（コーシー・リーマン関係式を満たす）複素正則切断が既約表現を与えることはまったく非自明である。

非コンパクト群の無限次元ユニタリ表現の場合に、Borel-Weil の定理の一般化を押し進めたのが Harish-Chandra と Kostant, Langlands である。

$G_{\mathbb{R}}$  を非コンパクトな連結実簡約リー群、その極大コンパクト部分群を  $K_{\mathbb{R}}$  とする。たとえば、 $G_{\mathbb{R}} = \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$  をシンプレクティック群とすると、その極大コンパクト部分群はユニタリ群  $K_{\mathbb{R}} = \mathrm{U}_n(\mathbb{C})$  となる。 $G_{\mathbb{R}}$  上の Haar 測度に関して二乗可積分な関数全体  $L^2(G_{\mathbb{R}})$  は自然にヒルベルト空間になるが、左移動により  $G_{\mathbb{R}}$  は自然に  $L^2(G_{\mathbb{R}})$  に作用して  $G_{\mathbb{R}}$  のユニタリ表現を与える。これを**左正則表現**と呼ぶ。左正則表現  $L^2(G_{\mathbb{R}})$  を既約分解したとき、離散スペクトルとなって現れる既約な部分表現を  $G_{\mathbb{R}}$  の**離散系列表現** (discrete series) という。Harish-Chandra によって、離散系列表現が存在するための必要十分条件は、 $K_{\mathbb{R}}$  の極大トーラス  $T_{\mathbb{R}}$  が  $G_{\mathbb{R}}$  の極大トーラス (Cartan 部分群) であること（つまり  $\mathrm{rank} G_{\mathbb{R}} = \mathrm{rank} K_{\mathbb{R}}$  であること）が証明され、さらに  $G_{\mathbb{R}}/K_{\mathbb{R}}$  が  $G_{\mathbb{R}}$  不変な複素構造を持つとき（つまり  $G_{\mathbb{R}}/K_{\mathbb{R}}$  が**エルミート対称空間**であるとき）には**正則離散系列**と呼ばれるユニタリ表現が構成された。これは Borel-Weil の定理の無限次元表現への直接的な一般化であるが、Kostant と Langlands は  $L^2$  コホモロジーによるさらなる一般化を予想した。証明したのは Schmid である [Sch71; Sch76]。

**Theorem 4.1 (Harish-Chandra, Langlands, Schmid)**  $\mathrm{rank} G_{\mathbb{R}} = \mathrm{rank} K_{\mathbb{R}}$  を仮定する。このとき  $G_{\mathbb{R}}/T_{\mathbb{R}}$  は複素多様体の構造を持ち、その上の複素直線束  $L_{\lambda} \rightarrow G_{\mathbb{R}}/T_{\mathbb{R}}$  に対する  $q$  次の  $L^2$  コホモロジー上に  $G_{\mathbb{R}}$  の離散系列表現を得る。ここで  $q = \#\{\alpha \in \Delta_c^+ \mid \langle \lambda + \rho, \alpha \rangle < 0\} + \#\{\beta \in \Delta_n^+ \mid \langle \lambda + \rho, \beta \rangle > 0\}$  であって<sup>\*8</sup>、 $q$  以外の  $L^2$  コホモロジーは

<sup>\*8</sup> この  $q$  は極大コンパクト群の Weyl 群、および  $G_{\mathbb{C}}$  の Weyl 群に関する  $\lambda + \rho$  の“長さ”とも呼ぶべきものだが、定義には紙数がかかるので残念ながら割愛する。Schmid の原論文 [Sch76] を参照されたい。

消滅する.

旗多様体  $X = G_{\mathbb{C}}/B_{\mathbb{C}}$  上の  $G_{\mathbb{R}}$  軌道は有限個で  $G_{\mathbb{R}}/T_{\mathbb{R}}$  はその開軌道と同型である.  $X$  は複素多様体であって, その開軌道は複素多様体の構造を持っている. その上に離散系列表現が構成されるわけである. 以上のような離散系列の実現に関する解説が Schmid 自身によってなされているので一読をお勧めする [Sch97].

一方, すでに述べたように, 松木対応によって  $G_{\mathbb{R}}$  の開軌道は  $K_{\mathbb{C}}$  の閉軌道に対応するが,  $K_{\mathbb{C}}$  閉軌道は境界がないのでそれ自身滑らかであり,  $K_{\mathbb{C}}$  の旗多様体に同型である. この軌道に対応する (twisted)  $\mathcal{D}_X$  加群の大域切断をとると離散系列表現が得られる [HMSW25, Th12.5]. このような  $G_{\mathbb{R}}$  軌道と  $K_{\mathbb{C}}$  軌道との関係は既約表現の随伴多様体や軌道法による表現の実現とも密接に関わっている.

## 4.2 Beilinson-Bernstein 対応と D 加群

$G_{\mathbb{R}}$  のリー環を  $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$  で表し,  $\mathfrak{g}$  でその複素化を表す. ほかのリー群や代数群に対しても同様の記号を用いる. また  $U(\mathfrak{g})$  は普遍包絡環を,  $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$  で  $U(\mathfrak{g})$  の中心を表す.  $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$  は rank  $\mathfrak{g}$  変数の多項式環と同型であることが知られている (Harish-Chandra).

リー環  $\mathfrak{g}$  の表現は, その普遍性から  $U(\mathfrak{g})$  の表現 (つまり  $U(\mathfrak{g})$  加群) と同一視できるが, もしその表現がある種の有限性を持つ既約表現なら<sup>\*9</sup>, 普遍包絡環の中心  $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$  は定数で作用する (Schur の補題). したがって, (よい) 既約表現  $\pi$  に対して代数射  $\chi_{\pi} : \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathbb{C}$  が決まり, これを表現  $\pi$  の無限小指標と呼ぶ. 無限小指標は表現のもっとも重要な不変量の一つである.

旗多様体  $X$  上の代数的微分作用素環のなす層を  $\mathcal{D}_X$  と書こう.  $X = G_{\mathbb{C}}/B_{\mathbb{C}}$  には  $G_{\mathbb{C}}$  の自然な作用があるから, それを微分することによって, リー環  $\mathfrak{g}$  から  $X = G_{\mathbb{C}}/B_{\mathbb{C}}$  上のベクトル場へのリー環としての準同型が得られる. これを普遍包絡環からの表現へと拡張すると  $U(\mathfrak{g})$  から  $X$  上の大域的な微分作用素のなす環  $\Gamma(\mathcal{D}_X)$  への環準同型が得られるが, これは全射になって, その核は定数項を持たない中心  $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$  の元  $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})_+$  によって生成されるイデアルになることが知られている. つまり, 同型  $\Gamma(\mathcal{D}_X) \simeq U(\mathfrak{g})/\langle \mathfrak{z}(\mathfrak{g})_+ \rangle$  が成り立つ.

普遍包絡環  $U(\mathfrak{g})$  の表現  $\pi$  の零化イデアルが  $\langle \mathfrak{z}(\mathfrak{g})_+ \rangle$  を含むとき,  $\pi$  は自明な無限小指標を持つと言うが, このとき  $\pi$  は  $\Gamma(\mathcal{D}_X)$  の表現とみなすことができる.  $\pi$  の表現空間を  $V$  と書き, これを自然に  $\Gamma(\mathcal{D}_X)$  加群とみなすと, Beilinson-Bernstein の局所化  $\mathcal{D}_X \otimes_{\Gamma(\mathcal{D}_X)} V$  によって  $\mathcal{D}_X$  加群が得られる.

<sup>\*9</sup>たとえば後述する Harish-Chandra 加群や最高ウェイト加群がそれに該当する.

### 4.3 Harish-Chandra 加群の KGB 分類

Harish-Chandra は非コンパクト実簡約リー群  $G_{\mathbb{R}}$  の既約ユニタリ表現  $(\pi, \mathcal{V})$  を考えると、そのユニタリ同型類が表現空間  $\mathcal{V}$  の  $K_{\mathbb{R}}$  有限ベクトルの空間

$$\mathcal{V}_{K_{\mathbb{R}}} := \{v \in \mathcal{V} \mid \dim \text{span}_{\mathbb{C}}\{\pi(K_{\mathbb{R}})v\} < \infty\}$$

上で定義される  $U(\mathfrak{g})$  の表現によって決まることを見いだした。  $\mathcal{V}_{K_{\mathbb{R}}}$  はヒルベルト空間  $\mathcal{V}$  の稠密な部分空間であって、  $v \in \mathcal{V}_{K_{\mathbb{R}}}$  に対して、  $G_{\mathbb{R}} \ni g \mapsto \pi(g)v \in \mathcal{V}$  は  $g$  に関して解析的であり、とくに  $\mathfrak{g}$  の微分表現を考えることができる。このようにして、  $G_{\mathbb{R}}$  の既約ユニタリ表現に対して、  $(\mathfrak{g}, K_{\mathbb{C}})$  加群を対応させることができ、これを **Harish-Chandra 加群** (Harish-Chandra module, 略して **HC 加群**) と呼んでいる。HC 加群はユニタリ表現を含んだ、認容表現 (admissible representation) と呼ばれるもっと広いクラスの位相的な表現の無限小同型類を代表しており、代数的に扱いやすいことから、いまや実リー群の無限次元表現論の研究ではもっとも広く使われている概念である。

すでに紹介した BB 対応により、自明な無限小指標を持つ Harish-Chandra 加群  $V$  には、旗多様体上の  $\mathcal{D}_X$  加群が対応しているが、  $V$  は  $(\mathfrak{g}, K_{\mathbb{C}})$  加群なので、対応する  $\mathcal{D}_X$  加群は  $K_{\mathbb{C}}$  同変である。一方、  $K_{\mathbb{C}}$  同変な  $\mathcal{D}_X$  加群で既約なものは自然に  $X$  上の  $K_{\mathbb{C}}$  軌道とその上の局所系によって分類できる (柏原-Brylinsky)。つまり**自明な無限小指標を持つ HC 加群は旗多様体上の  $K_{\mathbb{C}}$  軌道と局所系によって分類できる**わけで、  $K_{\mathbb{C}}$  軌道の分類および閉包関係は重要なデータとなる。

まったく同様にして、旗多様体  $X$  上の  $B_{\mathbb{C}}$  同変な  $\mathcal{D}_X$  加群を考えることは (無限小指標が自明であるような) **最高ウェイト表現の圏** (つまり  $(\mathfrak{g}, B_{\mathbb{C}})$  加群の圏) を考えることと同値になり、  $B_{\mathbb{C}}$  軌道<sup>\*10</sup>には既約な最高ウェイト表現が対応する。  $B_{\mathbb{C}}$  軌道は Bruhat 分解  $B_{\mathbb{C}} \backslash G_{\mathbb{C}} / B_{\mathbb{C}} \simeq W_G$  により Weyl 群  $W_G$  の元と対応していることに注意する。  $X$  上の  $B_{\mathbb{C}}$  軌道は **Schubert 胞体** と呼ばれ、その閉包が **Schubert 多様体** である。Schubert 多様体は旗多様体上のホモロジー基底を与えるが、旗多様体の (コ) ホモロジーの理論は代数的トポロジーや組合せ論を含む **Schubert 解析** という大きな分野を形成している。

## 5 球部分群

旗多様体  $X = G_{\mathbb{C}} / B_{\mathbb{C}}$  上に有限個の軌道を持つような  $G_{\mathbb{C}}$  の部分群  $H_{\mathbb{C}}$  を**球部分群** (spherical subgroup) と呼ぶが、すでに見てきたように対称部分群  $K_{\mathbb{C}}$  や Borel 部分群  $B_{\mathbb{C}}$  そのものがそのような球部分群の代表的な例である。表現論的には、球部分群の定義を次のように言い替えることができる:

「 $G_{\mathbb{C}}$  の任意の既約有限次元表現に対して、  $H_{\mathbb{C}}$  の任意の指標 (一次元表現) の重複度は 1 以下である」

<sup>\*10</sup> 局所系は常に自明である。



これが軌道の有限性と同値になることの証明はある意味で簡単ではあるが、たとえば  $B_{\mathbb{C}} = H_{\mathbb{C}}$  のときには  $G_{\mathbb{C}}$  の既約表現が唯一つの最高ウェイトを持つことを主張するので、Borel-Weil の定理と同じ程度の深みを持つことは察せられると思う。

$G_{\mathbb{C}}$  の球部分群は  $K_{\mathbb{C}}$  のような簡約部分群に対して古くは Krämer が分類を与えた (1970) が、一般の球部分群に関しては Luna が  $G_{\mathbb{C}} = \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$  のときに**球ルートと球系** (spherical system) と呼ばれる組合せ論的な対象の分類へと帰着するアイディアをもとに分類し (2001), [Lun01] Bravi-Pezzini の**ワンダフル多様体** (wonderful variety) の分類 (2016) を経て, [BP16] Cupit-Foutou によって球系の分類が完成した (2009)<sup>\*11</sup>。ただ球系が与えられたからといってその部分群がどのようなものなのかを具体的に与えることは難しい。球部分群であって可解群になっているようなものは Avdeev によって分類されている (2011)。[Avd11]

## 6 旗多様体と幾何・組合せ論

旗多様体はコンパクトな等質空間であって、 $\mathbb{C}^n$  の部分空間からなる旗の集合と考えることができたが、一方で次のような構成もある。Borel 部分群  $B_{\mathbb{C}}$  は  $G_{\mathbb{C}}$  の極大連結可解部分群であったが、これらはすべて  $G_{\mathbb{C}}$  共役である。また、 $B_{\mathbb{C}}$  の  $G_{\mathbb{C}}$  における正規化部分群は  $B_{\mathbb{C}}$  自身に一致することが簡単に確かめられる。(一般に放物型部分群についてもまったく同様の事実が成り立つ。)  $B_{\mathbb{C}}$  のリー環を  $\mathfrak{b}$  と書くと、 $B_{\mathbb{C}} = N_{G_{\mathbb{C}}}(\mathfrak{b})$  が成り立ち、極大可解部分リー環たちもすべて  $\mathfrak{b}$  と随伴共役であって、随伴作用による共役に関する正規化部分群は  $B_{\mathbb{C}}$  に一致する (例えば [太西 15, 第 11 章] 参照)。これらのことから

$$X = G_{\mathbb{C}}/B_{\mathbb{C}} \simeq \{B'_{\mathbb{C}} \mid B'_{\mathbb{C}}: \text{Borel 部分群}\} \simeq \{\mathfrak{b}' \mid \mathfrak{b}': \text{Borel 部分環}\}$$

という同一視ができる。つまり旗多様体は Borel 部分群の全体、あるいはボレル部分環の全体とみなせる。このようにして**旗と Borel 部分群、あるいはボレル部分環とは一対一に対応している**が、以下、このような同一視を自然に行うことにする。

### 6.1 冪零錐の特異点解消

$G_{\mathbb{C}}$  の旗多様体  $X = G_{\mathbb{C}}/B_{\mathbb{C}}$  への作用は自然に余接束  $T^*X$  上のハミルトン作用を引き起こす。  $X$  上の一点としてボレル部分環  $\mathfrak{b} \in X$  をとるとその固定部分群は  $B_{\mathbb{C}}$  自身であるから、接空間は  $\mathfrak{g}/\mathfrak{b}$  で与えられる。したがって余接空間は  $T^*_{\mathfrak{b}}X = (\mathfrak{g}/\mathfrak{b})^* = \mathfrak{b}^{\perp}$  だが、 $\mathfrak{g}$  上の  $G_{\mathbb{C}}$  不変な非退化双線型形式をとって  $\mathfrak{g}$  と  $\mathfrak{g}^*$  を同一視すれば、 $\mathfrak{b}^{\perp}$  は自然に**冪零根基**  $\mathfrak{u} \subset \mathfrak{b}$  と同一視される。標準的に  $\mathfrak{b}$  を上半三角行列の全体にとれば、 $\mathfrak{u}$  は対角線がゼロの上半三角行列の全体であって、とくに  $\mathfrak{u}$  の元はすべて冪零行列である。以上から一点  $\mathfrak{b} \in X$  における余接空間は  $\mathfrak{u}$  であることが分かった。したがって余接束は

$$T^*X = \{(\mathfrak{b}, x) \mid \mathfrak{b} \in X, x \in \mathfrak{u}\} \tag{6.1}$$

<sup>\*11</sup>年号が少し錯綜しているが、Luna の仕事はもともと 1997 年に始まっており、Bravi-Pezzini, Cupit-Foutou の仕事は相次いで 2009 年に現れた。Cupit-Foutou の論文はまだプレプリントのままである。[Cup14]

と書ける. このように実現された余接束への  $G_{\mathbb{C}}$  のハミルトン作用は随伴作用  $g \cdot (\mathfrak{b}, x) = (\text{Ad}(g)\mathfrak{b}, \text{Ad}(g)x)$  で与えられる. ハミルトン作用があれば自然にモーメント写像が定義されるが, この場合には

$$\xi_X : T^*X \rightarrow \mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}, \quad \xi_X(\mathfrak{b}, x) = x$$

のように単に第 2 成分への射影となる. モーメント写像の像が冪零だから,  $\text{Im } \xi_X$  は冪零元からなる多様体, 冪零多様体に値をとる  $G_{\mathbb{C}}$  同変な写像となる. 冪零多様体を

$$\mathcal{N}_{\mathfrak{g}} = \{x \in \mathfrak{g} \mid x \text{ は冪零元}\} \subset \mathfrak{g}$$

と書いておくと, これは  $\mathfrak{g}$  の閉部分多様体であって, その定義イデアルは  $G_{\mathbb{C}}$  不変元の生成するイデアル  $J_G = (\mathbb{C}[\mathfrak{g}]_+^{G_{\mathbb{C}}})$  である. 冪零多様体は正規である (Kostant) が, 複雑な特異点を持ち, その特異点解消が旗多様体の余接束とモーメント写像で与えられる (Springer):

$$\xi_X : T^*X \rightarrow \mathcal{N}_{\mathfrak{g}}$$

$G_{\mathbb{C}} = \text{GL}_n(\mathbb{C})$  のときを考えよう. このとき, 冪零元  $x \in \mathcal{N}_{\mathfrak{g}}$  はジョルダン標準形を構成するジョルダン細胞のサイズから決まる  $n$  の分割  $\lambda \vdash n$  と対応している ( $\lambda$  は箱の数が  $n$  個のヤング図形).

**Theorem 6.1 (Steinberg [Ste76])**  $x \in \mathcal{N}_{\mathfrak{g}}$  を冪零元とする. このときモーメント写像のファイバー  $\xi_X^{-1}(x)$  は余法束  $T^*X$  の閉部分多様体であるが, その既約成分は  $x$  のジョルダン標準形に対応する  $\lambda \vdash n$  を台に持つ標準盤  $\text{STab}(\lambda)$  と一対一に対応する.

主冪零軌道のジョルダン標準形はサイズが  $n$  のジョルダン細胞になるので, 対応する分割は  $\lambda = (n) = \square \square \dots \square$  であり, ヤング図形で表すと第 1 列目にすべての箱が並ぶ一列しかない図形になる. もちろん標準盤は  $\square 1 \square 2 \dots \square n$  しかないので,  $\xi_X^{-1}(x)$  の既約成分はただ一つである. この場合は既約成分と言っても  $\xi_X^{-1}(x)$  はただ一点であり, それは  $x$  を含むボレル部分環がただ一つしかないことと対応している.  $\mathcal{N}_{\mathfrak{g}}$  は主冪零軌道の閉包であるから,  $T^*X$  が  $\mathcal{N}_{\mathfrak{g}}$  の特異点解消であることの反映でもある.

## 6.2 Springer-Steinberg 理論

対称部分群  $K_{\mathbb{C}}$  の余接束  $T^*X$  への作用もハミルトン作用なので, やはりモーメント写像  $\mu_X : T^*X \rightarrow \mathfrak{k}$  が考えられる. モーメント写像の関手性より, この  $\mu_X$  は  $G_{\mathbb{C}}$  の作用によるモーメント写像  $\xi_X$  の像を  $\mathfrak{k}$  に射影したものになる.

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}, \quad \mathfrak{k} = \{x \in \mathfrak{g} \mid \theta(x) = x\}, \quad \mathfrak{s} = \{x \in \mathfrak{g} \mid \theta(x) = -x\}$$

を Cartan 分解,  $x = x^{\theta} + x^{-\theta} \in \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$  を Cartan 分解に沿った直和分解としよう.

対称部分群  $K_{\mathbb{C}}$  は  $X$  上有限個の軌道を持つのであったが, その軌道の一つを  $\mathbb{O}$  とする. この軌道の余法束  $T_{\mathbb{O}}^*X$  は

$$T_{\mathbb{O}}^*X = \{(\mathfrak{b}_1, x) \mid \mathfrak{b}_1 \in \mathbb{O}, x \in \mathfrak{u}_1^{-\theta} = \mathfrak{u}_1 \cap \mathfrak{s}\}$$

と表され、 $\mu_X(T_0^*X) = 0$  が成り立っている。より詳しく、次の定理が成り立つ。

**Theorem 6.2**  $\mu_X$  の零ファイバーは  $K_{\mathbb{C}}$  軌道の余法束の和である:  $\mu_X^{-1}(0) = \bigsqcup_0 T_0^*X$ . このとき  $\dim T_0^*X = \dim X$  であって、 $\overline{T_0^*X}$  が  $\mu_X^{-1}(0)$  の既約成分になる。

定理より零ファイバー  $\mu_X^{-1}(0)$  は等次元の既約成分を持つ多様体であるが、これを余法束多様体 (conormal variety) と呼んで  $\mathcal{Z}$  で表す。  $\mathcal{Z}$  の既約成分がちょうど  $K_{\mathbb{C}}$  軌道  $X/K_{\mathbb{C}}$  を分類していることに注目しよう。

以下、簡単のために  $K_{\mathbb{C}}$  が連結である場合を考える。定義から  $\mu_X(\overline{T_0^*X}) = \{0\}$  であるが、 $G_{\mathbb{C}}$  のモーメント写像による像  $\xi_X(\overline{T_0^*X}) \subset \mathcal{N}_{\mathfrak{g}}$  は既約で  $\mathfrak{k}^{\perp} = \mathfrak{s}$  に含まれ、同変性より  $K_{\mathbb{C}}$  の随伴作用で安定な閉集合になる。もちろん像は一般にゼロではなく、像が  $\{0\}$  になるのは  $\mathbb{O}$  が  $X$  上の開軌道になっている場合だけである。一方、Kostant-Rallis の定理より  $\mathfrak{s}$  の冪零多様体  $\mathcal{N}_{\mathfrak{s}} = \mathcal{N}_{\mathfrak{g}} \cap \mathfrak{s}$  は有限個の冪零軌道の和であることが分かっているので、 $\xi_X(\overline{T_0^*X})$  はある一つの冪零軌道  $\mathcal{O} \subset \mathcal{N}_{\mathfrak{s}}$  の閉包に一致しなければならない<sup>\*12</sup>。このようにして写像  $\Phi : X/K_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathcal{N}_{\mathfrak{s}}/\text{Ad } K_{\mathbb{C}}$  が  $\Phi(\mathbb{O}) = \mathcal{O}$  として得られる。

**Definition 6.3** (N-Fresse [FN16]). 以上のようにして得られた写像  $\Phi : X/K_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathcal{N}_{\mathfrak{s}}/\text{Ad } K_{\mathbb{C}}$  を **Steinberg 写像** と呼ぶ。

この Steinberg 写像は  $X$  が旗多様体でなくとも、 $X$  上の  $K_{\mathbb{C}}$  軌道が有限で、モーメント写像の像が冪零多様体  $\mathcal{N}_{\mathfrak{s}}$  に含まれていれば定義でき、二重旗多様体のときにもやはり Steinberg 写像が定義できる。

この構成は  $G_{\mathbb{C}}$  自身を実り一群と考えると古典的な Steinberg の結果を再現する。[Ste76]  $\mathbb{G}_{\mathbb{R}} = G_{\mathbb{C}}$  の複素化は  $\mathbb{G}_{\mathbb{C}} = G_{\mathbb{C}}^2 = G_{\mathbb{C}} \times G_{\mathbb{C}}$  であり、 $G_{\mathbb{C}}$  の極大コンパクト部分群はコンパクト実形なので、対称部分群  $K_{\mathbb{C}}$  に対応するのは  $G_{\mathbb{C}}^2$  の対角部分群  $\mathbb{K}_{\mathbb{C}} = \Delta G_{\mathbb{C}}$  となる。したがって  $G_{\mathbb{C}}$  が旗多様体  $\mathfrak{X} = G_{\mathbb{C}}/B_{\mathbb{C}} \times G_{\mathbb{C}}/B_{\mathbb{C}}$  に対角的に働いていると考えることができる。このとき  $G_{\mathbb{C}}$  軌道は Bruhat 分解によって Weyl 群の元と対応する。

$$\mathfrak{X}/G_{\mathbb{C}} \simeq (G_{\mathbb{C}}/B_{\mathbb{C}})^2/\Delta G_{\mathbb{C}} \simeq B_{\mathbb{C}} \backslash G_{\mathbb{C}}/B_{\mathbb{C}} \simeq W_G$$

$w \in W_G$  に対応する軌道を  $\mathbb{O}_w$  で表そう。この場合、Cartan 分解は  $\mathfrak{g}^{\pm} = \{(x, \pm x) \mid x \in \mathfrak{g}\} \simeq \mathfrak{g}$  とおくと、 $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g} = \mathfrak{g}^+ \oplus \mathfrak{g}^-$  と分解することに相当し、上で書いた  $\mathcal{N}_{\mathfrak{s}}$  は  $\mathcal{N}_{\mathfrak{g}}$  と同一視できる。すると Steinberg 写像によって

$$\Phi : W_G \simeq \mathfrak{X}/G_{\mathbb{C}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{N}_{\mathfrak{g}}/\text{Ad } G_{\mathbb{C}} \simeq \{\lambda \mid \lambda \vdash n\}$$

が得られる。つまり Weyl 群の元  $w$  に対して冪零軌道が対応し、 $\text{GL}_n(\mathbb{C})$  の場合にはそれが  $n$  の分割  $\lambda$  (= ヤング図形) で表されるというわけである。余法束多様体は適切な

<sup>\*12</sup>  $K_{\mathbb{C}}$  が連結でないときには若干の補正が必要であるが、結論は正しい。

同一視の下に

$$\mathcal{Z} = \{(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, x) \in G_{\mathbb{C}}/B_{\mathbb{C}} \times G_{\mathbb{C}}/B_{\mathbb{C}} \times \mathfrak{g} \mid x \in \mathfrak{u}_1 \cap \mathfrak{u}_2\}$$

と書け、モーメント写像  $\xi_x : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{N}_{\mathfrak{g}}$  は  $\xi_x(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, x) = x$  (第3成分への射影) となる. Springer ファイバーを  $\mathcal{B}_x = \{\mathbf{b}_1 \in G_{\mathbb{C}}/B_{\mathbb{C}} \mid x \in \mathfrak{u}_{\mathbf{b}_1}\}$  と書くと,  $\mathcal{B}_x$  の既約成分全体  $\text{Irr } \mathcal{B}_x$  は台がヤング図形  $\lambda$  であるような標準盤  $\text{STab}(\lambda)$  と同一視できるのであった.

$$W_G \simeq \text{Irr } \mathcal{Z} \simeq \bigsqcup_{x \in \mathcal{N}_{\mathfrak{g}}/\text{Ad } G_{\mathbb{C}}} \text{Irr}(\overline{\xi_x^{-1}(\mathcal{O}_x)}) \simeq \bigsqcup_{x \in \mathcal{N}_{\mathfrak{g}}/\text{Ad } G_{\mathbb{C}}} (\text{Irr } \mathcal{B}_x \times \text{Irr } \mathcal{B}_x)/Z_G(x)$$

ここで  $Z_G(x)$  は  $x$  の固定部分群である.  $G_{\mathbb{C}} = \text{GL}_n(\mathbb{C})$  の場合には  $Z_G(x)$  の作用は自明になり, 次の全単射を得る.

$$S_n = W_G \simeq \bigsqcup_{x \in \mathcal{N}_{\mathfrak{g}}/\text{Ad } G_{\mathbb{C}}} \text{Irr } \mathcal{B}_x \times \text{Irr } \mathcal{B}_x \simeq \bigsqcup_{\lambda \vdash n} \text{STab}(\lambda) \times \text{STab}(\lambda)$$

これは対称群の元を標準盤の組で表す **Robinson-Schensted 対応** (RS 対応) そのものである. このようにして, 任意の型の Weyl 群に対して RS 対応を一般化できる.

## 7 二重旗多様体

以下, この節ではすべて複素数体上で考えるので  $G_{\mathbb{C}}, K_{\mathbb{C}}, B_{\mathbb{C}}$  などを  $G, K, B$  などと書くことにする.

### 7.1 多重旗多様体

Magyar-Weyman-Zelevinsky によって三重旗多様体  $G/P_1 \times G/P_2 \times G/P_3$  が考察され, 古典群  $G$  の対角的な作用に対してこの三重旗多様体がいつ有限軌道を持つのかという問題が解決された [MWZ00; MWZ99]. 彼等の手法は箆の表現を用いて軌道の分解を考察するもので画期的なものであった. 一方で, 4つ以上の旗多様体の直積は必ず無限個の軌道を持つことも同時に示されている. この三重旗多様体に関しては, mirabolic と呼ばれる特別な場合に Finkelberg-Ginzburg-Travkin が  $D$  加群的な考察を指標層の視点から行い, 一般化された RS 対応があることを報告していた [Tra09; FGT09].

### 7.2 対称対の二重旗多様体と軌道の有限性

三重旗多様体の理論を受けて, この枠組みを対称対に翻訳して考えてみようという動機から, 落合啓之氏との共同研究が始まった [NO11].  $G$  を連結簡約代数群,  $K$  をその対称部分群として, この2つの群の放物型部分群  $Q \subset K$  および  $P \subset G$  をとる.

**Definition 7.1** (N-Ochiai). 旗多様体の直積  $\mathfrak{X} := K/Q \times G/P$  に対角的な  $K$  の作用を考えたものを対称対に付随する**二重旗多様体** (double flag variety) と呼ぶ. また, その  $K$  軌道が有限個であるとき, **有限型**という.

三重旗多様体は Steinberg 多様体のときと同じようにして、対称対  $(G \times G, G)$  を考えることにより、**二重旗多様体の特別な場合**とみなすことができる。有限型の三重旗多様体はそう多くはないのだが、対称対に付随する二重旗多様体で有限型のものは豊富にあり、しかも重複度自由な作用や球部分群、概均質ベクトル空間の相対不変式などに関係することが徐々に明らかにされてきた。

我々の理論は有限型の二重旗多様体であることが基本的な設定なので、まずは有限型の二重旗多様体にはどのようなものがあるか、例と分類の現状について述べよう。

**Example 7.2.**  $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$  とし、 $K = \mathrm{GL}_p(\mathbb{C}) \times \mathrm{GL}_q(\mathbb{C})$  ( $n = p + q$ ) を対角に埋め込まれた  $G$  の対称部分群とする。  $(G, K)$  は AIII 型の対称対と呼ばれる。このとき  $P = P_{(r,s)}$  ( $n = r + s$ ) をサイズが  $r, s$  の対角型ブロックを持つブロック上半三角行列からなる  $G$  の極大放物型部分群とする:

$$P = P_{(r,s)} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid a \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{C}), d \in \mathrm{GL}_s(\mathbb{C}) \right\}$$

そうすると、任意の放物型部分群  $Q \subset K$  に対して  $\mathfrak{X} = K/Q \times G/P$  は有限型になる。とくに  $Q = B_K$  を  $K$  の Borel 部分群ととれば、 $\mathfrak{X} \simeq \mathcal{F}l(\mathbb{C}^p) \times \mathcal{F}l(\mathbb{C}^q) \times \mathrm{Gr}_r(\mathbb{C}^n)$  は 2 つの完全旗多様体と、グラスマン多様体の直積であって、そこに  $K = \mathrm{GL}_p(\mathbb{C}) \times \mathrm{GL}_q(\mathbb{C})$  が働いていることになる。この場合には、軌道の分類や次元、閉包関係なども詳細に分かっている (Fresse-N [FN23a, Th.2.2]).

**Example 7.3.**  $G = \mathrm{SO}_n(\mathbb{C})$  とし、 $K = \mathrm{SO}_{n-1}(\mathbb{C})$  とすると、任意の放物型部分群  $P, Q$  に対して  $\mathfrak{X} = K/Q \times G/P$  はいつも有限型である。

$P = B_G$  または  $Q = B_K$  が Borel 部分群の場合にもっとも興味があるが、そのときには有限型二重旗多様体は分類されている (He-N-Ochiai-Oshima [HNOO13]). 上の 2 つの例はその分類に基づくものである。また、 $Q = B_K$  が Borel 部分群のときに  $\mathfrak{X}$  が有限型であることと、 $G/P$  への  $K$  の作用が球作用であることが同値である。したがって、有限型二重旗多様体の分類は、対称部分群  $K$  の作用に関して球多様体となるような旗多様体  $G/P$  の分類を含むことにも注意したい。

一般には AIII 型の場合にのみ有限型二重旗多様体の完全な分類がある ([Hom21], [FN23b, Table 9]) が、他の型、とくに例外型群の場合には完全な分類は知られていない。かなり網羅的な有限型の二重旗多様体のリストが [FN23b] にあるので参照して欲しい。

### 7.3 一般化された Springer-Steinberg 理論

二重旗多様体に対して Springer-Steinberg 理論を考えることができる。以下、 $\mathfrak{X} = K/Q \times G/P$  上の  $K$  軌道は有限と仮定しよう。

$K$  の作用  $K \curvearrowright \mathfrak{X}$  は余接束  $T^*\mathfrak{X} = T^*(K/Q) \times T^*(G/P)$  上のハミルトン作用を引き起こし、モーメント写像  $\mu_{\mathfrak{X}} : T^*\mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{k}^* \simeq \mathfrak{k}$  が定義される。  $K/Q = \{q_0 \mid q_0 \underset{\mathrm{Ad}K}{\sim} q\}$  を  $\mathfrak{q}$  と

$K$  共役な放物型リー環全体のなす多様体と同一視し、同様にして  $G/P = \{\mathfrak{p}_0 \mid \mathfrak{p}_0 \underset{\text{Ad } G}{\sim} \mathfrak{p}\}$  とみなそう。このとき、 $\mathfrak{u}(\mathfrak{q})$  で放物型部分環  $\mathfrak{q}$  の冪零根基を表すと、接束は

$$\begin{aligned} T^*(K/Q) &= \{(\mathfrak{q}_0, x) \mid \mathfrak{q}_0 \in K/Q, x \in \mathfrak{u}(\mathfrak{q}_0)\} \\ T^*(G/P) &= \{(\mathfrak{p}_0, y) \mid \mathfrak{p}_0 \in G/P, y \in \mathfrak{u}(\mathfrak{p}_0)\} \end{aligned}$$

のように表される (完全旗多様体の場合の (6.1) を参考にすると分かりやすい)。それぞれのモーメント写像は第 2 成分への射影だが、直積である二重旗多様体の場合にはモーメント写像の関手性から

$$\mu_{\mathfrak{X}} : T^*\mathfrak{X} \simeq T^*(K/Q) \times T^*(G/P) \longrightarrow \mathfrak{k}, \quad (\mathfrak{q}_0, x; \mathfrak{p}_0, y) \longmapsto x + y^\theta$$

で与えられる。ただし  $y^\theta$  は  $y \in \mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$  の  $\mathfrak{k}$  成分である。したがって余法束多様体は

$$\mathcal{Z} = \mu_{\mathfrak{X}}^{-1}(0) = \bigsqcup_{\mathbb{O} \in \mathfrak{X}/K} T_{\mathbb{O}}^*\mathfrak{X} = \{(\mathfrak{q}_0, x; \mathfrak{p}_0, y) \mid x \in \mathfrak{u}(\mathfrak{q}_0), y \in \mathfrak{u}(\mathfrak{p}_0), x + y^\theta = 0\}$$

となる。

**Definition 7.4.** モーメント写像から派生した 2 種類の射影を次のように定める。

- (1)  $\varphi^\theta : \mathcal{Z} \longrightarrow \mathcal{N}_{\mathfrak{k}}, \quad \varphi^\theta((\mathfrak{q}_0, x; \mathfrak{p}_0, y)) = y^\theta = -x,$
- (2)  $\varphi^{-\theta} : \mathcal{Z} \longrightarrow \mathfrak{s}, \quad \varphi^{-\theta}((\mathfrak{q}_0, x; \mathfrak{p}_0, y)) = y^{-\theta} = x + y.$

以下、それぞれ  $\mathfrak{k}$ -モーメント射影、 $\mathfrak{s}$ -モーメント射影と呼ぶことにしよう。 $\mathfrak{k}$ -モーメント射影の像は定義から冪零多様体  $\mathcal{N}_{\mathfrak{k}}$  に含まれているが、 $\mathfrak{s}$ -モーメント射影の像は必ずしも冪零元になるかどうかはわからない。しかし、有限型の二重旗多様体で  $\text{Im } \varphi^{-\theta} \not\subset \mathcal{N}_{\mathfrak{s}}$  となるような例は見つかっていない ([FN23b, Prop.10.3, 10.4, Conj.10.7] 参照)。

**Conjecture 7.5 (冪零モーメント射影予想 (nil-projection conjecture))** 有限型の二重旗多様体では  $\text{Im } \varphi^{-\theta} \subset \mathcal{N}_{\mathfrak{s}}$  が成り立つであろう。

例えば AIII 型の対称対  $(G, K) = (\text{GL}_n(\mathbb{C}), \text{GL}_p(\mathbb{C}) \times \text{GL}_q(\mathbb{C}))$  ならばこの予想は正しい ([FN23b, Prop.10.4])。以下、この予想を仮定しよう。すると、定義 6.3 と同様にしてモーメント射影  $\varphi^{\pm\theta}$  を用いて 2 種類の Steinberg 写像が定義できる。

$$\begin{aligned} \Phi^\theta : \mathfrak{X}/K \ni \mathbb{O} &\longmapsto \mathcal{O}_{\mathfrak{k}} \in \mathcal{N}_{\mathfrak{k}}/\text{Ad } K \iff \varphi^\theta(\overline{T_{\mathbb{O}}^*X}) = \overline{\mathcal{O}_{\mathfrak{k}}} \\ \Phi^{-\theta} : \mathfrak{X}/K \ni \mathbb{O} &\longmapsto \mathcal{O}_{\mathfrak{s}} \in \mathcal{N}_{\mathfrak{s}}/\text{Ad } K \iff \varphi^{-\theta}(\overline{T_{\mathbb{O}}^*X}) = \overline{\mathcal{O}_{\mathfrak{s}}} \end{aligned}$$

我々は  $\Phi^\theta$  を対称化 Steinberg 写像、 $\Phi^{-\theta}$  をエキゾチック Steinberg 写像と呼んでいる。 $\mathcal{N}_{\mathfrak{k}}$  や  $\mathcal{N}_{\mathfrak{s}}$  の冪零軌道とこれらの Steinberg 写像のファイバーを詳細に調べることで二重旗多様体上の  $K$  軌道の分類ができることになる。しかし、それが成功してほぼ完全な理論となっているのはいまのところ AIII 型の場合だけである。

## 8 AIII 型対称対に付随する二重旗多様体

以下, AIII 型の対称対  $(G, K) = (\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), \mathrm{GL}_p(\mathbb{C}) \times \mathrm{GL}_q(\mathbb{C}))$  ( $n = p + q$ ) であって,  $P = P_{(r,s)}$  ( $n = r + s$ ) は  $G$  の極大放物型部分群,  $Q = B_K = B_p(\mathbb{C}) \times B_q(\mathbb{C})$  は  $K$  の Borel 部分群である場合に,  $K$  軌道の分類や Steinberg 写像について具体的に述べよう. この場合の二重旗多様体はすでに述べたように 2 つの完全旗多様体と, グラスマン多様体の直積である:  $\mathfrak{X} \simeq \mathcal{F}l(\mathbb{C}^p) \times \mathcal{F}l(\mathbb{C}^q) \times \mathrm{Gr}_r(\mathbb{C}^n)$ .

### 8.1 $K$ 軌道の分類

$\mathfrak{X}$  上の  $K$  軌道は対称群 (A 型 Weyl 群) の元である置換行列を一般化した部分置換行列を用いて与えられる. まずサイズが  $p \times r$  の部分置換行列とは, 成分が 0 または 1 であって, 各行各列には多くとも 1 つだけ 1 が現れるものを言う.  $p = r$  で正方行列の場合には, 置換行列の成分のうちいくつかの 1 を 0 に置き換えたものといってもよい. サイズが  $p \times r$  の部分置換行列の全体を  $\mathfrak{T}_{p,r}$  と書く. さらに

$$\mathfrak{T}_{(p,q;r)} = \left\{ \omega = \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{pmatrix} \mid \tau_1 \in \mathfrak{T}_{p,r}, \tau_2 \in \mathfrak{T}_{q,r}, \mathrm{rank} \omega = r \right\} \subset M_{n,r}(\mathbb{Z})$$

とおく. このとき  $\omega$  は階数が  $r$  なので, その  $r$  本の列ベクトルは一次独立である. それら  $r$  本の列ベクトルが生成する  $r$  次元のベクトル空間を  $[\omega]$  で表すと  $[\omega] \in \mathrm{Gr}_r(\mathbb{C}^n) \simeq G/P$  であることに注意しよう.  $\mathfrak{T}_{(p,q;r)}$  には右からの掛け算で (列を入れ替えることによって)  $r$  次対称群  $S_r$  が作用するが, その商空間を  $\mathfrak{T}_{(p,q;r)}/S_r$  で表す. また,  $\omega \in \mathfrak{T}_{(p,q;r)}/S_r$  に対して  $r_{i,j}(\omega)$  によって  $\tau_1$  の最初の  $i$  行からなる小行列の階数と  $\tau_2$  の最初の  $j$  行からなる小行列の階数の和を表す.

**Theorem 8.1 (Fresse-N [FN23a, Th.2.2])** 二重旗多様体上の  $K$  軌道は部分置換行列を用いて分類できる. つまり

$$\mathfrak{X}/K \simeq \mathfrak{T}_{(p,q;r)}/S_r$$

が成り立つ. このとき  $\omega \in \mathfrak{T}_{(p,q;r)}/S_r$  に対応する  $\mathfrak{X}$  の軌道  $\mathbb{O}_\omega$  は 2 つの完全旗  $\mathcal{F}^\pm$  と  $r$  次元部分空間  $W$  の 3 つ組  $(\mathcal{F}^+ = (F_i^+)_{i=1}^p, \mathcal{F}^- = (F_j^-)_{j=1}^q, W) \in \mathcal{F}l(\mathbb{C}^p) \times \mathcal{F}l(\mathbb{C}^q) \times \mathrm{Gr}_r(\mathbb{C}^n)$  であって,

$$\dim W \cap (F_i^+ + F_j^-) = r_{i,j}(\omega) \quad \forall (i,j) \in \{0, \dots, p\} \times \{0, \dots, q\}$$

を満たすものとして特徴付けられる. さらに軌道間の閉包関係は  $\overline{\mathbb{O}_\omega} \subset \overline{\mathbb{O}_{\omega'}} \iff r_{i,j}(\omega) \geq r_{i,j}(\omega') \forall (i,j)$  によって与えられる.

軌道の次元も比較的簡単に記述できる. 興味のある方は論文 [FN23a, Th.2.2] を参照していただきたい. また, 本稿では省略するが, グラフを用いて  $K$  軌道を表すこともでき, この方法は視覚化できるので便利である. これについても原論文を参照して欲しい.

## 8.2 一般化された Robinson-Schensted 対応

定理 8.1 によって分類された軌道  $\mathbb{O}_\omega$  ( $\omega \in \mathfrak{T}_{(p,q;r)}/S_r$ ) の対称化 Steinberg 写像  $\Phi^\theta : \mathfrak{X}/K \rightarrow \mathcal{N}_\mathfrak{k}/\text{Ad } K$  の像を  $\Phi^\theta(\mathbb{O}_\omega) = \mathcal{O}_\lambda \times \mathcal{O}_\mu$  と書こう. ただし  $\lambda \vdash p$ ,  $\mu \vdash q$  はそれぞれ  $p, q$  の分割であって,  $\mathcal{O}_\lambda, \mathcal{O}_\mu$  は冪零軌道である. 次の記号を準備する.

**Definition 8.2.** 自然数の分割  $\lambda', \lambda$  に対して,  $\lambda' \subset \lambda$  とは, ヤング図形で表したとき,  $\lambda' \subset \lambda$  であって, かつ skew ヤング図形  $\lambda/\lambda'$  が列帯 (column strip) になっているときに言う. これは  $\lambda'_i \leq \lambda_i \leq \lambda'_i + 1$  ( $\forall i$ ) が成り立つことと同値である.

**Theorem 8.3 (Fresse-N [FN23a, Th.2.9])**  $K$  軌道のパラメータ  $\omega \in \mathfrak{T}_{(p,q;r)}/S_r$  に対して標準盤の組  $(T_1, T_2)$  を対応させる次のような組合せ論的な全単射が存在する.

$$\mathfrak{X}/K \simeq \mathfrak{T}_{(p,q;r)}/S_r \xrightarrow{\simeq} \bigsqcup_{(\lambda, \mu) \in \mathcal{P}(p) \times \mathcal{P}(q)} \mathcal{T}_{\lambda, \mu}$$

ここで  $\mathcal{P}(p)$  はサイズが  $p$  の分割の全体であり,  $\mathcal{T}_{\lambda, \mu}$  は次の (\*), (\*\*) を満たすような 5 つ組  $(T_1, T_2; \lambda', \mu'; \nu)$  の全体である.

- (\*)  $(T_1, T_2) \in \text{STab}(\lambda) \times \text{STab}(\mu)$  は台がそれぞれ  $\lambda, \mu$  の標準盤の組,
- (\*\*)  $\nu \subset \lambda' \subset \lambda$ ,  $\nu \subset \mu' \subset \mu$  であって  $|\lambda'| + |\mu'| = |\nu| + r$  を満たす.

さらに, この全単射によって  $\mathcal{T}_{\lambda, \mu}$  に対応する  $K$  軌道たちが対称化 Steinberg 写像  $\Phi^\theta$  の  $\mathcal{O}_\lambda \times \mathcal{O}_\mu$  におけるファイバーを与える.

このファイバーには Weyl 群  $S_p \times S_q$  の表現が自然に定義され,  $\mathcal{T}_{\lambda, \mu}$  はその表現の基底を与える ([FN24]). 定理で述べられた組合せ論的な全単射を与えるアルゴリズムについては原論文を参照して欲しい. この組合せ論的アルゴリズムを**一般化された Robinson-Schensted 対応**と呼ぶ.

以上  $\Phi^\theta$  のファイバーについて述べた. 一方,  $\Phi^{-\theta}$  は実リー群の HC 加群の随伴多様体と関係が深いと期待されるが,  $\Phi^{-\theta}$  のファイバーを決定することは難しく未解決の問題である.

## 9 実二重旗多様体

二重旗多様体の理論は複素数体上であっても, まだまだ研究すべき基本的なことが山積みであるが, 実数体上の二重旗多様体の本格的な理論は始まったばかりである. 松木敏彦・大島利雄・小林俊行, Knop-Krötz-Schrichtkrull などによる旗多様体や球多様体上の解析に関する研究成果を二重旗多様体の言葉に焼き直すことは可能だが, まだまだ分からない未踏領域だらけである.

同僚の田内大渡氏とともに, 具体的な場合を手始めに実二重旗多様体の組織的な共同研究を開始したが, その中からいくつかの話題を紹介しよう.

連結実簡約代数群  $G_{\mathbb{R}}$  とその放物型部分群  $P_{\mathbb{R}}$ , および  $G_{\mathbb{R}}$  の対称部分群  $H_{\mathbb{R}}$  とその放



物型部分群  $Q_{\mathbb{R}}$  をとったとき,  $\mathfrak{X}_{\mathbb{R}} = H_{\mathbb{R}}/Q_{\mathbb{R}} \times G_{\mathbb{R}}/P_{\mathbb{R}}$  を対称対に付随した実二重旗多様体という.  $\mathfrak{X}_{\mathbb{R}}$  には  $H_{\mathbb{R}}$  が対角的に作用している.

複素二重旗多様体の構成要素である代数群  $G_{\mathbb{C}}, K_{\mathbb{C}}, P_{\mathbb{C}}, Q_{\mathbb{C}}$  がそれぞれ実数体上で定義されている<sup>\*13</sup>ときには, それらの実有理点を取ることによって実二重旗多様体が得られる. ここまでは  $K_{\mathbb{R}}$  を  $G_{\mathbb{R}}$  の極大コンパクト部分群の意味に使ってきたので,  $K_{\mathbb{C}}$  の実形を  $H_{\mathbb{R}}$  と書くことにして, 以下, そのような場合のみ考える.

**Example 9.1.** AIII 型の対称対  $(G_{\mathbb{C}}, K_{\mathbb{C}}) = (\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{C}), \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))$  に対して, 複素共役写像を

$$\gamma(g) = J_n^{-1}(g^*)^{-1}J_n, \quad J_n = \sqrt{-1} \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_n \\ -\mathbf{1}_n & 0 \end{pmatrix}, \quad (9.1)$$

と定義する. すると実対称対  $(G_{\mathbb{R}}, H_{\mathbb{R}}) = (\mathrm{U}(n, n), \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))$  を得る. ここで,  $\mathrm{U}(n, n)$  は符号が  $(n, n)$  の不定値ユニタリ群 (非コンパクトである),  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$  は実リー群と考えていることに注意する.  $(G_{\mathbb{C}}, K_{\mathbb{C}})$  の放物型部分群をシーゲル型の放物型部分群  $P_{\mathbb{C}} = P_{(n, n)} \subset G_{\mathbb{C}}$  および Borel 部分群  $B_{\mathbb{C}} = B_n^+(\mathbb{C}) \times B_n^-(\mathbb{C})$  ととる. ただし  $B_n^+$  は上半三角に,  $B_n^-$  は下半三角にとっておく. このとき上の複素共役  $\gamma$  に関する実形は  $P_{\mathbb{R}} = \mathrm{U}(n, n) \cap P_{(n, n)}$  および  $Q_{\mathbb{R}} = B_n(\mathbb{C})$  であって, 実二重旗多様体は

$$\mathfrak{X}_{\mathbb{R}} = G_{\mathbb{R}}/P_{\mathbb{R}} \times H_{\mathbb{R}}/Q_{\mathbb{R}} \simeq \mathrm{HLGr}_n(\mathbb{C}^{2n}) \times \mathcal{F}\ell(\mathbb{C}^n)$$

となる. ただし  $\mathrm{HLGr}_n(\mathbb{C}^{2n}) = \{W \in \mathrm{Gr}_n(\mathbb{C}^{2n}) \mid W \text{ は } \mathbb{C}^{(n|n)} \text{ の極大等方的部分空間}\}$  はエルミート・ラグランジュ多様体であって,  $\mathcal{F}\ell(\mathbb{C}^n)$  は完全旗多様体である. また,  $\mathbb{C}^{(n|n)}$  は符号が  $(n, n)$  の不定値エルミート内積空間を表している.

**Example 9.2.** CI 型の対称対  $(G_{\mathbb{C}}, K_{\mathbb{C}}) = (\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C}), \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))$  を通常のように行列表示 (スプリット実現) しておくと, その実有理点は  $(G_{\mathbb{R}}, H_{\mathbb{R}}) = (\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R}), \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}))$  となる.  $P_{\mathbb{R}}$  をシーゲル放物型部分群,  $Q_{\mathbb{R}} = B_n(\mathbb{R})$  を上半三角の Borel 部分群ととると実二重旗多様体  $\mathfrak{X}_{\mathbb{R}} = G_{\mathbb{R}}/P_{\mathbb{R}} \times H_{\mathbb{R}}/Q_{\mathbb{R}} \simeq \mathrm{LGr}_n(\mathbb{R}^{2n}) \times \mathcal{F}\ell(\mathbb{R}^n)$  を得る. ここで  $\mathrm{LGr}_n(\mathbb{R}^{2n})$  は  $\mathbb{R}^{2n}$  におけるシンプレクティック形式に関するラグランジュ部分空間全体のなす旗多様体である.

## 9.1 実二重旗多様体上の $H_{\mathbb{R}}$ 軌道の有限性と分類

複素二重旗多様体  $\mathfrak{X}_{\mathbb{C}}$  が有限型のとき, 対応する実形  $\mathfrak{X}_{\mathbb{R}}$  はやはり有限型になる. しかし, その  $H_{\mathbb{R}}$  軌道の分類は複雑である.

我々は [NT25] で, 例 9.1, 9.2 の場合に具体的な軌道の分類を 3 種類の方法で行った. 一つは, 符号付き部分置換とそれに付随した組合せ論的なグラフによるものであり, もう一つはガロアコホモロジーを使うもの, そして, 階数の低い複素旗多様体上の KGB 分類

<sup>\*13</sup> 複素共役が  $G_{\mathbb{C}}$  のものの制限になっていることが必要である.

に帰着するものである。最後の KGB 分類では松木対応を経て、大島・松木の clan による軌道の分類を用いる。分類は非常に具体的で、次元公式も得られる。ただし閉包関係は一般に複雑でまだ課題は多い。

たとえば一番シンプルな場合、開軌道はガロアコホモロジーに則して有限個に分かれ、例 9.1 においては、エルミート対称行列の符号数が  $(p, q)$  ( $n = p + q$ ) の行列の全体、例 9.2 においては、実対称行列の符号数が  $(p, q)$  ( $n = p + q$ ) の行列の全体へと分解する。どちらの場合にもこの軌道を  $\Omega(p, q)$  と書いておこう。一般の軌道については、原論文 [NT25; NT24] を参照して欲しい。

## 9.2 開軌道に付随した退化主系列の間の intertwining 作用素

二重旗多様体の開軌道が与えられるとそれを使って退化主系列表現  $\pi_\alpha = \text{Ind}_{P_{\mathbb{R}}}^{G_{\mathbb{R}}} \chi_\alpha$  から  $\eta_\beta = \text{Ind}_{Q_{\mathbb{R}}}^{H_{\mathbb{R}}} \xi_\beta$  への intertwiner が積分作用素として構成できる。ここに  $\chi_\alpha$  は  $P_{\mathbb{R}}$  の、 $\xi_\beta$  は  $Q_{\mathbb{R}}$  の一次元指標である。上記、例 9.1, 9.2 のような場合には、 $H_{\mathbb{R}}$  が自然に  $P_{\mathbb{R}}$  のリー環  $\mathfrak{p}$  の冪零根基に概均質に作用していて、その相対不変式を積分核に用いた intertwiner が構成できる。その詳細は現在進行形で田内氏と共同研究中であるが、そのプロトタイプは N-Ørsted の論文 [NØ18] にあるのでそちらを参照されたい。

## 10 謝辞

文献を見ていただければ分かるように、ここで紹介した結果の数々は多数の人たちとの共同研究によって築かれたものである。本文中に明示的に名前を挙げた人のほかに、Lucas Fresse とは長い期間にわたり、多くの共同研究を行っている。彼の貢献なしにここまで辿り着くことはできなかったと思う。彼を含めて、すべての共同研究者達に感謝を捧げたい。

## References

- [Aom66] K. Aomoto, “On some double coset decompositions of complex semisimple Lie groups,” *J. Math. Soc. Japan*, vol. 18, pp. 1–44, 1966.
- [Avd11] R. S. Avdeev, “On solvable spherical subgroups of semisimple algebraic groups,” *Trans. Moscow Math. Soc.*, pp. 1–44, 2011.
- [BP16] P. Bravi and G. Pezzini, “Primitive wonderful varieties,” *Math. Z.*, vol. 282, no. 3-4, pp. 1067–1096, 2016.
- [CNT12] D. Ciubotaru, K. Nishiyama, and P. E. Trapa, “Regular orbits of symmetric subgroups on partial flag varieties,” in *Representation theory, complex analysis, and integral geometry*, Birkhäuser, 2012, pp. 61–86.
- [Cup14] S. Cupit-Foutou, *Wonderful varieties: A geometrical realization*, 2014. arXiv: 0907.2852 [math.AG].

- [FGT09] M. Finkelberg, V. Ginzburg, and R. Travkin, “Mirabolic affine Grassmannian and character sheaves,” *Selecta Math. (N.S.)*, vol. 14, no. 3-4, pp. 607–628, 2009.
- [FN16] L. Fresse and K. Nishiyama, “On the exotic Grassmannian and its nilpotent variety,” *Represent. Theory*, vol. 20, pp. 451–481, 2016.
- [FN23a] L. Fresse and K. Nishiyama, “On generalized Steinberg theory for type AIII,” *Algebr. Comb.*, vol. 6, no. 1, pp. 165–195, 2023.
- [FN23b] L. Fresse and K. Nishiyama, *Overview on the theory of double flag varieties for symmetric pairs*, 2023. arXiv: 2309.17085 [math.RT].
- [FN24] L. Fresse and K. Nishiyama, “Action of Hecke algebra on the double flag variety of type AIII,” *Adv. in Appl. Math.*, vol. 153, Paper No. 102614, 19, 2024.
- [HNOO13] X. He, K. Nishiyama, H. Ochiai, and Y. Oshima, “On orbits in double flag varieties for symmetric pairs,” *Transform. Groups*, vol. 18, no. 4, pp. 1091–1136, 2013.
- [HMSW25] H. Hecht, D. Miličić, W. Schmid, and J. A. Wolf, “Localization and standard modules for real semisimple Lie groups II: Irreducibility and classification,” *Pure Appl. Math. Q.*, vol. 21, no. 2, pp. 697–811, 2025.
- [Hom21] H. Homma, “Double flag varieties and representations of quivers,” arXiv: 2103.14509, 2021.
- [Lun01] D. Luna, “Variétés sphériques de type  $A$ ,” *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, no. 94, pp. 161–226, 2001.
- [MWZ99] P. Magyar, J. Weyman, and A. Zelevinsky, “Multiple flag varieties of finite type,” *Adv. Math.*, vol. 141, no. 1, pp. 97–118, 1999.
- [MWZ00] P. Magyar, J. Weyman, and A. Zelevinsky, “Symplectic multiple flag varieties of finite type,” *J. Algebra*, vol. 230, no. 1, pp. 245–265, 2000.
- [Mat79] T. Matsuki, “The orbits of affine symmetric spaces under the action of minimal parabolic subgroups,” *J. Math. Soc. Japan*, vol. 31, no. 2, pp. 331–357, 1979.
- [MO90] T. Matsuki and T. Oshima, “Embeddings of discrete series into principal series,” in *The orbit method in representation theory (Copenhagen, 1988)*, ser. Progr. Math. Vol. 82, Birkhäuser, 1990, pp. 147–175.
- [NO11] K. Nishiyama and H. Ochiai, “Double flag varieties for a symmetric pair and finiteness of orbits,” *J. Lie Theory*, vol. 21, no. 1, pp. 79–99, 2011.
- [NØ18] K. Nishiyama and B. Ørsted, “Real double flag varieties for the symplectic group,” *J. Funct. Anal.*, vol. 274, no. 2, pp. 573–604, 2018.

- [NT24] K. Nishiyama and T. Tauchi, “Real double flag variety for the symmetric pair  $(U(p, p), GL_p(\mathbb{C}))$  and galois cohomology,” *Journal of Physics: Conference Series*, vol. 2912, no. 1, p. 012 018, Dec. 2024.
- [NT25] K. Nishiyama and T. Tauchi, *Orbit structures on real double flag varieties for symmetric pairs*, 2025. arXiv: 2506.12663 [math.RT].
- [RS90] R. W. Richardson and T. A. Springer, “The Bruhat order on symmetric varieties,” *Geom. Dedicata*, vol. 35, no. 1-3, pp. 389–436, 1990.
- [RS94] R. W. Richardson and T. A. Springer, “Complements to: “The Bruhat order on symmetric varieties” [Geom. Dedicata **35** (1990), no. 1-3, 389–436; MR1066573 (92e:20032)],” *Geom. Dedicata*, vol. 49, no. 2, pp. 231–238, 1994.
- [Sch71] W. Schmid, “On a conjecture of Langlands,” *Ann. of Math. (2)*, vol. 93, pp. 1–42, 1971.
- [Sch76] W. Schmid, “ $L^2$ -cohomology and the discrete series,” *Ann. of Math. (2)*, vol. 103, no. 2, pp. 375–394, 1976.
- [Sch97] W. Schmid, “Discrete series,” in *Representation theory and automorphic forms (Edinburgh, 1996)*, ser. Proc. Sympos. Pure Math. Vol. 61, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, pp. 83–113.
- [Ste76] R. Steinberg, “On the desingularization of the unipotent variety,” *Invent. Math.*, vol. 36, pp. 209–224, 1976.
- [Tra09] R. Travkin, “Mirabolic Robinson-Schensted-Knuth correspondence,” *Selecta Math. (N.S.)*, vol. 14, no. 3-4, pp. 727–758, 2009.
- [Wol69] J. A. Wolf, “The action of a real semisimple group on a complex flag manifold. I. Orbit structure and holomorphic arc components,” *Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 75, pp. 1121–1237, 1969.
- [太西 15] 太田琢也・西山享, **代数群と軌道** (数学の杜 3). 数学書房, 2015.
- [堀田良 19] 堀田良之, **対称空間今昔譚**. 数学書房, 2019.