ヤング図形の組合せ論講義

(2020 年度青山学院大学理学研究科講義録)

西山 享 (青山学院大学・理工)

Ver. 0.2 [2022/08/18 14:44:45 JST]　(compiled on 2022 年 8 月 18 日)

第 1 回　整数の分割とヤング図形

自然数をいくつかの部分に分け，その和として捉えることは，たとえば多項式の展開を考えるときに必要となり，組合せ論の重要な考え方・道具となっている．これを整数の分割と呼ぶが，単なる “数の分解” として考えるのではなく，図形を利用した表示を考えると便利である．そのような表示としてヤング図形があるが，他にもフロベニウスの表示，マヤ図形などさまざまな手法がある．この節では，まずそのような整数の分割の表示法について考えてみよう．参考書は [32] である．

1　整数の分割と合成

非負整数 $n \geq 0$ に対して

$$n = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_\ell \qquad (\lambda_j \in \mathbb{Z}_{>0})$$
$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_\ell > 0$$

と表されるとき，$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\ell)$ を n の**分割** (partition) と呼び，記号で $\lambda \vdash n$ と表す．

【注意】1.1 (分割と合成). λ の成分は順序が指定されているが，これを「和の順序が異なっても同じ分割を表す」と解釈して，順序通り並べないこともある．一方，和の順序も考慮に入れた分割のことを**合成** (composition) と呼ぶ．

例 1.2. $n = 5$ のとき，全部で 7 通りの分割がある．

$$\begin{aligned} 5 &= 5 \\ &= 4 + 1 \\ &= 3 + 2 = 3 + 1 + 1 \\ &= 2 + 2 + 1 = 2 + 1 + 1 + 1 \\ &= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \end{aligned}$$

一方，合成としては

$$3 + 1 + 1, \quad 1 + 3 + 1, \quad 1 + 1 + 3$$

は異なるものとして数える．(この講義では合成はほとんど考えない.)

定義 1.3. 分割 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\ell) \vdash n$ に対して，

- λ_j を**和因子** (part)

- $\ell = \ell(\lambda)$ を λ の**長さ** (length)
- $|\lambda| = \sum_{j=1}^{\ell} \lambda_j = n$ を λ の**サイズ** (または大きさ) と呼ぶ.

また分割 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\ell), \lambda_\ell \geq 1$ の後ろに便宜的に 0 を有限個 (あるいは無限個) 付け加えて考えることもよくある. ゼロがついていてもいなくても同じ分割と考えることにする.

演習 1.4. $n = 4, 6$ のとき，分割をすべて求めよ. [**Hint**: $p_4 = 5,\ p_6 = 11$]

2　分割の表示法と分割数

分割 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\ell)$ に和因子 k が m_k 回現れるとき，m_k を k の**重複度** (multiplicity) という. k が全く表れないときは $m_k = 0$，つまり重複度はゼロと規約する.

例 1.5. $n = 5$ のとき,

$$\lambda = (2, 2, 1) = [2^2 \cdot 1]$$
$$\lambda = (3, 1, 1) = [3 \cdot 1^2]$$

演習 1.6. $n = 4, 5$ に対して，分割を和因子と重複度を用いて表せ.

定義 1.7. n の分割全体の集合を $\mathscr{P}(n)$ で表す.

$$\begin{aligned}\mathscr{P}(n) &= \{\lambda \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0} \mid |\lambda| = n\} \\ &= \{\lambda \mid \lambda \vdash n\}\end{aligned}$$

便宜的に $\mathscr{P}(0) = \{\emptyset\}$ と表す. (注意: $\mathscr{P}(0) \neq \emptyset$ に注意せよ.) つまり 0 の分割はただ一つ存在してそれは空な分割である.

分割の総数 $p_n = \#\mathscr{P}(n)$ を n の**分割数**と呼ぶ.

また $n \geq 0$ を動かして，分割の全体を考えることもある.

$$\begin{aligned}\mathcal{P} &= \coprod_{n=0}^{\infty} \mathscr{P}(n) \\ &= \{\lambda \in \mathbb{Z}^\infty_{\geq 0} \mid \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_k \geq \cdots,\ \lambda_N = 0\ (N \gg 0)\} \\ &= \coprod_{n=0}^{\infty} \{\lambda \mid \lambda \vdash n\}\end{aligned}$$

演習 1.8. 分割数 p_n $(n \leq 6)$ を求めよ.

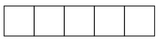
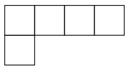
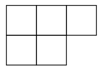
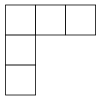
[解答] 1, 1, 2, 3, 5, 7, 11, 15, ...

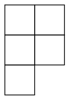
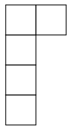
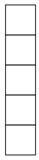
3　ヤング図形

分割を図形を用いて表すと便利である．

$\lambda \vdash n$ のとき，λ を n 個の箱 (小正方形) を並べて表示するのが慣例である．これを**ヤング図形** (Young diagram) あるいは**フェラーズ図形** (Ferrers diagram) と呼ばれる[1]．

例 1.9. $n = 5$ のときのヤング図形の例．

$(5) =$  $(4,1) =$  $(3,2) =$  $(3,1,1) =$ 

$(2,2,1) =$  $(2,1,1,1) =$  $(1,1,1,1,1) =$ 

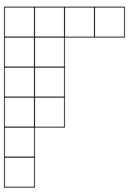
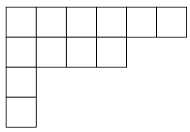
分割の表記は簡便であって，わざわざヤング図形のように図形で表示しなくてもよいと考えるかもしれない．しかし，このように図形で表示することによってさまざまな操作が行えるようになるのである．その 1 つは，“転置” と呼ばれる操作である．

定義 1.10. $\lambda \vdash n$ を n の分割とするとき，分割 $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots) \vdash n$ を次のように決める．

$$\mu_j = \#\{i \in \mathbb{N} \mid \lambda_i \geq j\}$$

この分割 μ を λ の**転置**と呼び，$\mu = {}^t\lambda$ で表す．

このように定義すると何が何だか分からないが，次の例を見てみれば，転置の意味は明かだろう．

$\lambda =$  $\Longrightarrow \quad \mu = {}^t\lambda =$ 

要するに，ヤング図形 λ をその主対角線に沿っており返したものが転置 μ を表している．

演習 1.11. 次の分割 λ に対して，その転置 μ を求めよ．

$$\lambda = (6,3,3,3,2,1,1), \quad (5,2,2,2,1), \quad (7)$$

4　フロベニウス記法とマヤ図形

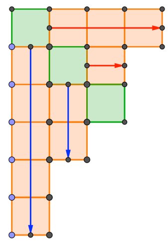
分割をヤング図形で表したのだが，ヤング図形を他の記法で表すこともある．これにはいろいろな方法が知られているが，代表的なものを二つ紹介する．

[1]Young, Ferrers

4.1 フロベニウス記法

例 1.12 (フロベニウス記法). **フロベニウス記法**[2] というのはヤング図形の対角線の長さを r としたとき，その i 番目の箱を選び，箱の右側にある腕の長さ a_i と，箱の下側に延びる脚の長さ b_i を指定したもので，$[a_1, a_2, \ldots, a_r; b_1, b_2, \ldots, b_r]$ などと表す．例えば，次のようなヤング図形を考えよう．

図 1: フロベニウス記法



これは分割の記法を用いると $\lambda = (4, 3, 3, 2, 1, 1)$ であるが，対角線の長さは 3 で，フロベニウスの記法では $[3, 1, 0; 5, 2, 0]$ ということになる．(対角線の長さを指定すれば末尾の 0 は不要だが，対角線の長さが分からないときは，末尾の 0 が必要であることに注意しよう．)

演習 1.13. 次の分割に対応するヤング図形をフロベニウス記法で表せ．

$$(5, 3, 3, 2, 1, 1, 1), \quad (6, 5, 5, 3, 2, 2), \quad (7, 3, 3, 2, 2, 1, 1)$$

4.2 マヤ図形

マヤ図形は佐藤幹夫[3]によって考案されたマヤ・ゲームを行うための舞台装置である．これについては佐藤のオリジナルの論文 ([24, 25]) 他，[31] 所収の『マヤ・ゲームの数学的理論［榎本彦衛］』に詳しい．

例 1.14 (マヤ図形). **マヤ図形**というのは横一列（一行というべきか）に無限個の白と黒の四角形を並べたものである．ただし左側はあるところから先はすべて黒色の箱が，右側はやはりあるところから先すべて白色の箱が並んでいるものとする．例えば，

$$\cdots\blacksquare\blacksquare\blacksquare\square\blacksquare\blacksquare\square\blacksquare\square\square\blacksquare\square\square\square\cdots$$

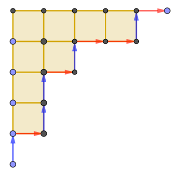
というようなものである．この黒い四角形のところは箱に玉が入っていると解釈する流儀もあり，そのような場合はマヤ図形ではなく**箱玉系**と呼ばれたりする ([36])．また黒い四

[2]Frobenius
[3]佐藤幹夫

角形は上向きのスピン，白の四角形は下向きのスピンと解釈して磁気モデルと思うこともできる．

さて，このようなマヤ図形に対し，黒い四角形を縦向きの矢印，白い四角形を横向きの矢印とみなして，(下図のように）格子点上を移動すると，その矢印のジグザグ上の境界を持つようなヤング図形が現れる．下図は，上のマヤ図形に対応する矢印を書いたものである．

図 2: マヤ図形

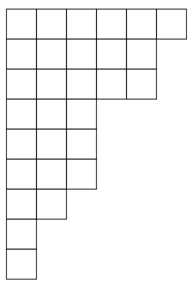


したがって，上に上げたマヤ図形には分割 $\lambda = (4, 2, 1, 1)$ のヤング図形が対応する．

演習 1.15. 次のマヤ図形に対応するヤング図形を描け．

$$\cdots ■■■□■■■■□■□□■□■□□■□□□ \cdots$$

また，分割 $\mu = (6, 5, 5, 3, 3, 3, 2, 1, 1)$ に対応するマヤ図形を描け．



演習 1.16. 分割をフロベニウス記法で表したとき，その転置はどのように表されるか．また，マヤ図形ではどうなるだろうか．

第 2 回　標準盤と半標準盤

> ヤング図形は分割と対応していた．しかし，分割を図で表したと言うだけではあまり役に立ちそうにないように思われる．しかし，ヤング図形を n 個の箱の並びだと思うのは実はその箱一つ一つに個性を考えたいからである．
>
> この節では，ヤング図形の箱に数字を入れて “盤” というものを考えることで組合せ論的に面白い問題が現れることを概観する．ヤング盤の個数についてはいろいろと不思議な公式が成り立ち，それらも紹介するが，証明はそう簡単ではない．なぜそのような公式が成り立つのかは，講義がすすむうちに徐々に明らかになってゆくだろう．

前回やったように，n 個の箱からなるヤング図形と n の分割 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\ell)$ を以下同一視する．ヤング図形の第 1 行目には λ_1 個の箱が並び，第 2 行目には λ_2 個の箱が並び，... となっている．

5　標準盤

ヤング図形 $\lambda \vdash n$ の n 個の箱に 1〜n の数字を 1 回づつ

(1) 右方向に向かって単調増大

(2) 下方向に向かっても単調増大

になるように配置したものを**標準盤** (standard tableau) と呼ぶ．

このとき，箱に何も入っていない元のヤング図形 λ を**台** (shape) といい，標準盤を T と書いたとき，$\lambda = \mathrm{shape}(T)$ などと表す．

一般に，標準盤に限らず，ヤング図形の箱に数字や文字を記入したものを**盤**と呼ぶ．盤だけで分かりにくいときには**ヤング盤**などとも言う．このときにも同じように台とか $\mathrm{shape}(T)$ などの記号を用いる．

例 2.1. $n = 5$ のとき，標準盤をすべて書いてみると

$$\lambda = (5) \qquad \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1&2&3&4&5\\\hline\end{array}$$

$$\lambda = (4,1) \qquad \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1&2&3&4\\\hline \multicolumn{1}{|c|}{5}\\\cline{1-1}\end{array}\quad \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1&2&3&5\\\hline \multicolumn{1}{|c|}{4}\\\cline{1-1}\end{array}\quad \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1&2&4&5\\\hline \multicolumn{1}{|c|}{3}\\\cline{1-1}\end{array}\quad \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1&3&4&5\\\hline \multicolumn{1}{|c|}{2}\\\cline{1-1}\end{array}$$

$$\lambda = (3,2) \qquad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline 4&\multicolumn{1}{c|}{5}\\\cline{1-2}\end{array}\quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&4\\\hline 3&\multicolumn{1}{c|}{5}\\\cline{1-2}\end{array}\quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&4\\\hline 2&\multicolumn{1}{c|}{5}\\\cline{1-2}\end{array}\quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&5\\\hline 3&\multicolumn{1}{c|}{4}\\\cline{1-2}\end{array}\quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&5\\\hline 2&\multicolumn{1}{c|}{4}\\\cline{1-2}\end{array}$$

$\lambda = (3, 1^2)$　　6 個

とこれらの転置（ちょうど同じ個数だけある）であって，総計 26 個ある．ただし $\lambda = (3, 1^2)$ のときには，${}^t\lambda = \lambda$ なので，転置は自分自身と一致していることに注意．

演習 2.2. 分割 $\lambda = (3, 1^2)$ に対して，λ を台に持つ標準盤をすべて挙げよ．

定義 2.3 (標準盤の集合). ヤング図形 $\lambda \vdash n$ に対して λ を台に持つ標準盤全体の集合を

$$\mathrm{STab}(\lambda) = \{T \mid T \text{ は標準盤}, \ \mathrm{shape}(T) = \lambda\}$$

で表し，その個数を $f_\lambda = \#\mathrm{STab}(\lambda)$ と書く．

不思議なことにつぎの等式が成り立つ．

定理 2.4. $n! = \sum_{\lambda \vdash n} f_\lambda^2$

証明. あとで示す．Robinson-Schensted 対応の帰結である． □

例 2.5. $n = 5$ のときは，標準盤の個数は下のようになり，確かに f_λ^2 の合計は $5! = 120$ である．

λ	f_λ	f_λ^2
(5)	1	1
$(4,1)$	4	16
$(3,2)$	5	25
$(3,1^2)$	6	36
$(2^2,1)$	5	25
$(2,1^3)$	4	16
(1^5)	1	1
	合計	120

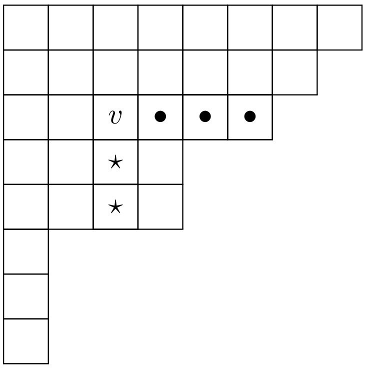
演習 2.6. $n \leq 4$ のとき，この等式が成り立つことを確かめよ．

6　フック長

ヤング図形 λ が与えられたとき，第 i 行目の第 j 番目の箱を $v_{i,j}$ $(1 \leq i \leq \ell, 1 \leq j \leq \lambda_i$ と書くことにしよう．また，v が λ のいずれかの箱であることを $v \in \lambda$ と表す．

定義 2.7 (鍵とフック長). v をヤング図形 λ の箱とするとき，v の右側にある箱と下側にある箱 (に v 自身も合わせた) で構成される鍵形の図形を v を頂点とする鍵 (hook) と呼ぶ．また，鍵に含まれる箱の個数をフック長と呼び，h_v で表す．$v = v_{i,j}$ のときは $h_v = h_{i,j}$ とも書く．
鍵の中，水平 (右方向) に延びた部分を腕，垂直 (下方) に延びた部分を脚という．

例 2.8. 例えば次のヤング図形では，v と $\bullet, \star$ を合わせた部分が鍵で，$\bullet$ の部分が腕，$\star$ の部分が脚である．



　また，このヤング図形では $h_v = h_{3,3} = 6$ がフック長である．

演習 2.9. 上の例のヤング図形において，いくつかの箱のフック長を計算せよ．

定理 2.10 (フック長公式)**.** $f_\lambda = \#\operatorname{Stab}\lambda = \dfrac{n!}{\prod_{v\in\lambda} h_v}$ が成り立つ．

証明. 証明は次回行う． □

例 2.11. $n = 5$ のときに試してみよう．

(1) $\lambda = (5)$ のとき．フック長を各箱に書き込むと $\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 5&4&3&2&1\\\hline\end{array}$ だから

$$f_{(5)} = \frac{5!}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 1$$

(2) $\lambda = (2^2, 1)$ のとき．フック長を各箱に書き込むと $\begin{array}{|c|c|}\hline 4&2\\\hline 3&1\\\hline 1\\\cline{1-1}\end{array}$ だから

$$f_{(2^2,1)} = \frac{5!}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 1} = 5$$

7　半標準盤

　ヤング盤の理論では標準盤以外にも半標準盤と呼ばれる特別な盤がよく現れる．

定義 2.12 (半標準盤)**.** ヤング図形 $\lambda \vdash n$ の各箱に $1 \sim m$ の数字を次の規則に従うように書き込んだものを台が λ の**半標準盤**と呼ぶ．

(1) 数字は重複していてもよく，$1 \sim m$ の数字すべてを使わなくてもよい．(現れないものがあってもよい.)

(2) 右方向に**広義**単調増加.

(3) 下方向に**狭義**単調増加.

このとき，m を半標準盤の**次数** (degree) と呼び，各箱に書き込まれた数字をその箱の**重み** (weight) と呼ぶ．次数が m で台が λ の半標準盤がなす集合を $\mathrm{SSTab}^{(m)}(\lambda)$ と書く．次数が明らかなときには単に $\mathrm{SSTab}(\lambda)$ と書くこともある.

例 2.13.

$$\begin{ytableau} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \\ 4 \\ 5 \end{ytableau} \in \mathrm{SSTab}^{(5)}((3^2, 1^2)) \qquad \begin{ytableau} 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 4 \\ 5 & 5 \end{ytableau} \in \mathrm{SSTab}^{(5)}((5,4,3,2))$$

半標準盤の数は標準盤に比べて膨大なものになる．小さな n に対して例を考えてみよう.

例 2.14. $n = 3,\ m = 2$ のとき.

λ	半標準盤	個数
(3)	$\begin{ytableau} 1 & 1 & 1 \end{ytableau},\ \begin{ytableau} 1 & 1 & 2 \end{ytableau},\ \begin{ytableau} 1 & 2 & 2 \end{ytableau},\ \begin{ytableau} 2 & 2 & 2 \end{ytableau}$	4
$(2,1)$	$\begin{ytableau} 1 & 1 \\ 2 \end{ytableau},\ \begin{ytableau} 1 & 2 \\ 2 \end{ytableau}$	2
(1^3)	$\emptyset$	0

ここで最後の分割 (1^3) では列方向に狭義単調増加でなくてはならないので，数字 $1, 2$ のみを使っては条件を満たす盤が作れないことに注意しよう．つまりそのような半標準盤は存在しない.

演習 2.15. 分割 $\lambda = (n)$ に対して，次数が $m = 2$ であるような半標準盤はいくつあるか? 分割 $\mu = (n, 1)$ に対してはどうだろう?

演習 2.16. 分割 $\lambda = (1)$ (箱がひとつだけのヤング図形) に対して，次数が m であるような半標準盤はいくつあるか? 分割 $\mu = (2), \nu = (1, 1)$ に対してはどうだろう?

このように半標準盤の個数は膨大なものになるが，その個数を

$$d_\lambda^{(m)} = \#\,\mathrm{SSTab}^{(m)}(\lambda) = (\text{次数が } m \text{ で台が } \lambda \text{ の半標準盤の個数})$$

と書くことにしよう.

例 2.17. $d_{(n)}^{(m)} = \dbinom{n+m-1}{n}$

例 2.18. $d^{(m)}_{(2,1)}$ を考えてみよう．左上隅の箱 $v_{1,1}$ に k を入れたとすると，その右隣には k 以上の数が入るのでその選び方は $(m-k+1)$ 通り．一方，$v_{1,1}$ のすぐ下の箱には k より大きな数が入るのでその選び方は $(m-k)$ 通り．したがって

$$\begin{aligned} d^{(m)}_{(2,1)} &= \sum_{k=1}^{m}(m-k+1)(m-k) = \sum_{k=0}^{m-1}(k+1)k \\ &= \frac{(m-1)m(2(m-1)+1)}{6} + \frac{(m-1)m}{2} \\ &= \frac{(m-1)m(m+1)}{3} \end{aligned}$$

すこし苦労して $d^{(m)}_{(2,1)}$ を求めたが，実はこれを簡単に求める公式が存在する．

定理 2.19 (ワイル[4]の次元公式)**.** $m \geq \ell(\lambda) = \ell$ のとき，$\mu = \lambda + (m, m-1, m-2, \ldots, 3, 2, 1)$ とおくと，

$$d^{(m)}_{\lambda} = \frac{\prod_{1\leq i<j\leq m}(\mu_i - \mu_j)}{\prod_{1\leq i<j\leq m}(j-i)} = \frac{\prod_{1\leq i<j\leq m}(\lambda_i - \lambda_j + j - i)}{(m-1)!\,(m-2)!\cdots 3!\cdot 2!\cdot 1}$$

証明. 証明は後で. □

演習 2.20. 次元公式を用いて $d^{(m)}_{(2,1)}$ を求めよ．

演習 2.21. $m=3$ のとき， $n=4,5$ に対して $d^{(m)}_{\lambda}$ $(\lambda \vdash n)$ を計算せよ．

8　相互律

実は，半標準盤や標準盤の個数は互いに複雑に絡み合っている．そのうち代表的な公式を 2 つ挙げておこう．どちらも証明は後で行う．いまはその公式の不思議さを感じ取ってもらえればよい．

定理 2.22 (シューア・ワイルの双対性)**.**

$$\sum_{\lambda\vdash n} f_\lambda \cdot d^{(m)}_{\lambda} = m^n$$

定理 2.23 (GL-GL 相互律)**.**

$$\sum_{\substack{\lambda\vdash n \\ \ell(\lambda)\leq\min\{m_1,m_2\}}} d^{(m_1)}_{\lambda}\cdot d^{(m_2)}_{\lambda} = \binom{m_1m_2+n-1}{n}$$

演習 2.24. $n=3$ のとき，$(m_1,m_2)=(2,3),(3,3)$ などで確認せよ．

[4]Weyl, Hermann

例 2.25. $n = 4, m = 3$ のとき.

λ	f_λ	$d_\lambda^{(3)}$	$f_\lambda \cdot d_\lambda^{(3)}$	$(d_\lambda^{(3)})^2$
(4)	1	15	15	225
$(3,1)$	3	15	45	225
(2^2)	2	6	12	36
$(2,1^2)$	3	3	9	9
(1^4)	1	0	0	0
合計			81	495

ここで $m^n = 3^4 = 81,\ \binom{3^2+4-1}{4} = 495$ に注意しよう.

例 2.26. $n = 3, m_1 = 2, m_2 = 3$ のとき.

λ	f_λ	$d_\lambda^{(2)}$	$d_\lambda^{(3)}$	$f_\lambda \cdot d_\lambda^{(2)}$	$f_\lambda \cdot d_\lambda^{(3)}$	$d_\lambda^{(2)} \cdot d_\lambda^{(3)}$
(3)	1	4	10	4	10	40
$(2,1)$	2	2	8	4	16	16
(1^3)	1	0	1	0	1	0
合計				8	27	56

ここで $m_1^n = 2^3 = 8,\ m_2^3 = 3^3 = 27,\ \binom{2\cdot 3+3-1}{3} = 56$ に注意しよう.

第3回　フック長公式・その1

ヤング図形やヤング盤に関するさまざまな公式を紹介したが，その中でも不思議なのはフック長公式であろう．この公式の証明はいくつも知られており，しかし，そのいずれもが決して易しいものではない．この章と次の章では，複素関数論の留数定理を用いた証明を紹介することにしよう．

9　フック長公式と漸化式

n の分割（ヤング図形） λ を考え，その中の箱 $v \in \lambda$ を頂点とする鍵（フック）の長さをフック長と呼んで h_v で表すのであった．すでに述べた，フック長公式をここに再掲しておく．

定理 3.1 (フック長公式). $\lambda \vdash n$ を n の分割，$\mathrm{STab}(\lambda)$ を台が λ の標準盤全体の集合とするとき，

$$f_\lambda = \#\,\mathrm{Stab}\,\lambda = \frac{n!}{\prod_{v\in\lambda} h_v}$$

が成り立つ．

以下，この定理を Glass-Ng の論文 [11] をもとに証明しよう．“鍵” となるのは次に紹介する漸化式である．

以下 $\varepsilon_k = (0, \dots, 0, \overset{ⓚ}{1}, 0, \dots, 0)$ (k 番目は 1 でその他の成分はすべてゼロのベクトル) とおく．長さをその都度指定することはしないが，1 のある位置だけが重要である．

補題 3.2. 標準盤の個数 f_λ に関して次の漸化式が成り立つ．

$$f_\lambda = \sum_{k=1}^{\ell(\lambda)} f_{\lambda-\varepsilon_k}$$

ただし $\lambda - \varepsilon_k = (\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}, \lambda_k - 1, \lambda_{k+1}, \dots)$ において，$\lambda_{k-1} \geq \lambda_k - 1 \geq \lambda_{k+1}$ を満たさないときには $f_{\lambda-\varepsilon_k} = 0$ と規約する．

証明. $T \in \mathrm{STab}(\lambda)$ における $\boxed{n}$ の位置が角 (corner = 右下隅で右側にも下側にも箱がないような箱) に来ることに注意して，$\boxed{n}$ が k 行目にあるとき，個の箱を取り除くと残った部分は台が $\lambda - \varepsilon_k$ の標準盤になることに注意すればよい． □

例 3.3. $\lambda = \ydiagram{3,2}$ のとき，標準盤を列挙して，5 のある位置をプロットしてみると

$$\begin{ytableau} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{ytableau} \quad \begin{ytableau} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{ytableau} \quad \begin{ytableau} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{ytableau} \qquad \rightsquigarrow \ \mathrm{STab}(\ydiagram{3,1})$$

$$\begin{ytableau} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{ytableau} \quad \begin{ytableau} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{ytableau} \qquad \rightsquigarrow \ \mathrm{STab}(\ydiagram{2,2})$$

これより $f_{(3,2)} = f_{(2,2)} + f_{(3,1)} = 2 + 3 = 5$ が漸化式である．

演習 3.4. $f_{(3,2,1)}, f_{(2,2,2)}, f_{(4,2)}$ を漸化式を用いて計算せよ．ただし $n = 5$ のときの結果を用いてよい．

λ	(5)	$(4,1)$	$(3,2)$	$(3,1^2)$	$(2^2,1)$	$(2,1^3)$	(1^5)
f_λ	1	4	5	6	5	4	1

10 相補フック長公式

補題 3.5. フック長公式は次の等式と同値である．$\lambda \vdash n$ に対して，$\ell = \ell(\lambda)$ を λ の長さとするとき

$$f_\lambda = n! \cdot \frac{\prod_{i<j}(\lambda_i - \lambda_j + j - i)}{\prod_{m=1}^{\ell}(\lambda_m + \ell - m)!}$$

これを**相補フック長公式**と呼ぶ[5]．

証明. フック長公式と比較すると，λ の第 m 行に注目したとき，等式

$$\frac{\prod_{m<j}(\lambda_m - \lambda_j + j - m)}{(\lambda_m + \ell - m)!} = \frac{1}{\prod_{v \in \lambda_m} h_v}$$

を示せばよい．ただし $v \in \lambda_m$ は箱 v が λ の第 m 行を動くことを意味する．分母を払ってまとめると，この等式は

$$\prod_{m<j}(\lambda_m - \lambda_j + j - m) \cdot \prod_{v \in \lambda_m} h_v = (\lambda_m + \ell - m)!$$

となる．右辺の $(\lambda_m + \ell - m)$ はちょうど $v = v_{m,1}$ のフック長であることに注意しよう．箱 v が 1 つづつ右側に動いてゆくとフック長は減ってゆくが,

(1) 1 だけ減るときと，

(2) ギャップがあって 1 以上減るときに分かれる．

そのギャップを第一の積因子が補っているのである．つまり

$$\{\lambda_m - \lambda_j + j - m \mid m < j \leq \ell\} \sqcup \{h_v \mid v \in \lambda_m\} = \{1, 2, \ldots, \lambda_m + \ell - m\}$$

[5] この呼び方はこの講義だけのものである．

が成り立つ．ここで $\sqcup$ は互いに共通部分のない集合の和である．これを確認しよう．

そこで $\mu = {}^t\lambda$ を転置されたヤング図形とする．

まず最初のフック長が $h_{m,1} = \lambda_m + \ell - m$ であることはすでに注意した．このとき k だけ右にずれた箱を頂点とするフック長は

$$h_{m,k} = 1 + (\text{腕の長さ}) + (\text{脚の長さ}) = 1 + (\lambda_m - k) + (\mu_k - m)$$

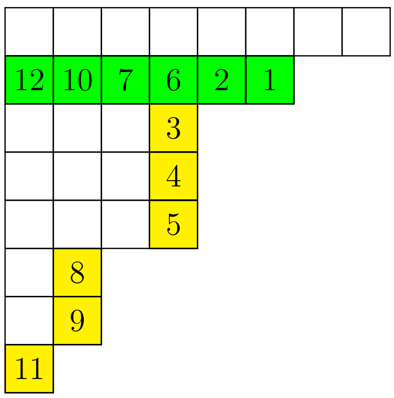
である．したがって

(あ) $\mu_k = \mu_{k+1}$ のときは $h_{m,k} = h_{m,k+1} + 1$.（フック長は 1 だけ減少.）

(い) $\mu_k > \mu_{k+1}$ のときは，$h_{m,k} = h_{m,k+1} + 1 + \mu_k - \mu_{k+1} \geq 2$.（フック長は 2 以上減少，つまり “ギャップ” が起こる．）

(い) のときのギャップがきちんと補われていることを確認しよう．それには $\mu_k \geq j > \mu_{k+1}$ に対応する $\lambda_m - \lambda_j + j - m$ を見てみる．まず $\lambda_{\mu_k} = \lambda_{\mu_k - 1} = \cdots = \lambda_{\mu_{k+1}+1} = k$ であることに注意する．したがって $\lambda_m - \lambda_j + j - m = \lambda_m - k + j - m$ であって，これは j が動くと 1 づつ動いて，$h_{m,k} - 1 = \lambda_m - k + \mu_k - m$ から $h_{m,k+1} + 1 = \lambda_m - k + (\mu_{k+1} + 1) - m$ の間を埋める!!

以上の議論には次の図が参考になるだろう．ただし緑の部分は第 $m = 2$ 行目のフック長が書いてあり，黄色の部分は第 j 行目の最後の箱に $\lambda_m - \lambda_j + j - m$ $(m = 2)$ の値が書きこまれている．



$\square$

演習 3.6. 上の証明中の例として与えられたヤング図形に対して，$m = 3$ のとき，3 行目のフック長とその相補的数（図形中の黄色の箱に入っている数）を計算して図示せよ．

演習 3.7. 相補フック長公式を用いて $f_{(3,2,2)}, f_{(4,2,1)}, f_{(5,1,1)}$ を計算せよ．フック長公式で計算した場合と比較して，等しいことを確認せよ．

11　フック長恒等式

相補フック長公式を証明すればフック長公式が証明できたことになる．そこで相補フック長公式の右辺を $g(\lambda)$ と書いて，この $g(\lambda)$ が f_λ と同じ漸化式を満たすことを示そう．そうするとまったく同じ漸化式を満たし，同じ初期値を持つこと（これは容易に確認できる）から $f_\lambda = g(\lambda)$ がわかる．

念のために，$g(\lambda)$ とこれから証明すべき漸化式を書いておこう．$\ell = \ell(\lambda)$，$n = |\lambda|$ である．

$$g(\lambda) = n! \cdot \frac{\prod_{i<j}(\lambda_i - \lambda_j + j - i)}{\prod_{m=1}^{\ell}(\lambda_m + \ell - m)!} \tag{11.1}$$

漸化式:

$$g(\lambda) = \sum_{k=1}^{\ell(\lambda)} g(\lambda - \varepsilon_k) \tag{11.2}$$

$\eta = \lambda - \varepsilon_k$ とおくと $|\eta| = n - 1$ なので

$$g(\eta) = (n-1)! \cdot \frac{\prod_{i<j}(\eta_i - \eta_j + j - i)}{\prod_{m=1}^{\ell}(\eta_m + \ell - m)!}$$

だが，$i \neq k$ なら $\eta_i = \lambda_i$ なので，積を i, j や m が k でない部分と，k に一致する部分の 2 つに分けて書いておこう．

$$g(\eta) = (n-1)! \cdot \frac{\displaystyle\prod_{(*)}(\lambda_i - \lambda_j + j - i)}{\displaystyle\prod_{m \neq k}(\lambda_m + \ell - m)!} \cdot \frac{\displaystyle\prod_{i<k}(\eta_i - \eta_k + k - i) \prod_{k<j}(\eta_k - \eta_j + j - k)}{(\eta_k + \ell - k)!}$$

ここで $(*)$ は $i < j$ かつ ($i \neq k$ または $j \neq k$) に関する和である．積の前半部分は $g(\lambda)$ と同じもので，$\eta_k = \lambda_k - 1$ であることを考慮すると

$$\frac{g(\eta)}{g(\lambda)} = \frac{\lambda_k + \ell - k}{n} \cdot \prod_{\substack{1 \leq i \leq \ell \\ i \neq k}} \frac{\lambda_k - \lambda_i + i - k - 1}{\lambda_k - \lambda_i + i - k}$$

であることが分かる．したがって漸化式の両辺を $g(\lambda)$ で割ると，この式の $k = 1, 2, \ldots, \ell$ に渡る和をとることになり，

$$\sum_{k=1}^{\ell} \frac{g(\lambda - \varepsilon_k)}{g(\lambda)} = \sum_{k=1}^{\ell} \frac{\lambda_k + \ell - k}{n} \prod_{\substack{1 \leq i \leq \ell \\ i \neq k}} \frac{\lambda_k - \lambda_i + i - k - 1}{\lambda_k - \lambda_i + i - k}$$

を得る．したがって**漸化式が成り立つのはこの右辺が** 1 **になるとき**である．つまり

$$(\text{漸化式が成り立つ}) \iff n = \sum_{k=1}^{\ell}(\lambda_k + \ell - k) \prod_{\substack{1 \leq i \leq \ell \\ i \neq k}} \frac{\lambda_k - \lambda_i + i - k - 1}{\lambda_k - \lambda_i + i - k} \tag{11.3}$$

この式で $z_j = \lambda_j - j$ とおき，さらに

$$n = |\lambda| = \sum_{k=1}^{\ell} \lambda_k = \sum_{k=1}^{\ell} (\lambda_k - k) + \frac{\ell(\ell+1)}{2}$$

に注意して書き直すと

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\ell} z_k + \frac{\ell(\ell+1)}{2} &= \sum_{k=1}^{\ell} (z_k + \ell) \prod_{\substack{1 \le i \le \ell \\ i \ne k}} \frac{z_k - z_i - 1}{z_k - z_i} \\ &= \sum_{k=1}^{\ell} (z_k + \ell) \prod_{\substack{1 \le i \le \ell \\ i \ne k}} \left(1 + \frac{1}{z_i - z_k}\right) \end{aligned} \tag{$\star$}$$

もともと λ_k たちは整数であるが，この等式を z_k が複素数の変数と思って証明できれば遡って相補フック長公式が証明できたことになる．

この等式をさらに 2 つに分ける．

$$\text{第 1 フック長恒等式:} \quad \sum_{k=1}^{\ell} z_k - \frac{\ell(\ell-1)}{2} = \sum_{k=1}^{\ell} z_k \prod_{\substack{1 \le i \le \ell \\ i \ne k}} \left(1 + \frac{1}{z_i - z_k}\right)$$

$$\text{第 2 フック長恒等式:} \quad \ell = \sum_{k=1}^{\ell} \prod_{\substack{1 \le i \le \ell \\ i \ne k}} \left(1 + \frac{1}{z_i - z_k}\right)$$

この 2 つの恒等式が成り立てば，式 $(\star)$ は (第 1 恒等式) $+ \ell \times$ (第 2 恒等式) を計算すると得られる．

演習 3.8. $\ell = 3$ のとき，$(z_1, z_2, z_3) = (t, 2t, 3t), (t, t^2, t^3), (3, 7, 4)$ の場合に第 1 および第 2 フック長恒等式を書き，成り立つことを確かめよ．

以下，第 1 および第 2 恒等式をそれぞれ別に証明することにしよう．その前に

12　複素関数論からの準備

複素関数論を思い出す．以下の複素解析に関する項目については高橋礼司 [29] を参照して欲しい．

複素変数 z の関数 $f(z)$ が正則とは，複素微分可能であることであった．また $z = a$ が $f(z)$ の極であるとは，$(z-a)^k f(z)$ が a の近傍で正則のときに言う．このような k のうち最小のものが a における極の位数である．

定義 3.9. (複素平面上の) 領域 D 上で定義された関数 $f(z)$ が有理型であるとは，$f(z)$ が極のみを特異点に持ち，極を除いては D 上正則のときにいう．

例 3.10. (1) 有理関数は $\mathbb{C}$ 上有理型である．たとえば $\dfrac{z^3+2z-3}{z^2+1}$ など．このとき極は有限個しかない．

(2) $\tan z = \sin z/\cos z$ は $\mathbb{C}$ 上有理型である．このとき極は無限個ある．

(3) ガンマ関数 $\Gamma(z)$ は全複素平面 $\mathbb{C}$ において有理型である．

(4) $f(z) = e^{1/z}$ は $z=0$ を含む領域において有理型ではない．このとき $z=0$ は真性特異点であって，極ではない．

$\mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ をリーマン球とする．関数 $f(z)$ を ∞ の周りで考えるということは $g(w) = f(1/w)$ を $w=0$ の周りで考えるということであり，$f(z)$ が $z=\infty$ で正則であるとか，極を持つとかは $g(w)$ が $w=0$ において正則である，または極を持つ場合にいう．

定理 3.11 (Liouville)**.** リーマン球上で正則な関数は定数である．

定理 3.12. リーマン球上の有理型関数は有理関数である．つまり $\mathbb{C}$ 上で $f(z) = P(z)/Q(z)$ ($P(z), Q(z)$ は多項式) の形をしている．

極 a には留数 $\operatorname{Res}_a f$ と呼ばれる量が付随しているが，

$$2\pi i \operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = \oint_{C_a} f(z)dz$$

と決める．ただし C_a は a を内部に含む十分小さな単純閉曲線であり，内部および周上には a の他に特異点を含まないとする．また C_a は a を左手に見て進む向きに向き付けしておく[6]．

複素関数論の講義では，ローラン展開の (-1) 次の項の係数と定義されることもあるが，このように定義しておくと無限遠点 ∞ における留数も容易に決まる．つまり

$$2\pi i \operatorname*{Res}_{\infty} f = \oint_{C_\infty} f(z)dz$$

であるが，C_∞ は f のすべての特異点を内部に含むような十分大きな閉曲線であり，その向きは ∞ を左手に見て進む方向，すなわち円ならば時計回りの方向である．

例 3.13. $f(z) = 1/z$ を考える．このとき，$f(z)$ は $z \neq 0$ において正則で $z=0$ が唯一の極である．もちろん留数は $\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = 1$．一方，$\infty$ は極ではないが，留数を持つ．$\operatorname{Res}_\infty f = -1$ である．

これは

$$f(1/w)d(1/w) = (1/w)^{-1}(-1/w^2)\,dw = -(1/w)\,dw$$

であるという事情による．

つまり留数は本来，関数 $f(z)$ に付随しているものではなく，$f(z)dz$ という**正則微分形式に付随する量**なのである．

[6] 正確には a を含む閉曲面内の領域を左手に見てすすむ．

次の定理は留数の定義によれば，いわば "当たり前" の定理であるが，けっこう役に立つ.

定理 3.14 (有理関数の留数定理). 有理関数 $F(w)$ の $\mathbb{P}^1$ における極を ∞ も入れて $w_1, w_2, \ldots, w_N$ とする (∞ は極でない場合も含める). このとき留数の和はゼロである.

$$\sum_{i=1}^{N} \operatorname*{Res}_{w_i} F = 0$$

証明. 高橋礼司 [29] 定理 5.17 の系 1 (p.127). □

この留数定理を用いてフック恒等式を次回証明しよう.

第 4 回　フック長公式・その 2

フック長公式は組合せ論的なもので本質的に離散的である．しかし，前回の講義で紹介したように，そのような組合せ論の公式を複素関数論に帰着して証明するというアイディアがある．このように考えることのメリットは，微分や積分，とくに留数定理が使えるようになるという点である．数学では，一見異なるものを結びつけ，向こうの世界とこちらの世界を行き来して，便利な方で計算したり，計算は困難でも意味をつかめるような考え方をしたりといった方法論が重要である．その一つの例として，フック長公式の証明を見てみよう．

13　第 1 フック長恒等式の証明

補題 4.1 (第 1 フック長恒等式).

$$\sum_{k=1}^{\ell} z_k - \frac{\ell(\ell-1)}{2} = \sum_{k=1}^{\ell} z_k \prod_{\substack{1\le i\le \ell \\ i\neq k}} \left(1 + \frac{1}{z_i - z_k}\right)$$

証明. 複素変数 w の有理関数

$$F(w) = w\prod_{j=1}^{\ell}\left(1 + \frac{1}{z_j - w}\right)$$

を考える．$z_1, \ldots, z_\ell$ は複素数の定数である．

$F(w)$ の極は $z_1, \ldots, z_\ell$ と ∞ であるが，その留数を計算する．

(あ) $w = z_k$ は 1 位の極なので，

$$\begin{aligned}\operatorname*{Res}_{w=z_k} F(w) &= \lim_{w\to z_k} (w - z_k)F(w) \\ &= \lim_{w\to z_k} (w - z_k - 1)\, w \prod_{j\neq k}\left(1 + \frac{1}{z_j - w}\right) \\ &= -z_k \prod_{j\neq k}\left(1 + \frac{1}{z_j - z_k}\right)\end{aligned}$$

(い) $w = \infty$ における留数は，$w = 1/z$ と置いて計算すると

$$F(w)\, dw = F(1/z)\, d(1/z) = -\frac{1}{z^2} F\left(\frac{1}{z}\right) dz$$

だから，

$$\operatorname*{Res}_{w=\infty} F(w) = \operatorname*{Res}_{z=0}\left(-\frac{1}{z^2}F\left(\frac{1}{z}\right)\right) = -\operatorname*{Res}_{z=0}\frac{1}{z^2}\frac{1}{z}\prod_{j=1}^{\ell}\left(1+\frac{1}{z_j-1/z}\right) \tag{13.1}$$

ここで

$$\begin{aligned} 1+\frac{1}{a-1/z} &= 1-\frac{z}{1-az} \\ &= 1-z(1+az+(az)^2+\cdots) \\ &= 1-z-az^2-a^2z^3-\cdots \end{aligned}$$

なので

$$\begin{aligned} &((13.1)\text{ 式}) = -\frac{1}{z^3}\prod_{j=1}^{\ell}(1-z-z_jz^2-z_j^2z^3-\cdots) \\ &= -\frac{1}{z^3}\left\{1-\ell z-\left(\sum_{j=1}^{\ell}z_j-\binom{\ell}{2}\right)z^2+\left((\ell-1)\sum_{j=1}^{\ell}z_j-\sum_{j=1}^{\ell}z_j^2\right)z^3-\cdots\right\} \\ &= -\frac{1}{z^3}+\frac{\ell}{z^2}+\left(\sum_{j=1}^{\ell}z_j-\binom{\ell}{2}\right)\frac{1}{z}+\cdots \end{aligned}$$

これより無限遠点での留数は

$$\operatorname*{Res}_{w=\infty} F(w) = \sum_{j=1}^{\ell} z_j - \frac{\ell(\ell-1)}{2}$$

である．

前回復習した複素関数論の定理より，有理関数のリーマン球 $\mathbb{P}^1$ 上の留数の和は 0 であるから，(あ) + (い) = 0．これが第 1 フック長恒等式である． □

演習 4.2. 次の有理関数の $\mathbb{P}^1$ における極と，∞ における留数を計算せよ．

$$\frac{z^3}{(z^2+1)(z-1)},\quad \frac{z^3+1}{z^4-1},\quad \frac{z^3-1}{z^3-8}$$

14 第 2 フック長恒等式の証明

補題 4.3 (第 2 フック長恒等式).

$$\ell = \sum_{k=1}^{\ell}\prod_{\substack{1\le i\le \ell\\ i\ne k}}\left(1+\frac{1}{z_i-z_k}\right)$$

証明. これも留数定理を使って証明できる．$z_1, \dots, z_\ell$ を複素数の定数と思って有理関数

$$F(w) = \prod_{j=1}^{\ell}\Big(1 + \frac{1}{z_j - w}\Big)$$

を考える．$F(w)$ の極は $z_1, \dots, z_\ell$ と ∞ であるが，第1恒等式の証明とまったく同様にして次のように計算できる．

$$\operatorname*{Res}_{w=z_k} F(w) = -\prod_{j \neq k}\Big(1 + \frac{1}{z_j - z_k}\Big)$$
$$\operatorname*{Res}_{w=\infty} F(w) = \ell$$

これらの留数の和が $= 0$ になるという式を書くと第2恒等式が得られる． □

15　研究課題

余力のある人は次の研究課題に挑戦してみてください．もし何か分かったら報告してください．

研究課題 4.4. 複素変数 w の有理関数

$$F(w) = w^2 \prod_{j=1}^{\ell}\Big(1 + \frac{1}{z_j - w}\Big)$$

を考えることにより次の等式を得る．

$$\sum_{k=1}^{\ell} z_k^2 = (\ell - 1)\sum_{k=1}^{\ell} z_k + \sum_{k=1}^{\ell} z_k^2 \prod_{\substack{1 \le i \le \ell \\ i \neq k}} \Big(1 + \frac{1}{z_i - z_k}\Big)$$

この恒等式は組合せ論に使えるだろうか? それはどんな意味を持つだろうか?

また，

$$F(w) = w^3 \prod_{j=1}^{\ell}\Big(1 + \frac{1}{z_j - w}\Big)$$

あるいは一般に w^3 の代わりに w^m に置き換えて考えるとどんな式が得られるだろうか?

16　フック長公式の証明:まとめ

いままでの議論をまとめてみよう．

まず

フック長公式 $\Longleftrightarrow$ 相補フック長公式

である．つまり

$$f_\lambda = \#\,\mathrm{Stab}\,\lambda = \frac{n!}{\prod_{v\in\lambda} h_v} \iff f_\lambda = n!\cdot\frac{\prod_{i<j}(\lambda_i-\lambda_j+j-i)}{\prod_{m=1}^{\ell}(\lambda_m+\ell-m)!}$$

次に示したのは

第 1・2 フック長恒等式 $\Longrightarrow$ フック長恒等式
$\Longrightarrow$ 相補フック長公式

であった．恒等式を書いておこう．

$$\text{フック長恒等式:}\quad \sum_{k=1}^{\ell} z_k + \frac{\ell(\ell+1)}{2} = \sum_{k=1}^{\ell}(z_k+\ell)\prod_{\substack{1\le i\le \ell\\ i\ne k}}\left(1+\frac{1}{z_i-z_k}\right)$$

$$\text{第 1 フック長恒等式:}\quad \sum_{k=1}^{\ell} z_k - \frac{\ell(\ell-1)}{2} = \sum_{k=1}^{\ell} z_k\prod_{\substack{1\le i\le \ell\\ i\ne k}}\left(1+\frac{1}{z_i-z_k}\right)$$

$$\text{第 2 フック長恒等式:}\quad \ell = \sum_{k=1}^{\ell}\prod_{\substack{1\le i\le \ell\\ i\ne k}}\left(1+\frac{1}{z_i-z_k}\right)$$

演習 4.5. 次の分割 λ に対して，標準盤の個数 f_λ をフック長公式を用いて求めよ．$\lambda = (8,7)$，$(5,5,5)$，$(8,1^7)$.

フック長公式を用いるときは，下図のようにヤング図形の各箱にフック長を書き込んで計算するとよい．

7	5	3	1
5	3	1	
3	1		
1			

$$\therefore\quad f_{(4,3,2,1)} = \frac{10!}{7\cdot 5^2\cdot 3^3\cdot 1} = 768 = 2^8\cdot 3$$

第 5 回 Robinson-Schensted 対応

> 半標準盤や標準盤に関しては膨大な研究があるが，なかでも有名なのが Robinson-Schensted 対応と呼ばれる対応である．これを説明するためには半標準盤の一つの構成方法である行バンプ (row bumping, row insertion) と呼ばれるアルゴリズムが必要になる．まずこれを説明することから始めよう．

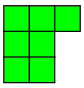
以下，何も断りがなければヤング盤あるいは単に盤と言えば半標準盤を意味することとする（少なくともこの回は）．

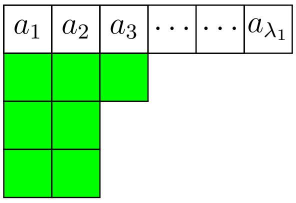
17 Bumping アルゴリズム

分割 $\lambda \vdash n$ に対して，台が λ の半標準盤の集合を $\mathrm{SSTab}(\lambda)$ と書く．次数はいまのところ決めないで，どんな数字が入ってもよいとする．

定義 5.1 (**行バンプ**). 自然数 $x \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対して，新しい半標準盤 $T' = (T \leftarrow x) \in \mathrm{SSTab}(\mu)$ $(\mu \vdash (n+1))$ を以下のようにして作る（手続は後述）．このようにして T' を構成する手続を T の x による行バンプと呼ぶ．

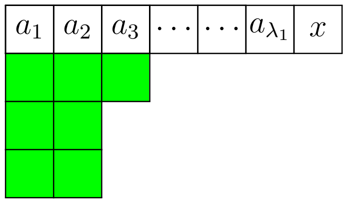
以下，行バンプの手続を説明する．

- T の第 1 行目（長さ λ_1）を $\boxed{a_1}\boxed{a_2}\boxed{a_3}\boxed{\cdots}\boxed{\cdots}\boxed{a_{\lambda_1}}$ とする．
- 第 2 行目以下を T' で表し，このノートでは緑色で表そう．もちろんここには数字が入っている．$T' =$  である．
- したがって T は次のように表される．

$T =$ 

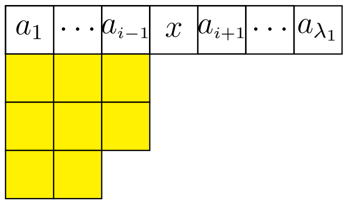
- **行バンプ** $(T \leftarrow x)$ **の手続**

(1) $a_{\lambda_1} \leq x$ ならば，第 1 行目を $\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\hline a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & \cdots & a_{\lambda_1} & x \\ \hline\end{array}$ とする．第 2 行目以降は変更しないで，手続は終わり．

$(T \leftarrow x) =$ 

(2) $x < a_{\lambda_1}$ のとき，$a_{i-1} \leq x < a_i$ となる i を選び (これは一通りに決まる)，第 1 行目を $\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\hline a_1 & \cdots & a_{i-1} & x & a_{i+1} & \cdots & a_{\lambda_1} \\ \hline\end{array}$ とする．

(3) 第 1 行目から a_i が “追い出されて” (*bump* **されて**) 第 2 行目以降にまわる．第 2 行目以降を帰納的に $(T' \leftarrow a_i)$ とおく（下図で黄色で示した部分）．

$(T \leftarrow x) =$ 

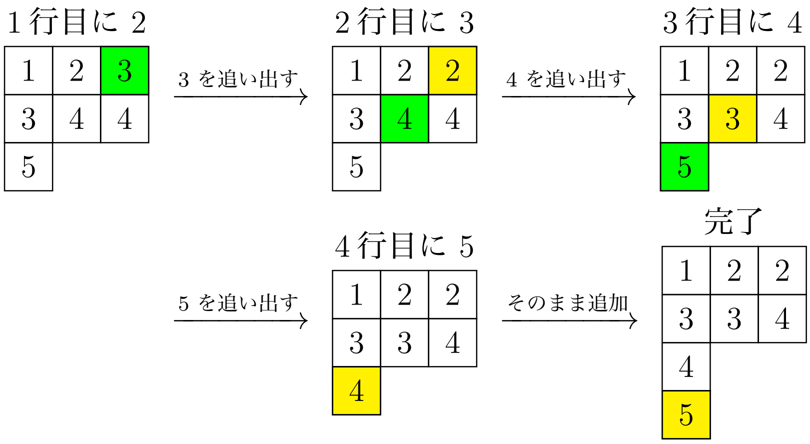
(4) $T' = \emptyset$ のときは $(\emptyset \leftarrow x) = \boxed{x}$ と決める．

このようにして得られた盤は，作り方から明らかに半標準盤となる．その台を $\mu \vdash (n+1)$ と書くが，その形はいろいろあり得る．(下記の例を参照．)

例 5.2. $T = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 3 & 4 & 4 \\ \hline 5 \\ \cline{1-1}\end{array} \in \mathrm{SSTab}((3^2, 1))$ のとき，

$$(T \leftarrow 2) = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 2 \\ \hline 3 & 3 & 4 \\ \hline 4 \\ \cline{1-1} 5 \\ \cline{1-1}\end{array} \in \mathrm{SSTab}((3^2, 1^2))$$

行バンプの過程を書くと次のようになる．



演習 5.3. 次の行バンプを計算せよ．

$$T_1 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \cline{1-5} 3 & 3 & 4 & 5 & 7 \\ \cline{1-5} 4 & 5 \\ \cline{1-2} 6 & 7 \\ \cline{1-2} \end{array} \qquad T_2 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 & 3 & 3 & 5 & 6 \\ \hline 2 & 3 & 4 & 4 & 5 \\ \cline{1-5} 3 & 5 & 5 \\ \cline{1-3} 6 \\ \cline{1-1} 7 \\ \cline{1-1} \end{array}$$

のとき，$(T_1 \leftarrow 1)$，$(T_1 \leftarrow 2)$，$(T_2 \leftarrow 2)$ および $(T_1 \leftarrow 3)$，$(T_2 \leftarrow 5)$．

18　バンプ路と行バンプの可逆性

行バンプの簡単ではあるが重要な性質を述べる．

補題 5.4. $T \in \mathrm{SSTab}(\lambda)$ に対して $T' = (T \leftarrow x) \in \mathrm{SSTab}(\mu)$ を行バンプして得られた半標準盤とする．このとき

T' と $\mu \setminus \lambda$ (行バンプによって新しく付け加わった箱 B の位置)

が分かっていれば，(T, x) の組が復活できる．つまり $(T, x) \mapsto (T', B)$ は単射である．

この B を**新箱** (new box) と呼ぶことにしよう．新箱 B は位置と箱の中の数字を合わせて考えたものであることに注意する．

補題の証明は行バンプの**各ステップが可逆である**ことにより明らかである．上の例で，黄色い箱が指定されていればそのすぐ前のステップが復活できることを確認すればよい．

この黄色い箱の位置を盤上に記したものを**バンプ路**と呼ぶ．要するにこのバンプ路に沿って行バンプが起こっているのである．

例 5.5.

$T_1 =$

1	1	2	3	3	4
2	2	3	4	5	
3	3	4	5	7	
4	5				
6	7				

のとき，$(T_1 \leftarrow 1)$ のバンプ路を黄色で示し，最後の新箱を赤で示す．

$(T_1 \leftarrow 1) =$

1	1	1	3	3	4
2	2	2	4	5	
3	3	3	5	7	
4	4				
5	7				
6					

同様に $(T_1 \leftarrow 2)$ のバンプ路を黄色で示し，最後の新箱を赤で示す．

$(T_1 \leftarrow 2) =$

1	1	2	2	3	4
2	2	3	3	5	
3	3	4	4	7	
4	5	5			
6	7				

演習 5.6. 次のバンプ路（と新箱）を持つ半標準盤 T' から，もとの盤 T と $T' = (T \leftarrow x)$ となるような自然数 x を求めよ．

$T'_1 =$

1	1	2	3
2	2	4	
3	3		
5			

$T'_2 =$

1	2	2	2
2	3	3	
3	4		
5			

$T'_3 =$

1	2	3
2	4	4
4		
5		

19　語と半標準盤の生成

定義 5.7. **語** (word) とは重複を許した自然数の有限列のことである．これを

$$w = i_1 i_2 i_3 \cdots i_\ell \qquad (i_1, i_2, \cdots \in \mathbb{Z}_{\geq 1})$$

で表す．$\ell = \ell(w)$ を語 w の**長さ**と呼ぶ． w が数字 $1, 2, \ldots, n$ の順列（重複を許さない順列）になっているとき，**順列語** (permutation word) と呼び，自然に置換

$$w = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix} \in S_n$$

と同一視する．(S_n は n 次対称群を表す．)

語 $w = i_1 i_2 i_3 \cdots i_\ell$ が与えられたとき，半標準盤 $T \in \mathrm{SSTab}(\lambda)$ に対して最初の数字から順番に行バンプを行って得られる半標準盤 $T' \in \mathrm{SSTab}(\mu)$ $(|\mu| = |\lambda| + \ell)$ を $(T \leftarrow w)$ で表すことにする．つまり

$$(T \leftarrow w) = ((((T \leftarrow i_1) \leftarrow i_2) \leftarrow \cdots) \leftarrow i_\ell) \tag{19.1}$$

である．とくに $T = \emptyset$ を空の盤から始めたときに得られる半標準盤を

$$P_w = (\emptyset \leftarrow w) = ((((\emptyset \leftarrow i_1) \leftarrow i_2) \leftarrow \cdots) \leftarrow i_\ell) \tag{19.2}$$

で表す．

例 5.8. $w = 4321354$ のとき．

$$\begin{array}{|c|}\hline 4\\\hline\end{array} \xrightarrow{3} \begin{array}{|c|}\hline 3\\\hline 4\\\hline\end{array} \xrightarrow{2} \begin{array}{|c|}\hline 2\\\hline 3\\\hline 4\\\hline\end{array} \xrightarrow{1} \begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline 2\\\hline 3\\\hline 4\\\hline\end{array} \xrightarrow{3} \begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\\hline \multicolumn{1}{|c|}{2}\\\cline{1-1} \multicolumn{1}{|c|}{3}\\\cline{1-1} \multicolumn{1}{|c|}{4}\\\cline{1-1}\end{array} \xrightarrow{5} \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&5\\\hline \multicolumn{1}{|c|}{2}\\\cline{1-1} \multicolumn{1}{|c|}{3}\\\cline{1-1} \multicolumn{1}{|c|}{4}\\\cline{1-1}\end{array} \xrightarrow{4} \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&4\\\hline 2&\multicolumn{1}{c|}{5}\\\cline{1-2} \multicolumn{1}{|c|}{3}\\\cline{1-1} \multicolumn{1}{|c|}{4}\\\cline{1-1}\end{array}$$

演習 5.9. 次の w に対して P_w を計算せよ．

$$w_1 = 54417322, \qquad w_2 = 24711332, \qquad w_3 = 64721445,$$
$$w_4 = 44317231, \qquad w_5 = 65412354$$

長さが n の順列語 w に対して，明らかに $P_w \in \mathrm{STab}(\lambda)$ は標準盤になる．$(\lambda \vdash n)$

例 5.10. $n = 3$ のとき，置換 $w \in S_3$ に対して標準盤 P_w を計算してみる．

w	123	132	213	231	312	321
P_w	$\begin{array}{\|c\|c\|c\|}\hline 1&2&3\\\hline\end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c\|}\hline 1&2\\\hline \multicolumn{1}{\|c\|}{3}\\\cline{1-1}\end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c\|}\hline 1&3\\\hline \multicolumn{1}{\|c\|}{2}\\\cline{1-1}\end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c\|}\hline 1&3\\\hline \multicolumn{1}{\|c\|}{2}\\\cline{1-1}\end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c\|}\hline 1&2\\\hline \multicolumn{1}{\|c\|}{3}\\\cline{1-1}\end{array}$	$\begin{array}{\|c\|}\hline 1\\\hline 2\\\hline 3\\\hline\end{array}$

これを見ると $3! = 6 = 1^2 + 2^2 + 1^2$ が観察される．

長さ n の語全体の集合を $\mathscr{W}_n$ と書く．語の構成メンバーが m 以下の数字であるとき w の次数は m であると言い，その全体を $\mathscr{W}_n^{(m)}$ で表そう．$w \in \mathscr{W}_n$ に対して半標準盤 $T = P_w \in \mathrm{SSTab}(\lambda)$ を対応させるので，写像

$$\Phi : \mathscr{W}_n \to \bigcup_{\lambda \vdash n} \mathrm{SSTab}(\lambda)$$

が定まっている．

そこで，Φ の全射性・単射性がどうなっているのかという疑問が自然に生じるが，すでに上の例で見たように長さ $n = 3$ の順列語に限っても Φ が**単射ではない**ことは明かである．しかし，全射性は成り立つ．これを示しておこう．

その前に準備．

定義 5.11. 半標準盤 $T \in \mathrm{SSTab}(\lambda)$ に対して，T の最下行から順に（左から右へ自然な順序で）読み，それを並べた語を w_T と書いて，これを T の語と呼ぶ．つまり

$$w_T = (T \text{ の第 } \ell \text{ 行})(T \text{ の第 } (\ell-1) \text{ 行}) \cdots (T \text{ の第 } 2 \text{ 行})(T \text{ の第 } 1 \text{ 行})$$

である．

例 5.12. $T = \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 2 & 3 & 5 \\ \cline{1-4} 3 & 4 & 4 \\ \cline{1-3} 5 & 5 \\ \cline{1-2}\end{array}$ のとき，$w_T = 55{\cdot}344{\cdot}2235{\cdot}11234$.

（分かりやすいように $\cdot$ を入れたが，これは無視して考える.）

補題 5.13. 半標準盤 $T \in \mathrm{SSTab}(\lambda)$ に対して，w_T を T の語とすると，$T = P_{w_T} = (\emptyset \leftarrow w_T)$ が成り立つ.

証明. T の行数に関する帰納法で証明する．T の第 i 行目を並べた語を w_i と書けば，$w_T = w_\ell w_{\ell-1} \cdots w_2 w_1$ であるが，帰納法の仮定より $w' = w_\ell w_{\ell-1} \cdots w_2$ とおくと，$T' = p_{w'}$ は T から第 1 行目を取り去った半標準盤になっている．これに $w_1 = i_1 i_2 \cdots i_{\lambda_1}$ を行バンプしてゆくと，その構成の仕方から i_1 のバンプ路は第 1 列目になる．第 1 列目の最初の箱に i_1 が入り，その箱の数字が追い出されて真下の箱に入り，さらにそこで追い出された数字が真下の箱へ入り，...，と繰り返して，結局 T の第 1 列目を構成する．第 2 列目以降も同様である． □

半単純盤 T に対して T の語 w_T を対応させる写像を $\Psi : \bigcup_{\lambda \vdash n} \mathrm{SSTab}(\lambda) \to \mathscr{W}_n$ と書くと，この補題は $\Phi \circ \Psi(T) = T$，つまり $\Phi \circ \Psi = \mathrm{id}$ (恒等写像) であることを意味している．これから容易に次の系が得られる.

系 5.14. 写像 $\Phi : \mathscr{W}_n \to \bigcup_{\lambda \vdash n} \mathrm{SSTab}(\lambda)$ は全射である.

一方，$\Psi \circ \Phi$ は恒等写像ではなく，$w = w_T$ の形のとき，そのときに限り $\Psi \circ \Phi(w) = w$ が成り立つ.

20 Robinson-Schensted アルゴリズム

以下しばらくの間標準盤を扱う.

順列語と置換を同一視すると，長さ n の順列語の全体は対称群 S_n と同一視される．$w \in S_n$ に対して

$$w = i_1 i_2 i_3 \cdots i_n = w(1)w(2)\cdots w(n) \leftrightarrow w = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix} \in S_n$$

である．このとき w の行バンプで得られる盤

$$P_w = (\emptyset \leftarrow w) = ((((\emptyset \leftarrow i_1) \leftarrow i_2) \leftarrow \cdots) \leftarrow i_n) \in \mathrm{STab}(\lambda)$$

は標準盤である．台を $\lambda_w = \mathrm{shape}(P_w)$ と書いて，$0 \leq k \leq n$ に対して

$$T^{(k)} = ((((\emptyset \leftarrow i_1) \leftarrow i_2) \leftarrow \cdots) \leftarrow i_k)$$

とおくと $T^{(k)}$ の台 $\{\lambda^{(k)} = \mathrm{shape}(T^{(k)})\}_{k=1}^{n}$ はヤング図形の成長過程を表している．たとえば $w = 526314$ なら

$$\ytableaushort{5} \xrightarrow{2} \ytableaushort{2,5} \xrightarrow{6} \ytableaushort{26,5} \xrightarrow{3} \ytableaushort{23,56} \xrightarrow{1} \ytableaushort{13,26,5} \xrightarrow{4} \ytableaushort{134,26,5}$$

だから

$$\begin{aligned} \lambda^{(1)} = (1) \subset \lambda^{(2)} = (1,1) \subset \lambda^{(3)} = (2,1) \\ \subset \lambda^{(4)} = (2,2) \subset \lambda^{(5)} = (2,2,1) \subset \lambda^{(6)} = (3,2,1) \end{aligned}$$

のように．

このヤング図形の成長過程にあわせて $k = 1, 2, \ldots$ の順番に $\lambda^{(k)} \setminus \lambda^{(k-1)}$ の箱に k を入れてゆくと，標準盤 $Q_w \in \mathrm{STab}(\lambda)$ が得られる．作り方から，もちろん P_w と同じ台を持っている．このようにして対応

$$S_n \ni w \mapsto (P_w, Q_w) \in \mathrm{STab}(\lambda) \times \mathrm{STab}(\lambda)$$

が得られる．この対応を **Robinson-Schensted 対応**と呼ぶ[7]．(以下，文脈で明らかなときは RS 対応と呼ぶ．)

例 5.15. 上の例 $w = 526314$ なら，

$$(P_w, Q_w) = \left(\ytableaushort{134,26,5}, \ytableaushort{136,24,5} \right)$$

である．

例 5.16. $w = 4312$ のとき，行バンプの過程は $\ytableaushort{4} \xrightarrow{3} \ytableaushort{3,4} \xrightarrow{1} \ytableaushort{1,3,4} \xrightarrow{2} \ytableaushort{12,3,4}$ だから $(P_w, Q_w) = \left(\ytableaushort{12,3,4}, \ytableaushort{14,2,3} \right)$

Q_w にはヤング図形の成長過程が記録されており，各過程で新しく付け加わった新箱の位置も分かる．したがって，各過程は逆に辿ることができる! つまり逆写像

$$\mathrm{STab}(\lambda)^2 \ni (P_w, Q_w) \mapsto w \in S_n$$

が存在する．

[7] Robinson [16], Schensted [17].

例 5.17. $(P,Q) = \left(\begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 3&4\\\hline\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\\hline 2&4\\\hline\end{array}\right) \mapsto w = 3142$

行バンプの逆のステップを書いてみると

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 3&4\\\hline\end{array} \quad\to\quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1&4\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}, (2) \quad\to\quad \begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline 3\\\hline\end{array}, (42) \quad\to\quad \begin{array}{|c|}\hline 3\\\hline\end{array}, (142) \quad\to\quad \emptyset, (3142)$$

演習 5.18. 次の標準盤の組 (P,Q) に対して対応する順列語を求めよ．

$$\left(\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&4\\\hline 2&5\\\cline{1-2}\end{array}, \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&4\\\hline 3&5\\\cline{1-2}\end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&4\\\hline 3&5\\\cline{1-2}\end{array}, \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&4\\\hline 2&5\\\cline{1-2}\end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline 4&5\\\cline{1-2}\end{array}, \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline 4&5\\\cline{1-2}\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 3&5\\\hline 4\\\cline{1-1}\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\\hline 2&5\\\hline 4\\\cline{1-1}\end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\\hline 2&5\\\hline 4\\\cline{1-1}\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 3&5\\\hline 4\\\cline{1-1}\end{array}\right)$$

以上の考察をまとめると以下の定理群を得る．

定理 5.19 (**Robinson-Schensted 対応**)**.** n 個の数字の順列語 w に対して，サイズが n の同じ台を持つ標準盤の組 (P_w, Q_w) を対応させる写像

$$S_n \ni w \mapsto (P_w, Q_w) \in \coprod_{\lambda \vdash n} \mathrm{STab}(\lambda) \times \mathrm{STab}(\lambda)$$

は全単射である．この対応を Robinson-Schensted 対応と呼ぶ．

系 5.20. $f_\lambda = \#\mathrm{STab}(\lambda)$ を台が λ の標準盤の個数とすると次の等式が成り立つ．

$$n! = \sum_{\lambda \vdash n} (f_\lambda)^2$$

系 5.21. 任意の標準盤 $T \in \mathrm{STab}(\lambda)$ $(\lambda \vdash n)$ に対して次の等式が成り立つ．

$$f_\lambda = \#\{w \in S_n \mid T = (\emptyset \leftarrow w)\}$$

したがって右辺は T の取り方によらない．

Robinson-Schensted 対応やその周辺に関しては，Fulton [44], Stanley [18], Deift [4] などを参照するとよいだろう．

第 6 回 Robinson-Schensted-Knuth 対応 1

Robinson-Schensted 対応は順列語に対して標準盤の対を対応させるものであったが，出発点の順列語 w はよく考えてみるとべつに任意の語でもよいことに気がつくだろう．実はそれをさらに拡張することができることを説明しよう．これを Robinson-Schensted-Knuth 対応と呼んでいる．

このようにして数学の研究は発展してゆく．

21 RS 対応の拡張

RS 対応は $1, \ldots, n$ の置換 (順列語) に対して同じ台を持つ標準盤の対を対応させるものであった．

定理 6.1 (Robinson-Schensted 対応 (再掲))**.** n 個の数字の順列語 w に対して，サイズが n の同じ台を持つ標準盤の組 (P_w, Q_w) を対応させる写像

$$S_n \ni w \mapsto (P_w, Q_w) \in \coprod_{\lambda \vdash n} \mathrm{STab}(\lambda) \times \mathrm{STab}(\lambda)$$

は全単射である．

ところが，よく考えてみると，w は別に順列語でなくても同じことはできる．任意の数字列 (任意の語) で構わない!!

本日のモラル: 研究のきっかけはどこにでも転がっている．

すこし記号を準備する．

まず $[m] = \{1, 2, \ldots, m\}$ を数字 1 から m までの集合とする．この記号は組合せ論でよく使われる．

この記号を用いると，次数が m で長さが n の語の全体は

$$\mathscr{W}_n^{(m)} = [m] \times [m] \times \cdots \times [m] = [m]^n$$

と書ける．$w = (i_1, i_2, \ldots, i_n) \in \mathscr{W}_n^{(m)}$ を語としよう．このとき $1 \leq i_k \leq m$ である．

次数が m で長さ n の語 $w \in \mathscr{W}_n^{(m)}$ に対して，RS 対応と同じ手順を行えば，得られる

$$P_w = (\emptyset \leftarrow w) = ((((\emptyset \leftarrow i_1) \leftarrow i_2) \leftarrow \cdots) \leftarrow i_n)$$

は次数が m でサイズが n の半標準盤，Q_w はヤング図形の成長過程を表すだけなので，出来上がったものはやはり標準盤である．したがって (P_w, Q_w) は半標準盤と標準盤の組になる．

実験してみよう．(数学も**実験科学**の側面がある．)

例 6.2. $w = 43224151$ のとき．

$$\begin{array}{l}4\end{array}, \begin{array}{l}1\end{array} \xrightarrow{3} \begin{array}{l}3\\4\end{array}, \begin{array}{l}1\\2\end{array} \xrightarrow{2} \begin{array}{l}2\\3\\4\end{array}, \begin{array}{l}1\\2\\3\end{array} \xrightarrow{2} \begin{array}{ll}2&2\\3&\\4&\end{array}, \begin{array}{ll}1&4\\2&\\3&\end{array} \xrightarrow{4} \begin{array}{lll}2&2&4\\3&&\\4&&\end{array}, \begin{array}{lll}1&4&5\\2&&\\3&&\end{array} \xrightarrow{1} \begin{array}{lll}1&2&4\\2&&\\3&&\\4&&\end{array}, \begin{array}{lll}1&4&5\\2&&\\3&&\\6&&\end{array}$$

$$\xrightarrow{5} \begin{array}{llll}1&2&4&5\\2&&&\\3&&&\\4&&&\end{array}, \begin{array}{llll}1&4&5&7\\2&&&\\3&&&\\6&&&\end{array} \xrightarrow{1} \begin{array}{llll}1&1&4&5\\2&2&&\\3&&&\\4&&&\end{array}, \begin{array}{llll}1&4&5&7\\2&8&&\\3&&&\\6&&&\end{array}$$

例 6.3. $w = 33241132$ のとき．

$$\begin{array}{l}3\end{array}, \begin{array}{l}1\end{array} \xrightarrow{3} \begin{array}{ll}3&3\end{array}, \begin{array}{ll}1&2\end{array} \xrightarrow{2} \begin{array}{ll}2&3\\3&\end{array}, \begin{array}{ll}1&2\\3&\end{array} \xrightarrow{4} \begin{array}{lll}2&3&4\\3&&\end{array}, \begin{array}{lll}1&2&4\\3&&\end{array} \xrightarrow{1} \begin{array}{lll}1&3&4\\2&&\\3&&\end{array}, \begin{array}{lll}1&2&4\\3&&\\5&&\end{array}$$

$$\xrightarrow{1} \begin{array}{lll}1&1&4\\2&3&\\3&&\end{array}, \begin{array}{lll}1&2&4\\3&6&\\5&&\end{array} \xrightarrow{3} \begin{array}{lll}1&1&3\\2&3&4\\3&&\end{array}, \begin{array}{lll}1&2&4\\3&6&7\\5&&\end{array} \xrightarrow{2} \begin{array}{lll}1&1&2\\2&3&3\\3&4&\end{array}, \begin{array}{lll}1&2&4\\3&6&7\\5&8&\end{array}$$

演習 6.4. $w = 2153422, 5332113, 3114423, 4335221, 3112554$ のときにそれぞれ RS 対応を計算して (P_w, Q_w) を求めよ．

22 Robinson-Schensted 対応 II (拡張版)

定理 6.5 (**Robinson-Schensted 対応 II**). 次数が m で長さ n の語 $w \in \mathscr{W}_n^{(m)}$ に対して，RS 対応とまったく同じ手順を行えば，サイズが n の同じ台を持つ半標準盤と標準盤の組 (P_w, Q_w) を対応させる写像

$$\mathscr{W}_n^{(m)} \ni w \mapsto (P_w, Q_w) \in \coprod_{\lambda \vdash n} \mathrm{SSTab}^{(m)}(\lambda) \times \mathrm{STab}(\lambda)$$

が得られる．この写像は全単射である．

【注意】6.6. $m < \ell(\lambda)$ のときは $\mathrm{SSTab}^{(m)}(\lambda) = \emptyset$ であることに注意．したがって右辺の和集合は実質的に $\ell(\lambda) \le m$ を満たす分割 $\lambda \vdash n$ を動く．

証明. Q_w がヤング図形の成長過程を表していて，行バンプを行ったときの各ステップの新箱の位置が分かる．この情報を用いて行バンプを逆に辿ってゆくことができ，それが逆写像を与える． $\square$

$\# \mathscr{W}_n^{(m)} = m^n$ なので，RS 対応のときとまったく同様に次の個数の等式を得る．

系 6.7. $d_\lambda^{(m)}$ を台が λ の半標準盤の個数，$f_\lambda = \# \mathrm{STab}(\lambda)$ を台が λ の標準盤の個数とすると次の等式が成り立つ．

$$m^n = \sum_{\lambda \vdash n} d_\lambda^{(m)} \cdot f_\lambda$$

【注意】6.8. 定理の場合と同じく，$m < \ell(\lambda)$ のときは $d_\lambda^{(m)} = 0$ であることに注意．したがって右辺のは $\ell(\lambda) \le m$ を満たす分割 $\lambda \vdash n$ のみを考えれば十分である．

系 6.9. 任意の半標準盤 $T \in \mathrm{SSTab}^{(m)}(\lambda)$ $(\lambda \vdash n)$ に対して次の等式が成り立つ．

$$f_\lambda = \#\{w \in \mathscr{W}_n^{(m)} \mid T = (\emptyset \leftarrow w)\}$$

したがって右辺は T の取り方によらない．

23 Robinson-Schensted-Knuth 対応

実は拡張版の RS 対応 II はさらに一般化できる．

本日のモラル II: 研究のしっぽを掴まえるともっと大きな研究に辿り着く（こともある）．

そのアイディアを書くと，

- アイディア・1: Q_w も半標準盤でよい．
- アイディア・2: 最初は $1, 2, \ldots, n$ を使ってそのあとで広義単調増加列に置き換える．

となるが，少々説明が必要である．それをまずは例で見ておこう．

例 6.10. 次のような w を考えよう．

$$w = \left(\begin{array}{c|cc|ccc|cc} 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & 2 & 1 & 3 & 3 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

w の表現の上段は広義の単調増加列で，下段は上段の数字が等しい間は広義の単調増加列である．

このとき，下段を使って行バンプを行い，その箱の位置に上段の数字を入れていく．(あるいは，同じことだが，上段の数字に $1, 2, 3, \ldots, 8$ をあらかじめ割り振っておき，あとでこれを入れ替える．) やってみよう．

$$\boxed{4}, \boxed{1} \xrightarrow{2(2)} \begin{array}{|c|}\hline 2\\\hline 4\\\hline\end{array}, \begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline 2\\\hline\end{array} \xrightarrow{2(2)} \begin{array}{|c|c|}\hline 2&2\\\hline 4\\\cline{1-1}\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array} \xrightarrow{1(3)} \begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 2\\\cline{1-1} 4\\\cline{1-1}\end{array}, \begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 2\\\cline{1-1} 3\\\cline{1-1}\end{array} \xrightarrow{3(3)} \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline 2\\\cline{1-1} 4\\\cline{1-1}\end{array}, \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline 2\\\cline{1-1} 3\\\cline{1-1}\end{array}$$

$$\xrightarrow{3(3)} \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1&2&3&3\\\hline 2\\\cline{1-1} 4\\\cline{1-1}\end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1&2&3&3\\\hline 2\\\cline{1-1} 3\\\cline{1-1}\end{array} \xrightarrow{1(4)} \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1&1&3&3\\\hline 2&2\\\cline{1-2} 4\\\cline{1-1}\end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1&2&3&3\\\hline 2&4\\\cline{1-2} 3\\\cline{1-1}\end{array} \xrightarrow{4(4)} \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1&1&3&3&4\\\hline 2&2\\\cline{1-2} 4\\\cline{1-1}\end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1&2&3&3&4\\\hline 2&4\\\cline{1-2} 3\\\cline{1-1}\end{array}$$

ここで矢印の上の数字は，左側の盤に行バンプする数字（下段の数字）で，括弧内の数字は上段の数字で右側の盤の新箱の位置に入るものである．

このようにして半標準盤の対 (P_w, Q_w) が得られる．もっとも，この例ではうまく行っているようであるが，問題点は二つある．

- P_w は行バンプで得られるから半標準盤だが，Q_w はいつでも半標準盤になるのか．

- この対応は可逆であるか．つまり各ステップは逆に戻ることができるのか．

演習 6.11. 次のような w に対して，上の構成方法を用いて半標準盤の対 (P_w, Q_w) を計算せよ．このとき Q_w は半標準盤になっているだろうか．また各ステップを逆に辿ることはできるだろうか．

$$\left(\begin{array}{cc|cc|cc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & 3 & 1 & 4 & 1 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{cc|ccc|cc} 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 1 & 3 & 2 & 2 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{c|c|cccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 1 & 2 & 4 & 2 \end{array}\right)$$

このような，拡張された w に対してこのような操作から半標準盤の対 (P_w, Q_w) を得るような対応を Robinson-Schensted-Knuth 対応 (RSK 対応) と呼ぶが，この対応が

- *どこ*から*どこ*への写像なのか，とか，
- 写像は全単射なのか

といった疑問が自然に湧いてくる．この疑問については次回考えることにしよう．

第7回 Robinson-Schensted-Knuth 対応 2

Robinson-Schensted-Knuth 対応のアイディアはすでに得たが，それがどこまで一般化できて，どのような集合たちの間の対応を導くのかはまだ定かではなかった．本節では，配列・辞書式配列という置換の一般化を定義して，RSK 対応を数学的に定式化し，全単射対応の証明を完結させよう．

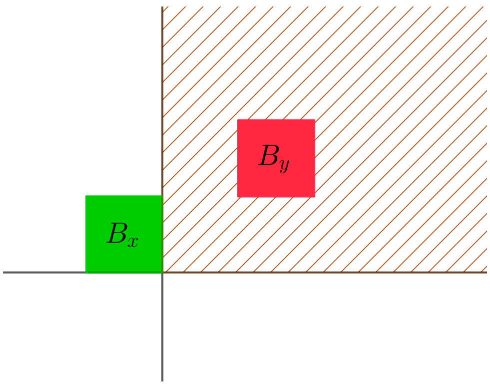
24 バンプ補題 I

前回紹介した RSK 対応の性質を述べるために次の “バンプ補題” を準備する．

補題 7.1 (バンプ補題 I)**.** T を半標準盤，$1 \leq x \leq y$ とする．
行バンプ $T \leftarrow x$ による新箱を B_x，行バンプ $(T \leftarrow x) \leftarrow y$ による新箱を B_y とすると B_y は B_x の狭義右，広義上方にある．

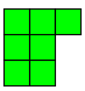
図 3: 二つの新箱 B_x と B_y の位置関係

B_y は B_x の狭義右，広義上方にある（図の斜線の部分にある）

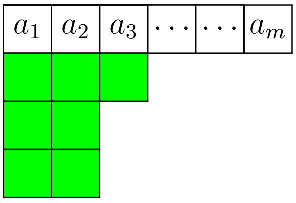


証明. T の行数 (分割 $\lambda = \mathrm{shape}(T)$ の長さ) に関する帰納法で示す．
まず T が 1 行のときは明らかに OK．そこで，T を第 1 行目と第 2 行目以降に分ける．

- T の第 1 行目（長さ m）を $\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & \cdots & a_m \\ \hline\end{array}$ とする．
- 第 2 行目以下を T' と書いて緑色で表そう．もちろんここには数字が入っている．

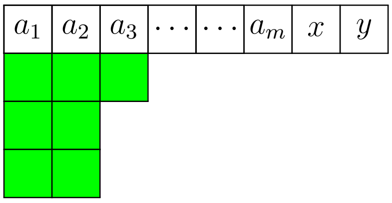
$T' =$ 

- したがって T は次のように表されている．

$T =$ 

行バンプ $(T \leftarrow x) \leftarrow y$ を考えよう．場合分けして考える．

(1) $a_m \leq x \leq y$ なら，$(T \leftarrow x) \leftarrow y$ は第 1 行の最後に x, y がくっつくだけなので

$(T \leftarrow x) \leftarrow y =$ 

で B_x の右隣に B_y が並んでいて OK.

(2) $x < a_m \leq y$ なら，$T \leftarrow x$ は x が $\exists a_i$ を追い出して，第 1 行目は $\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline a_1 & a_2 & \cdots & a_{i-1} & x & a_{i+1} & \cdots & a_m \\ \hline\end{array}$ に，第 2 行目以降は $T'' = T' \leftarrow a_i$ に変わる．新箱 B_x はこの T'' の部分に現れる．さらに y を行バンプすると $(T \leftarrow x) \leftarrow y$ では第 1 行目の最後尾に y がくっつき，1 行目が $\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline a_1 & a_2 & \cdots & a_{i-1} & x & a_{i+1} & \cdots & a_m & y \\ \hline\end{array}$ と変化して，T'' はそのまま．したがって新箱 B_y は第 1 行目の最後尾，y のある位置なので補題は成立する．

(3) 最後に $x \leq y < a_m$ のときは，$(T \leftarrow x) \leftarrow y$ の x も y も第 1 行目の数字を追い出す．そこで x に追い出された数字を a_i，そこで y に追い出された数字を a_j とすれば，$x \leq y$ なので $a_i \leq a_j$ である．

このとき，$(T \leftarrow x) \leftarrow y$ の第 1 行目は $\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\hline a_1 & \cdots & x & \cdots & y & \cdots & a_m \\ \hline\end{array}$ となっていて，第 2 行目以降は $T'' = (T' \leftarrow a_i) \leftarrow a_j$ である．したがって新箱はどちらも T'' に現れるが，T' の行数は T より小さいので帰納法の過程よりこの場合の新箱の位置は補題の条件を満たしている．

$\square$

25 Q_w が半標準盤になること

バンプ補題を用いて Q_w が半標準盤になる（右方向に広義単調増加・下方向に狭義単調増加）ことを確認しよう．

Q_w は新箱に上段の数字を順番に入れて構成するが，上段の数字は広義単調増加であることに注意しよう．

新箱は必ずヤング図形の角（右にも下にも箱がないような箱）に位置する．

- 現在入っている数字の最大値より大きい数字を新箱に入れるときには半標準盤の条件を満足する．
- 現在入っている**数字の最大値 M と等しい**数字を新箱に入れるとき．このときは w の性質から，下段の数字は広義に単調増加している．たとえば $x \leq y$ のように．これを行バンプすることになるが，するとバンプ補題より，すでに存在する M は新箱の狭義左側・広義の下側に存在している．したがって新箱に M を入れても半標準盤のままである．(同じ数字 M を複数追加していくときに新箱は左下から右上に向かって付け加わる．)

これより，各ステップで現れるヤング盤は半標準盤であることがわかる．もちろん最後のステップに現れるヤング盤 Q_w も半標準盤である．

このとき上段に同じ数字が複数並ぶときは，その部分にある**下段の数字が広義単調増加**であることが重要である．それは次の例から分かる．

例 7.2. $w = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ に対して同じ構成でヤング盤の対 (P_w, Q_w) を構成できる．

$$\begin{ytableau} 3 \end{ytableau}, \begin{ytableau} 1 \end{ytableau} \xrightarrow{1(1)} \begin{ytableau} 1 \\ 3 \end{ytableau}, \begin{ytableau} 1 \\ 1 \end{ytableau} \xrightarrow{2(1)} \begin{ytableau} 1 & 2 \\ 3 \end{ytableau}, \begin{ytableau} 1 & 1 \\ 1 \end{ytableau}$$

しかし，得られた $Q_w = \begin{ytableau} 1 & 1 \\ 1 \end{ytableau}$ は半標準盤ではない．

26　対応が可逆であること

一般的に考える前に，まず以前の例で対応がさかのぼれることを確認しておこう．

$$w = \left(\begin{array}{c|cc|ccc|cc} 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & 2 & 1 & 3 & 3 & 1 & 4 \end{array} \right)$$

w の表現の上段は広義の単調増加列で，下段は上段の数字が等しい間は広義の単調増加列である．

$$\begin{ytableau} 4 \end{ytableau}, \begin{ytableau} 1 \end{ytableau} \xrightarrow{2(2)} \begin{ytableau} 2 \\ 4 \end{ytableau}, \begin{ytableau} 1 \\ 2 \end{ytableau} \xrightarrow{2(2)} \begin{ytableau} 2 & 2 \\ 4 \end{ytableau}, \begin{ytableau} 1 & 2 \\ 2 \end{ytableau} \xrightarrow{1(3)} \begin{ytableau} 1 & 2 \\ 2 \\ 4 \end{ytableau}, \begin{ytableau} 1 & 2 \\ 2 \\ 3 \end{ytableau} \xrightarrow{3(3)} \begin{ytableau} 1 & 2 & 3 \\ 2 \\ 4 \end{ytableau}, \begin{ytableau} 1 & 2 & 3 \\ 2 \\ 3 \end{ytableau}$$

$$\xrightarrow{3(3)} \begin{ytableau} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 \\ 4 \end{ytableau}, \begin{ytableau} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 \\ 3 \end{ytableau} \xrightarrow{1(4)} \begin{ytableau} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 2 \\ 4 \end{ytableau}, \begin{ytableau} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 4 \\ 3 \end{ytableau} \xrightarrow{4(4)} \begin{ytableau} 1 & 1 & 3 & 3 & 4 \\ 2 & 2 \\ 4 \end{ytableau}, \begin{ytableau} 1 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ 2 & 4 \\ 3 \end{ytableau}$$

この手順が逆にさかのぼれるかであるが，要は新箱の位置が特定できればよい．

Q_w の方に現れる数字の最大値を M とするとき，M が一つきりしかなければ M の箱が新箱であることは明かであるから，問題はない．

M が複数あるときはどうすればよいのか．この例では，たとえば 3 は上段に 3 つ現れており，どの 3 がどの順番で追加されたかを判定する必要がある．これは 2 でも 4 でも同じである．しかし，上段に 3 が並んでいるとき，下段の数字は 133 と広義単調増加になるように並んでいる．したがってバンプ補題によると

同じ数字 M は左の列から右の列に向かう方向に新箱として現れる

ことがわかる．上の段に移動することはあるが，左から右へという流れは変わらない．だから逆のプロセスでは，同じ数字 M の一番右端のものが新箱として追加されたことが分かる．

このようにして新箱の位置は確定するので，逆の過程を辿ることができる．

ここでも上段の数字が同じときには下段の数字が広義単調増加に並んでいることが重要であることを強調しておこう．

27 Robinson-Schensted-Knuth 対応 (RSK 対応)

我々の w はもう "語" という範疇を超えて，上段・下段に二つの数列が並んだ置換のようなものになった．w はたとえば

$$w = \left(\begin{array}{c|cc|ccc|cc} 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & 2 & 1 & 3 & 3 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

のように，二つの数字の列で，

- 上段は広義の単調増加列，
- 下段は上段の数字が等しい間は広義の単調増加列

になっているようなものであった．このような w を表現するのにピッタリの定義を紹介しよう．

定義 7.3. **配列** (array) とは 2 行にわたる数字の列

$$w = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & \cdots & u_\ell \\ v_1 & v_2 & v_3 & \cdots & v_\ell \end{pmatrix} \qquad u_i \in [n],\ \ v_i \in [m] \tag{27.1}$$

のことである．配列 w が長さ n の**語** (word) であるとは，$\ell = n$ であって，$(u_1, u_2, \ldots, u_n) = (1, 2, \ldots, n)$ となっているときに言う．語であって，さらに $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} = [n]$ のとき，これを**順列語** (permutation word) と呼ぶ．

また，式 (27.1) の配列 w が辞書式配列 (lexicographic array) であるとは

(1) $u_1 \le u_2 \le u_3 \le \cdots \le u_\ell$: 広義単調増加列でかつ

(2) $u_{k-1} = u_k$ ならば $v_{k-1} \le v_k$

が成り立つときにいう.

長さ ℓ の辞書式配列の全体を

$$\mathscr{A}_n^m(\ell) = \left\{ w = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & \cdots & u_\ell \\ v_1 & v_2 & v_3 & \cdots & v_\ell \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{l} u_i \in [n], v_i \in [m] \text{ であって} \\ w \text{ は辞書式配列} \end{array} \right\} \tag{27.2}$$

と書き, $\mathscr{A}_n^m = \coprod_{\ell=0}^{\infty} \mathscr{A}_n^m(\ell)$ とおく.

我々が考えたアルゴリズムにより写像

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{A}_n^m(\ell) & \longrightarrow & \coprod_{\lambda \vdash \ell} \mathrm{SSTab}^{(m)}(\lambda) \times \mathrm{SSTab}^{(n)}(\lambda) \\ \Uplus & & \Uplus \\ w & \longmapsto & (P_w, Q_w) \end{array} \tag{27.3}$$

は矛盾なく定義されている.(つまり P_w, Q_w は半標準盤である.)

定理 7.4. 上の写像 (27.3) は次の**全単射**を導く. これを **Robinson-Schensted-Knuth 対応** (**RSK 対応**) と呼ぶ.

$$\mathscr{A}_n^m \xrightarrow{\sim} \coprod_{\lambda \in \mathscr{P}} \mathrm{SSTab}^{(m)}(\lambda) \times \mathrm{SSTab}^{(n)}(\lambda)$$
$$\mathscr{A}_n^m(\ell) \xrightarrow{\sim} \coprod_{\lambda \in \mathscr{P}(\ell)} \mathrm{SSTab}^{(m)}(\lambda) \times \mathrm{SSTab}^{(n)}(\lambda)$$

すでに写像が元に戻ることは見たので, 残っているのは全射性であるが, これは次の節で示そう.

28 バンプ補題 II

RSK 対応の “逆操作” を行うためには次の補題が必要になる. この補題は, バンプ補題 I の “逆” に当たる.

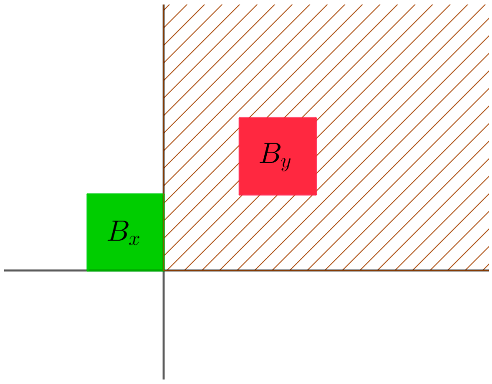
補題 7.5 (バンプ補題 II). T を半標準盤とし, 行バンプ $T \leftarrow x$ による新箱を B_x, 行バンプ $(T \leftarrow x) \leftarrow y$ による新箱を B_y とする.

もし B_y が B_x の狭義右, 広義上方にあれば $x \le y$ が成り立つ.

補題の条件は, “B_x が B_y の狭義左, 広義下にある” と言っても同じである.

図 4: 二つの新箱 B_x と B_y の位置関係

B_y は B_x の狭義右，広義上方にある（図の斜線の部分にある）



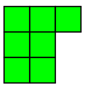
証明. 補題の対偶をとって，

$y < x$ ならば，B_y が B_x の広義左，狭義下にある

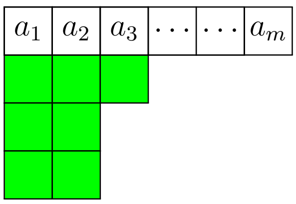
ことを T の行数 (分割 $\lambda = \mathrm{shape}(T)$ の長さ) に関する帰納法で示す．

まず T が 1 行のときは明らかに OK．そこで，T を第 1 行目と第 2 行目以降に分ける．

- T の第 1 行目（長さ m）を $\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & \cdots & a_m \\ \hline \end{array}$ とする．
- 第 2 行目以下を T' と書いて緑色で表そう．もちろんここには数字が入っている．

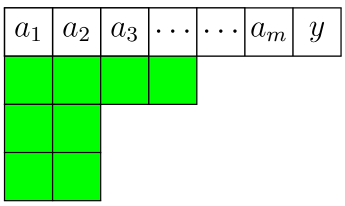
$T' =$ 

- したがって T は次のように表されている．

$T =$ 

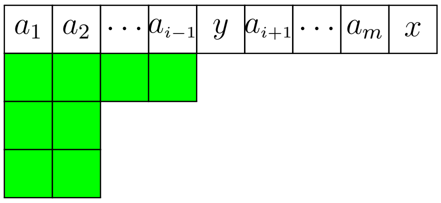
行バンプ $(T \leftarrow x) \leftarrow y$ を考えよう．場合分けして考える．

(1) $a_m \leq y < x$ なら，$(T \leftarrow x) \leftarrow y$ は第 1 行の最後に x がくっつき，つぎに y をバンプしたときには x が追い出されて第 2 行目以降に追加される．つまり

$(T \leftarrow x) \leftarrow y =$ 

であって，y の位置（1 行目の右端）が B_x，緑の部分が $T' \leftarrow x$ であり，もちろん B_y もこの緑の部分にある．したがって B_y は B_x の広義左，狭義下にあるから OK．

(2) $y < a_m \leq x$ なら，$T \leftarrow x$ は x が第 1 行の右端にくっつくだけで，これが B_x．y を行バンプしても x の右隣に付くことは無いから，かならず何かの a_i を追い出し，B_y は 2 行目以降に現れる．それは B_x の広義左，狭義下にあるから OK．



(3) 最後に $y < x < a_m$ のときは，$(T \leftarrow x) \leftarrow y$ の x も y も第 1 行目の数字を追い出す．そこで x に追い出された数字を a_i，そこで y に追い出された数字を a'_j (これは x の可能性もある) とすれば，$y < x$ なので $a'_j < a_i$ である．

このとき，$(T \leftarrow x) \leftarrow y$ の第 1 行目は ($a'_j \neq x$ なら) $\begin{ytableau} a_1 & \cdots & y & \cdots & x & \cdots & a_m \end{ytableau}$ となっていて，第 2 行目以降は $T'' = (T' \leftarrow a_i) \leftarrow a'_j$ である．したがって新箱はどちらも T'' に現れるが，T' の行数は T より小さいので帰納法の過程よりこの場合の新箱の位置は補題の条件を満たしている．($a'_j = x$ のときも同様．)

$\square$

29 逆対応の例

例 7.6. 実際に半標準盤の組から辞書式配列を復活してみよう．

$$(P, Q) = \left(\begin{ytableau} 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 5 \end{ytableau},\ \begin{ytableau} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 4 & 5 \\ 4 & 5 \end{ytableau} \right)$$

Q の数字の大きなものから，同じ数字では右から左へ元に戻してゆけばよい．

$$\left(\begin{ytableau} 1 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 5 & 5 \end{ytableau},\ \begin{ytableau} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 4 \\ 4 & 5 \end{ytableau} \right) \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \to \quad \left(\begin{ytableau} 1 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 5 \\ 5 \end{ytableau},\ \begin{ytableau} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 4 \\ 4 \end{ytableau} \right) \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\to \left(\begin{ytableau} 1 & 1 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 2 \\ 5 \end{ytableau},\ \begin{ytableau} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 4 \end{ytableau} \right) \begin{pmatrix} 4 & 5 & 5 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \to \quad \left(\begin{ytableau} 1 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 \\ 5 \end{ytableau},\ \begin{ytableau} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 3 \\ 4 \end{ytableau} \right) \begin{pmatrix} 4 & 4 & 5 & 5 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\to \left(\begin{ytableau} 1 & 2 & 2 & 3 & 5 \\ 5 \end{ytableau},\ \begin{ytableau} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 3 \end{ytableau} \right) \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \to \quad \left(\begin{ytableau} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 5 \end{ytableau},\ \begin{ytableau} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 \end{ytableau} \right) \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 & 4 & 5 & 5 \\ 5 & 1 & 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\to \left(\begin{ytableau} 1 & 2 & 2 & 5 \end{ytableau},\ \begin{ytableau} 1 & 1 & 2 & 2 \end{ytableau} \right) \begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 & 4 & 4 & 5 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \to \quad (\emptyset,\ \emptyset) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 & 4 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 5 & 3 & 5 & 1 & 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

演習 7.7. 次の半標準盤の組 (P, Q) に RSK 対応でうつるような辞書式配列 w を求めよ．

$$\left(\begin{ytableau} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{ytableau}, \begin{ytableau} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{ytableau} \right) \quad \left(\begin{ytableau} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{ytableau}, \begin{ytableau} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{ytableau} \right) \quad \left(\begin{ytableau} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 \end{ytableau}, \begin{ytableau} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 4 \end{ytableau} \right)$$

$$\left(\begin{ytableau} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{ytableau}, \begin{ytableau} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{ytableau} \right) \quad \left(\begin{ytableau} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{ytableau}, \begin{ytableau} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{ytableau} \right) \quad \left(\begin{ytableau} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 4 \end{ytableau}, \begin{ytableau} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 \end{ytableau} \right)$$

第 8 回 Robinson-Schensted-Knuth 対応 3

RSK 対応の仕上げとして，辞書式配列と非負整数係数の行列との対応，それを利用した半標準盤の個数に関する等式を示そう．

これで最初に紹介した不思議な組合せ論の等式の大部分が証明できたことになるが，最後の等式，ワイルの次元公式の証明が残っている．この公式の証明はシューア関数と対称式の理論を用いて行う．いささか大がかりだが，対称式の理論は美しく，組合せ論にも大きな応用を持つ．この機会に対称式に慣れ親しんでおこう．

30 辞書式配列と行列

辞書式配列とは 2 行にわたる数字の列

$$w = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & \cdots & u_\ell \\ v_1 & v_2 & v_3 & \cdots & v_\ell \end{pmatrix} \qquad u_i \in [n],\ \ v_i \in [m] \tag{30.1}$$

で

(1) $u_1 \leq u_2 \leq u_3 \leq \cdots \leq u_\ell$: 広義単調増加列でかつ

(2) $u_{k-1} = u_k$ ならば $v_{k-1} \leq v_k$

が成り立つようなものであり，長さ ℓ の辞書式配列の全体を $\mathscr{A}_n^m(\ell)$，すべての長さの辞書式配列の集合を $\mathscr{A}_n^m = \coprod_{\ell=0}^{\infty} \mathscr{A}_n^m(\ell)$ と書くのであった．

いま，非負整数を要素とする $n \times m$ 行列の全体を $\mathrm{M}_{n,m}(\mathbb{Z}_{\geq 0})$ と書こう．さらに，(i,j) 成分のみが 1 で他の成分はすべて 0 であるような行列を $E_{i,j}$ と書いて，これを**行列単位**と呼ぶ．(単位行列とはまったく異なるので注意せよ．)

さて，式 (30.1) のようにあらわされた辞書式配列 w に対して行列 $A_w \in \mathrm{M}_{n,m}(\mathbb{Z}_{\geq 0})$ を次のように対応させる．

$$\psi : \mathscr{A}_n^m \ni w \mapsto A_w = \sum_{i=1}^{\ell} E_{u_i, v_i} \in \mathrm{M}_{n,m}(\mathbb{Z}_{\geq 0}) \tag{30.2}$$

この写像を ψ で表す．

次の補題は意味からしてほぼ明らかである．

補題 8.1. 上のように決まった写像 $\psi : \mathscr{A}_n^m \xrightarrow{\sim} \mathrm{M}_{n,m}(\mathbb{Z}_{\geq 0})$ は全単射である．さらにこの全単射は次の全単射を導く．

$$\psi^{(\ell)} : \mathscr{A}_n^m(\ell) \xrightarrow{\sim} \mathrm{M}_{n,m}(\mathbb{Z}_{\geq 0})^{(\ell)} := \{A \in \mathrm{M}_{n,m}(\mathbb{Z}_{\geq 0}) \mid \sum_{i,j} a_{i,j} = \ell\}$$

31　行列と多項式環

さらに辞書式配列と多項式環を関係づけよう．そこで

$$\mathbb{C}\mathscr{A}_n^m = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{w \mid w \in \mathscr{A}_n^m\} = \langle \mathscr{A}_n^m \rangle_{\mathbb{C}}$$

を辞書式配列から抽象的に生成された複素ベクトル空間[8]とし，辞書式配列同士の積を

$$w = \begin{pmatrix} u_1 & \cdots & u_\ell \\ v_1 & \cdots & v_\ell \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} p_1 & \cdots & p_k \\ q_1 & \cdots & q_k \end{pmatrix}$$

に対して

$$w \cdot z = \left(\begin{pmatrix} u_1 & \cdots & u_\ell & p_1 & \cdots & p_k \\ v_1 & \cdots & v_\ell & q_1 & \cdots & q_k \end{pmatrix} \text{を辞書式順序で並べ替えたもの} \right)$$

と定義する．

次の補題もほぼ明らかだろう．

補題 8.2. $w, z \in \mathscr{A}_n^m$ を辞書式配列とし，$\psi : \mathscr{A}_n^m \to \mathrm{M}_{n,m}(\mathbb{Z}_{\geq 0})$ を上で与えた同型とする．

(1) $\psi(w \cdot z) = \psi(w) + \psi(z) = A_w + A_z$ （ただし右辺は行列の和）

(2) $w \cdot z = z \cdot w$ （積は可換）であって結合律を満たす．

(3) $\mathbb{C}$ 代数として $\mathbb{C}\mathscr{A}_n^m \simeq \mathbb{C}[x_{i,j} \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m]$ は同型である．ただし右辺は $x_{i,j}$ を文字とする mn 変数の多項式環を表す．

(4) 上の同型において $\mathbb{C}\mathscr{A}_n^m(\ell)$ は ℓ 次同次式の空間とベクトル空間として同型である:

$$\mathbb{C}\mathscr{A}_n^m(\ell) \simeq \mathbb{C}[x_{i,j} \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m]_\ell$$

ここで多項式環 $\mathbb{C}[X]$ に ℓ を下につけた $\mathbb{C}[X]_\ell$ は ℓ 次同次式の空間を表している．($X = (x_{i,j})$ は mn 個の変数の全体である．)

32　GL-GL 相互律の証明

以上の考察から次の非自明な系が得られる．この等式は第2回 (§ ??) の定理?? (GL-GL 相互律) で述べたものである．

系 8.3. $d_\lambda^{(m)} = \#\,\mathrm{SSTab}^{(m)}(\lambda)$ を半標準盤の個数とすると

$$\sum_{\lambda \vdash \ell} d_\lambda^{(m)} d_\lambda^{(n)} = \binom{mn + \ell - 1}{\ell - 1}$$

が成り立つ．

[8] 要するに異なる辞書式配列はすべて一次独立とした，形式的な一次結合 $\sum_w \alpha_w w$ $(\alpha_w \in \mathbb{C})$ の全体である．

証明. RSK 対応により $\mathscr{A}_n^m(\ell) \simeq \coprod_{\lambda \in \mathscr{P}} \mathrm{SSTab}^{(m)}(\lambda) \times \mathrm{SSTab}^{(n)}(\lambda)$ だったから個数を数えると

$$\sum_{\lambda \vdash \ell} d_\lambda^{(m)} d_\lambda^{(n)} = \# \mathscr{A}_n^m(\ell) = \dim \mathbb{C}\mathscr{A}_n^m(\ell) = \dim \mathbb{C}[X]_\ell = \binom{mn + \ell - 1}{\ell - 1}$$

である. □

あと残っているのはワイルの次元公式 (§?? の定理??) である.

定理 8.4 (ワイル[9]の次元公式（再掲）). $m \geq \ell(\lambda) = \ell$ のとき，$\mu = \lambda + (m, m-1, m-2, \ldots, 3, 2, 1)$ とおくと,

$$d_\lambda^{(m)} = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq m} (\mu_i - \mu_j)}{\prod_{1 \leq i < j \leq m} (j - i)} = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq m} (\lambda_i - \lambda_j + j - i)}{(m-1)!\,(m-2)! \cdots 3! \cdot 2! \cdot 1}$$

これを証明するにはかなり準備が必要である．その話を次の回から始めるが，今回は対称多項式についての復習から.

33 対称式（対称関数）

対称式はよく知られた多項式で専門書も数多く出ている．もっとも定評があって詳しい参考文献は [14] であるが，慣れていないと取っつきにくい部分があるかもしれない．一方 [15] は本の厚さも薄いし，例も豊富でお勧めである．以下，この広義での話や議論は [14] からの引用が多くなるが，いちいち断らない.

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ を n 個の文字変数とし，これらの文字の置換を考える．つまり置換 $w \in S_n$ に対して $wx_i = x_{w(i)}$ と決める.

$f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ を $x_1, \ldots, x_n$ の多項式とし,

$$f(x) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n} a_\nu x^\nu \qquad (x^\nu = x_1^{\nu_1} \cdots x_n^{\nu_n} \text{ は多重指数}; a_\nu \in \mathbb{C})$$

と書いておく．このとき，文字変数への置換の作用を $f(x)$ へと拡張して

$$wf(x) = f(x_{w(1)}, \ldots, x_{w(n)}) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n} a_\nu x_{w(1)}^{\nu_1} \cdots x_{w(n)}^{\nu_n} = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^n} a_\nu x^{w\nu}$$

と決める．ただし $w\nu = (\nu_{w^{-1}(1)}, \nu_{w^{-1}(2)}, \cdots, \nu_{w^{-1}(n)})$ である.

定義 8.5 (対称多項式). 任意の置換 $w \in S_n$ に対して $wf(x) = f(x)$ となるとき $f(x)$ を対称多項式，あるいは単に対称式と呼ぶ.

[9]Weyl, Hermann

例 8.6. 基本対称式

$$e_k = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k}$$

ただし $e_0 = 1$, $e_k = 0 \ (k \ge n+1)$ とおく.

演習 8.7. $n = 2, 3$ のとき，e_1, e_2, e_3 を書け.

例 8.8. $k \ge 1$ に対して k 次の**冪和対称式**を

$$p_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k$$

で定義する.

演習 8.9. $n = 2, 3$ に対して p_1, p_2, p_3 を書け.

演習 8.10. (1) $n = 2$ のとき，p_1, p_2, p_3 を e_1, e_2, e_3 を用いて表せ.

(2) $n = 3$ のとき，p_1, p_2, p_3 を e_1, e_2, e_3 を用いて表せ.

(3) $n = 3$ のとき，p_4 を e_1, e_2, e_3, e_4 を用いて表せ.

例 8.11. 完全対称式

$$h_k = \sum_{1 \le i_1 \le i_2 \le \cdots \le i_k \le n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k}$$

ただし $h_0 = 1$ とおく．これは要するに k 次の単項式をすべて加えたものである.

演習 8.12. (1) $n = 2$ のとき，h_1, h_2, h_3 を e_1, e_2 で表せ.

(2) $n = 3$ のとき，$h_1 = e_1$, $h_2 = p_2 + e_2$ であるが，$h_3 = p_3 + (\cdots) + e_3$ と書いたとき，$(\cdots)$ の部分を e_k で表せ.

例 8.13. $d \ge 1$ の分割 $\lambda \vdash d$ （ただし $\ell(\lambda) \le n$）に対して，$S_n \cdot \lambda = \{w\lambda \mid w \in S_n\}$ (集合なので重複は数えない) とおいて，

$$m_\lambda(x) = \sum_{\nu \in S_n \cdot \lambda} x^\nu$$

によって定義された対称式を**単項対称式**と呼ぶ．これはある単項式を項として含む “最小” の対称式である.

例 8.14. $m_{(2,1)}(x)$ を考えよう．$n = 2$ のときは，

$$m_{(2,1)}(x) = x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2$$

$n = 3$ のときは，次のようになる．このときは $\lambda = (2,1) = (2,1,0)$ と考えることに注意.

$$m_{(2,1)}(x) = x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + x_2^2 x_3 + x_2 x_3^2 + x_1^2 x_3 + x_1 x_3^2$$

演習 8.15. (1) $n=3$ のとき $m_{(1,1,1)}(x)$, $m_{(3)}(x)$ を計算せよ．

(2) $n=4$ のとき $m_{(1,1,1)}(x)$, $m_{(3)}(x)$ を計算せよ．

例 8.16. λ を台とする m 次の半標準盤 T に対して，数字 $1,2,\ldots,m$ の箱それぞれに対応する $x_1,x_2,\ldots,x_m$ を入れ，箱に入った x_i たちをすべて掛け合わせて得られる単項式を x^T と書く．$\lambda=(2,1)$, $m=3$ のときに

$$s_{(2,1)}(x)=\sum_{T\in\mathrm{SSTab}^{(3)}((2,1))} x^T$$

を計算せよ．また，これが対称式になっていることを確認せよ．(少し不思議なことではあるが．)

このように半標準盤の集合から対称多項式が計算できる．次回から，そのような対称式の理論を紹介，それを利用してワイルの次元公式を証明しよう．

第 9 回　母函数と対称式

母函数の方法は，数列や直交多項式系の研究でひろく使われてきた．数列のように，本質的に離散的な対象に対し，母函数を用いることで，微分や積分，連続性の手法を持ち込むことができるようになる．また，母函数を用いることによって個々のパラメータごとの計算ではなく，数列や関数系の性質を統一的に理解することが可能になる．このような母函数の方法を分割関数や，対象多項式の場合を例として考えてみよう．

34　さまざまな対称式

- 基本対称式
$$e_k = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k}$$
ただし $e_0 = 1$，$e_k = 0\ (k \ge n+1)$.

- k 次の冪和対称式
$$p_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k$$

- 完全対称式
$$h_k = \sum_{1 \le i_1 \le i_2 \le \cdots \le i_k \le n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k}$$
ただし $h_0 = 1$．これは要するに k 次の単項式すべての和である．

- 単項対称式．分割 $\lambda \vdash d$ （ただし $\ell(\lambda) \le n$）に対して，
$$m_\lambda(x) = \sum_{\nu \in S_n \cdot \lambda} x^\nu$$
これはある単項式を項として含む “最小” の対称式である．

これらの多項式を統制するために母函数 (generating function) という方法を使うことにしよう．

35　母函数

まずは簡単な母函数から話を始めよう．

35.1 分割数の母函数

定理 9.1 (**分割数の母函数**). p_n を分割数 ($= n$ の分割の個数) とすると，次の等式が成り立つ．

$$P(t) := \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-t^k} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n t^n$$

証明. 等比数列の和公式より

$$\frac{1}{1-t^k} = 1 + t^k + t^{2k} + t^{3k} + \cdots = \sum_{m=0}^{\infty} t^{mk}$$

なので，定理の式の左辺は

$$\prod_{k=1}^{\infty} \sum_{m_k=0}^{\infty} t^{m_k k} = \sum t^{m_1 1} t^{m_2 2} \cdots t^{m_k k} \cdots = \sum t^{m_1 1 + m_2 2 + \cdots + m_k k + \cdots}$$

ここで $n = m_1 1 + m_2 2 + \cdots + m_k k + \cdots$ となるような項を考えると，必然的に $k \leq n$ でなければならず，和は有限である．このとき $n = m_1 1 + m_2 2 + \cdots + m_k k + \cdots + m_n n$ を 1 が m_1 個，2 が m_2 個，...，k が m_k 個, ... となるような n の分割であるとみなせば，そのような組合せの全体は分割の総数と同じ個数だけある．したがって t^n に一致するような項の総数はちょうど p_n 個ある． □

演習 9.2. 母函数の 4 つの項

$$\begin{aligned} P_4(t) :=& \prod_{k=1}^{4} 1/(1-t^k) = \prod_{k=1}^{4} (1 + t^k + t^{2k} + t^{3k} + \cdots \\ =& (1 + t + t^2 + t^3 + t^4 + t^5 + t^6 + \cdots) \\ & (1 + t^2 + t^4 + t^6 + \cdots) \\ & (1 + t^3 + t^6 + \cdots) \\ & (1 + t^4 + t^8 + \cdots) \end{aligned}$$

の t^2, t^3, t^4 の係数を計算することにより p_2, p_3, p_4 を求めよ．また t^5, t^6 の係数は何を意味するだろうか？

演習をやってみれば分かるように，この母函数の方法で p_n をもとめるには実質的にすべての分割を数え上げるのと同じ手間がかかることが分かるだろう．では，メリットはないのだろうか？

35.2 Euler の恒等式

定理 9.3 (**Euler の恒等式**[10]). 次の恒等式が成り立つ．

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-t^{2k-1}} = \prod_{k=1}^{\infty} (1 + t^k)$$

証明. 無限積が絶対収束していることから，積の順序が交換でき，次のように計算できる．

$$\begin{aligned}
P(t) &= \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-t^k} \\
&= \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-t^{2k}} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-t^{2k-1}} \\
&= \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1-t^k)(1+t^k)} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-t^{2k-1}} \\
&= P(t) \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+t^k} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-t^{2k-1}}
\end{aligned}$$

両辺を $P(t)$ で割り，さらに $\prod_{k=1}^{\infty}(1+t^k)$ を両辺に掛けると定理の等式を得る． □

次の系の等式も Euler の恒等式と呼ばれる．

系 9.4 (Euler の恒等式). 自然数 n に対して，相異なる因子を持つ n の分割の個数と，すべての因子が奇数であるような n の分割の個数は等しい．

$$\#\{\lambda \vdash n \mid \lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_\ell > 0\} = \#\{\lambda \vdash n \mid \forall \lambda_i \equiv 1 \bmod 2\}$$

ちなみにすべての因子が相異なる分割を**狭義分割** (strict partition)，すべての因子が奇数の分割を**奇数分割** (odd partition) と呼ぶ[11]．

演習 9.5. 次の等式からどのような組合せ論的等式が得られるだろうか？

$$(1+t)P(t) = \frac{1}{(1-t)^2} \prod_{k=2}^{\infty} \frac{1}{1-t^k}$$

36 対称式と母函数

それぞれの対称式に対する母函数を考えよう．変数は $x_1, x_2, \ldots, x_n$ の n 個の変数で考える．

以下あげる母函数表示は “成り立つ” と考えてもよいが，逆にこの母函数表示によって対称式を定義する式だと思ってもよい．

[10] Leonhard Euler (1707–1783).

[11] 分割に関する用語は日本語としてまだ定着していないように思われるが，ここの訳語は石川雅雄氏の論説 [40] に拠った．

36.1　基本対称式

母函数の変数を z とする.

$$E(z) := \sum_{k=0}^{n} e_k(x) z^k = (1 + x_1 z)(1 + x_2 z) \cdots (1 + x_n z) = \prod_{k=1}^{n} (1 + x_k z)$$

このように書くとちょうど z のべきと対称式の次数が一致して見やすいが，次のように表すこともできる.

$$\begin{aligned}(t - x_1)(t - x_2) \cdots (t - x_n) &= \prod_{k=1}^{n} (t - x_k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} e_{n-k}(x) t^k = t^n - e_1(x) t^{n-1} + \cdots + (-1)^n e_n(x)\end{aligned}$$

これは n 次方程式における解と係数の関係に当たっている.

36.2　冪和対称式

$$\begin{aligned}P(z) &:= \sum_{k=1}^{\infty} p_k(x) z^{k-1} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{\infty} x_i^k z^{k-1} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{1 - x_i z} = \frac{d}{dz} \log \left(\frac{1}{\prod_{i=1}^{n} (1 - x_i z)} \right)\end{aligned}$$

36.3　完全対称式

$$\begin{aligned}H(z) &:= \sum_{k=0}^{\infty} h_k(x) z^k \\ &= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1 - x_i z}\end{aligned}$$

37　母函数表示から分かること

以上，いくつかの対称式の母函数を定義し，その具体形を見てきたが，これがどのような働きをするのかを考えてみよう.

母函数は使い方次第でとても有効な手段になり得ることが実感できると思う.

37.1 基本対称式と完全対称式

補題 9.6. $E(z)H(-z) = E(-z)H(z) = 1$

証明.
$$H(-z) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1+x_i z} = \frac{1}{E(z)}$$
□

系 9.7. $\sum_{N=k+\ell} (-1)^\ell e_k(x) h_\ell(x) = 0 \qquad (\forall N \geq 1)$

証明. 次の等式の最初と最後の式の係数を比較すればよい．

$$\begin{aligned}
1 = E(z)H(-z) &= \left(\sum_{k=0}^{n} e_k(x) z^k\right)\left(\sum_{\ell=0}^{n} h_\ell(x)(-z)^\ell\right) \\
&= \sum_{k,\ell} e_k(x)(-1)^\ell h_\ell(x) z^{k+\ell} \\
&= \sum_{N=0}^{\infty}\left(\sum_{k+\ell=N} (-1)^\ell e_k(x) h_\ell(x)\right) z^N
\end{aligned}$$
□

系 9.8. $h_N(x)$ は $\{e_k(x) \mid 1 \leq k \leq n\}$ の多項式で表すことができる．逆に，$e_k(x)$ は $\{h_\ell(x) \mid 1 \leq \ell \leq n\}$ の多項式で表すことができる．

証明. 前系より，

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{N=k+\ell} (-1)^\ell e_k(x) h_\ell(x) \\
&= (-1)^N h_N(x) + (-1)^{N-1} e_1(x) h_{N-1}(x) + \cdots + (-1)^{N-n} e_n(x) h_{N-n}(x)
\end{aligned}$$

だから
$$h_N(x) = (-1)e_1(x)h_{N-1}(x) + \cdots + (-1)^n e_n(x) h_{N-n}(x)$$
であるが，帰納法を用いると $h_\ell(x)$ $(\ell < N)$ は $\{e_k(x) \mid 1 \leq k \leq n\}$ の多項式で表されている．したがって，$h_N(x)$ も基本対称式の多項式で表すことができる．

基本対称式を完全対称式で表すのも同じである． □

演習 9.9. $n = 3$ のとき，$N = 2, 3, 4$ に対して系で得られた式を書き，h_2, h_3, h_4 を基本対称式 e_1, e_2, e_3 を用いて表せ．

第 10 回　Schur 多項式

すでに，基本対称式・完全対称式・冪和対称式・単項対称式といったさまざまな対称式の例を見てきたが，なかでも 究極の 対称多項式が “Schur 多項式” と呼ばれる対称式である．Schur 多項式はその定義・導入からしてそう簡単ではないが，今回と次回に分けてその定義といくつかの性質を考えていこう．

38　母函数表示から分かること（つづき）

前回は基本対称式と完全対称式の母函数の関係 $E(z)H(-z) = E(-z)H(z) = 1$ について考えた．

その続きを考えてみる．

38.1　冪和対称式の母函数と完全対称式

補題 10.1. $H'(z) = P(z)H(z)$

証明.

$$\begin{aligned} P(z) &= \frac{d}{dz} \log \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1 - x_i z} \right) \\ &= \frac{d}{dz} \log H(z) = \frac{H'(z)}{H(z)} \\ \therefore \quad & H'(z) = P(z)H(z) \end{aligned}$$

□

係数である対称式の間の関係を見てみよう．補題の左辺は

$$H'(z) = \sum_{m=0}^{\infty} h_m(x) m z^{m-1} = \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) h_{m+1}(x) z^m$$

となり，右辺は

$$\begin{aligned} P(z)H(z) &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} p_{k+1}(x) z^k \right) \left(\sum_{\ell=1}^{\infty} h_\ell(x) z^\ell \right) = \sum_{k,\ell \geq 0}^{\infty} p_{k+1}(x) h_\ell(x) z^{k+\ell} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{m=k+\ell} p_{k+1}(x) h_\ell(x) \right) z^m \end{aligned}$$

だから，係数を比較して

$$
\begin{aligned}
(m+1)h_{m+1}(x) &= \sum_{m=k+\ell} p_{k+1}(x)h_\ell(x) = \sum_{\ell=0}^{m} p_{m-\ell+1}(x)h_\ell(x) \\
&= p_{m+1}(x) + p_m(x)h_1(x) + p_{m-1}(x)h_2(x) + \cdots + p_1(x)h_m(x)
\end{aligned}
$$

この式から，帰納法を使うと，完全対称式は冪和対称式の多項式で表すことができるということがわかる．さらに，$p_{m+1}(x) = \ldots$ の形に書き直せば，逆に冪和対称式は完全対称式の多項式で表せることもわかる．

演習 10.2. h_3 を p_1, p_2, p_3 で表せ．また p_3 を h_1, h_2, h_3 で表せ．

38.2 冪和対称式の母函数と基本対称式

同様にして冪和対称式と基本対称式の母函数の関係が得られる．ほぼ同じ計算なので，簡単に見ておこう．

補題 10.3. $-E'(-z) = P(z)E(-z)$

証明.

$$
\begin{aligned}
P(z) &= \frac{d}{dz}\log\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{1-x_i z}\right) \\
&= -\frac{d}{dz}\log E(-z) = \frac{E'(-z)}{E(-z)} \\
\therefore \quad & -E'(-z) = P(z)E(-z)
\end{aligned}
$$

□

係数である対称式を比較して，次の系を得る．

系 10.4 (**Newton の公式**[12])**.** (1) 次の関係式が成り立つ．

$$
\begin{aligned}
me_m(x) &= \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k+1} p_k(x) e_{m-k}(x) \\
&= p_1(x)e_{m-1}(x) - p_2(x)e_{m-2}(x) + \cdots + (-1)^{m+1} p_m(x) e_0(x)
\end{aligned}
$$

(2) 基本対称式は冪和対称式の多項式で，逆に冪和対称式は完全対称式の多項式で表せる．

演習 10.5. $n \geq 3$ とする．e_3 を p_1, p_2, p_3 で表せ．また p_3 を e_1, e_2, e_3 で表せ．
$n = 2$ のときは何が起こるだろうか？

[12]Sir Isaac Newton (1642–1727).

39　対称多項式環

$\Lambda = \Lambda(n) = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]^{S_n}$ をすべての n 変数対称式からなる代数とする．これを**対称多項式環**（対称多項式代数）と呼ぶ．右辺は多項式環のうち S_n の作用で変化しないもの（**不変である**もの）を表している．

対称多項式のうち，d 次斉次のものからなる部分空間を Λ_d (または $\Lambda(n)_d$) と書くと，明らかに

$$\Lambda = \bigoplus_{d=0}^{\infty} \Lambda_d \qquad (\text{直和})$$

が成り立ち，さらに $\Lambda_k \Lambda_m \subset \Lambda_{k+m}$ が成り立つ．このようなとき，Λ は次数づけられている，あるいは**次数付き環**（次数付き代数）であるという．

実は次の定理が成り立つ．

定理 10.6. 対称多項式環 $\Lambda(n)$ は n 変数多項式環と代数として同型である．さらに，基本対称式 $\{e_1, \ldots, e_n\}$，完全対称式 $\{h_1, \ldots, h_n\}$，冪和対称式 $\{p_1, \ldots, p_n\}$ はそれぞれ $\Lambda(n)$ の中で代数的に独立であって，

$$\Lambda(n) = \mathbb{C}[e_1, \ldots, e_n] = \mathbb{C}[h_1, \ldots, h_n] = \mathbb{C}[p_1, \ldots, p_n]$$

が成り立つ．

証明. 証明はしない．Macdonald [14] あるいは 高木貞治 [30, 定理 5] 参照．　□

この定理の内容は，例えば基本対称式を例に取ると，

任意の対称多項式は基本対称式の多項式として**ただ一通りに表される**

ということを述べている．

40　Schur 関数 (Schur 多項式)

$\mu \in \mathscr{P}(n)$ に対して

$$a_\mu(x) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, x^{\sigma(\mu)}$$

とおく．明らかに $w \in S_n$ に対して $w \cdot a_\mu = \operatorname{sgn}(w)\, a_\mu$ が成り立つ．つまり $a_\mu(x)$ は**交代式**である．

補題 10.7.

$$a_\mu(x) = \begin{vmatrix} x_1^{\mu_1} & x_1^{\mu_2} & \cdots & x_1^{\mu_n} \\ x_2^{\mu_1} & x_2^{\mu_2} & \cdots & x_2^{\mu_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^{\mu_1} & x_n^{\mu_2} & \cdots & x_n^{\mu_n} \end{vmatrix} = \det\bigl(x_i^{\mu_j}\bigr)_{1 \le i,j \le n}$$

系 10.8. $\rho = (n-1, n=2, \cdots, 1, 0)$ とおくと，$a_\rho(x) = \prod_{1 \le i < j \le n}(x_i - x_j)$ は**差積**である．差積をしばしば $\Delta(x) = \Delta_n(x)$ で表す．

証明. $a_\rho(x)$ はその具体形を書いてみると，

$$a_\rho(x) = \begin{vmatrix} x_1^{n-1} & x_1^{n-2} & \cdots & x_1 & 1 \\ x_2^{n-1} & x_2^{n-2} & \cdots & x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ x_n^{n-1} & x_n^{n-2} & \cdots & x_n & 1 \end{vmatrix} = \det\bigl(x_i^{n-j}\bigr)_{1 \le i,j \le n}$$

でこれは **Vandermonde の行列式**である．この行列式が差積になることはよく知られている．例えば [33, 45] などを参照． □

定義 10.9 (**Schur 関数**). $\rho = (n-1, n=2, \cdots, 1, 0)$ とおく．$\lambda \in \mathscr{P}(n)$ に対して，

$$s_\lambda(x) = \frac{a_{\lambda+\rho}(x)}{a_\rho(x)} = \frac{\sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\, x^{\sigma(\mu+\rho)}}{\prod_{1 \le i < j \le n}(x_i - x_j)} = \frac{\begin{vmatrix} x_1^{\mu_1+n-1} & x_1^{\mu_2+n-2} & \cdots & x_1^{\mu_n} \\ x_2^{\mu_1+n-1} & x_2^{\mu_2+n-2} & \cdots & x_2^{\mu_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^{\mu_1+n-1} & x_n^{\mu_2+n-2} & \cdots & x_n^{\mu_n} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1^{n-1} & x_1^{n-2} & \cdots & x_1 & 1 \\ x_2^{n-1} & x_2^{n-2} & \cdots & x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ x_n^{n-1} & x_n^{n-2} & \cdots & x_n & 1 \end{vmatrix}}$$

とおき，これを重さが λ の Schur 関数と呼ぶ．

定理 10.10. $\lambda \in \mathscr{P}(n)$ に対して，Schur 関数 $s_\lambda(x)$ は $x = (x_1, \ldots, x_n)$ の対称多項式である．つまり $s_\lambda(x) \in \Lambda(n)$ が成り立つ．

証明. 分子 $a_{\lambda+\rho}(x)$ はその行列式表示を見てもわかるように交代形式であるから，差積で割り切れる．したがって $s_\lambda(x) = a_{\lambda+\rho}(x)/\Delta(x)$ は多項式である．

差積で割り切れることは，たとえば $x_i = x_j$ とおいたとき，行列式の第 i 行目と第 j 行目が一致してゼロになるから $(x_i - x_j)$ で割り切れる，という具合に考えてもよい．(これは要するに交代性と同じことではあるが．)

また，分母，分子ともに交代式であるから，$w \in S_n$ に対して

$$w \cdot s_\lambda(x) = \frac{w \cdot a_{\lambda+\rho}(x)}{w \cdot a_\rho(x)} = \frac{\mathrm{sgn}(w) a_{\lambda+\rho}(x)}{\mathrm{sgn}(w) a_\rho(x)} = s_\lambda(x)$$

となり，対称式である． □

これで Schur 関数は多項式であることが分かったので，**Schur 多項式**とも呼ぶ[13]．

[13]もっとも Schur "関数" と呼ぶ理由は別にあり，1 つは無限変数 $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ に拡張したとき，厳密には "多項式" ではないので，という消極的理由があり，一方では，一般線型群の指標，つまり $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 上で定義された類関数であるから，という事情もある．本講義では，とくに両者を区別しない．

41　Schur 多項式の例

例 10.11. $s_\rho(x) = \prod_{1\le i<j\le n}(x_i + x_j)$

証明. 右辺の式と差積 $\Delta(x) = a_\rho(x)$ との積を計算してみると，

$$\prod_{1\le i<j\le n}(x_i + x_j)\cdot\Delta(x) = \prod_{1\le i<j\le n}(x_i^2 - x_j^2) = \Delta(x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2) = a_{2\rho}(x)$$

これより，

$$\prod_{1\le i<j\le n}(x_i + x_j) = \frac{a_{2\rho}(x)}{a_\rho(x)} = s_\rho(x)$$

である．□

演習 10.12. $n = 2, 3$ のときに，$s_\rho(x)$ を書き下せ．

例 10.13. $s_{(k)}(x) = h_k(x)$ は完全対称式である．

例 10.14. $s_{(1^k)}(x) = e_k(x)$ は基本対称式である．

この 2 つの関係は重要であるが，証明は次回行う．

演習 10.15. $n = 2, 3$ で $k = 1, 2, 3$ のときに，$s_{(k)}(x), s_{(1^k)}(x)$ を計算せよ．

演習 10.16. $n = 2, 3$ のときに，冪和対称式 $p_2(x), p_3(x)$ を Schur 多項式の一次結合で表せ．

第 11 回　Schur 多項式 II

すでに，基本対称式・完全対称式・冪和対称式・単項対称式といったさまざまな対称式の例を見てきたが，なかでも 究極の 対称多項式が “Schur 多項式” と呼ばれる対称式である．Schur 多項式はその定義・導入からしてそう簡単ではないが，今回と次回に分けてその定義といくつかの性質を考えていこう．

42　基本対称式と Schur 多項式

補題 11.1. $e_k = e_k(x_1, \ldots, x_n)$ を n 変数の基本対称式とすると，$e_k = s_{(1^k,0,\ldots,0)}$ (箱を縦一列に k 個並べたヤング図形に対応する Schur 多項式) が成り立つ．

証明. 天下りではあるが，z を変数として，次の行列式を考える．

$$\begin{vmatrix} x_1^{n-1}(1+x_1z) & x_1^{n-2}(1+x_1z) & \cdots & (1+x_1z) \\ x_2^{n-1}(1+x_2z) & x_2^{n-2}(1+x_2z) & \cdots & (1+x_2z) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^{n-1}(1+x_nz) & x_n^{n-2}(1+x_nz) & \cdots & (1+x_nz) \end{vmatrix} = \det\Big(x_i^{n-j}(1+x_iz)\Big)_{1\le i,j\le n}$$

これを $(1+x_iz)$ の項がない行列式 $A = (x_i^{n-j})_{i,j}$ と比較する．第 (i,j) 成分は，$k = n-j$ と書いておくと，

$$x_i^k(1+x_iz) = x_i^k + zx_i^{k+1}$$

なので，これは A の第 j 列目と一つ手前の列 $j-1$ 列目の一次結合である．行列式が各列に関して線型であることと，同じ列を持つ行列式がゼロであることを用いると，第 1 列目から第 j 列目まで連続して z の項を選び続ける場合のみ行列式の項が消えないことがわかる．もちろんまったく z の項がなくてもよい．したがって，z^k の項は 1 列目から zx_i^n を選び，2 列目から zx_i^{n-1} を選び，$\ldots$，k 列目から zx_i^{n-k+1} を選び，そしてそのあとは z の入っていない方，$x_i^{n-k-1}, x_i^{n-k-2}, \ldots, x_i, 1$ を選ぶしかない．

以上の考察から

$$\begin{aligned} &\det\big(x_i^{n-j}(1+x_iz)\big)_{1\le i,j\le n} \\ &= a_\rho + a_{(1,0,\ldots,0)+\rho}z + \cdots + a_{(1^k,0,\ldots,0)+\rho}z^k + \cdots + z^n a_{(1^n)+\rho} \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_{(1^k,0,\ldots,0)+\rho}(x)\, z^k \end{aligned}$$

である．

一方，各行は $(1+x_i z)$ 倍されているだけなので，それを括り出すと

$$\begin{aligned}&\det\bigl(x_i^{n-j}(1+x_i z)\bigr)_{1\le i,j\le n}\\&=\prod_{i=1}^{n}(1+x_i z)\cdot\det\bigl(x_i^{n-j}\bigr)_{1\le i,j\le n}\\&=E(z)\cdot a_\rho(x)\end{aligned}$$

である．

この二つの式から，

$$E(z)=\sum_{k=0}^{n}\frac{a_{(1^k,0,\dots,0)+\rho}(x)}{a_\rho(x)}\,z^k=\sum_{k=0}^{n}s_{(1^k,0,\dots,0)}(x)\,z^k$$

であるが，$E(z)$ は基本対称式の母函数だから $e_k(x)=s_{(1^k,0,\dots,0)}(x)$ がわかる． □

演習 11.2. 補題を $n=3$ のときに用いて次の行列式を計算せよ．また，予備知識なしで線型代数の問題として考えてみよ．

$$\begin{vmatrix}3^2&3^1&1\\2^2&2^1&1\\1^2&1^1&1\end{vmatrix},\quad\begin{vmatrix}3^3&3^1&1\\2^3&2^1&1\\1^3&1^1&1\end{vmatrix},\quad\begin{vmatrix}3^3&3^2&1\\2^3&2^2&1\\1^3&1^2&1\end{vmatrix},\quad\begin{vmatrix}3^3&3^2&3\\2^3&2^2&2\\1^3&1^2&1\end{vmatrix}$$

43　完全対称式と Schur 多項式

今度は完全対称式と Schur 多項式の関係について考えてみよう．

補題 11.3. $h_k=h_k(x_1,\dots,x_n)$ を n 変数の基本対称式とすると，$h_k=s_{(k,0,\dots,0)}$ (箱をヨコ一列に k 個並べたヤング図形に対応する Schur 多項式) が成り立つ．

証明. やはり天下りではあるが，z を変数として，次の行列式を考える．

$$\begin{vmatrix}x_1^{n-1}\dfrac{1}{1-x_1z}&x_1^{n-2}&\cdots&1\\x_2^{n-1}\dfrac{1}{1-x_2z}&x_2^{n-2}&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\x_n^{n-1}\dfrac{1}{1-x_nz}&x_n^{n-2}&\cdots&1\end{vmatrix}\tag{43.1}$$

やはりこの行列式を行・列それぞれに注目して二通りの方法で計算してみよう．

まず列に注目して計算してみる．

$$\frac{1}{1-x_iz}=1+x_iz+x_i^2z^2+\cdots+x_i^kz^k+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}x_i^kz^k$$

であるから，

$$(43.1) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \begin{vmatrix} x_1^{n+k-1} & x_1^{n-2} & \cdots & 1 \\ x_2^{n+k-1} & x_2^{n-2} & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^{n+k-1} & x_n^{n-2} & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{(k)+\rho}\, z^k \tag{43.2}$$

つぎに，各行に $(1-x_iz)$ を乗じたものを考えよう．第 i 行だけ取り出すと

$$\begin{aligned} &\bigl(x_i^{n-1}, x_i^{n-2}(1-x_iz), x_i^{n-3}(1-x_iz), \ldots, x_i(1-x_iz), (1-x_iz)\bigr) \\ &\quad = \bigl(x_i^{n-1}, x_i^{n-2} - x_i^{n-1}z, x_i^{n-3} - x_i^{n-2}z, \ldots, x_i - x_i^2 z, 1 - x_iz\bigr) \end{aligned}$$

となるが，第 1 列を z 倍して第 2 列に加え，その第 2 列を z 倍して第 3 列に加え，という基本変形を行うと，結局 $z=0$ とした行列式 $\det A = a_\rho(x)$ と一致することがわかる．これより

$$(43.1) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1-x_iz} \det A = H(z) \cdot a_\rho(x)$$

式 (43.2) と (43) が等しいので整理すると，

$$H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{(k)+\rho}(x)}{a_\rho(x)}\, z^k = \sum_{k=0}^{\infty} s_{(k)}(x)\, z^k$$

となるが，左辺は完全対称式の母函数であるから $h_k(x) = s_{(k)}(x)$ が得られる． □

演習 11.4. 補題を $n=3$ のときに用いて次の行列式を計算せよ．また，予備知識なしで線型代数の問題として計算してみよ．

$$\begin{vmatrix} 3^2 & 3 & 1 \\ 2^2 & 2 & 1 \\ 1^2 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 3^3 & 3 & 1 \\ 2^3 & 2 & 1 \\ 1^3 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 3^4 & 3 & 1 \\ 2^4 & 2 & 1 \\ 1^4 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 3^5 & 3 & 1 \\ 2^5 & 2 & 1 \\ 1^5 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

[**Hint**: 以前の演習問題の結果 $2h_2 = p_2 + p_1^2$，$6h_3 = 2p_3 + 3p_1p_2 + p_1^3$ などの式を用いるとよい．]

44 Schur 関数と半標準盤

半標準盤 T に対して，T の箱に入っている数字 k 一つに付き対応する変数 x_k を掛け，単項式を作る．この単項式を x^T と書くのであった．例えば，

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 3 & 2 & 2 & 1 \\ \hline 2 & 2 \\ \cline{1-2} 1 \\ \cline{1-1} \end{array} \qquad ならば \qquad x^T = x_1^2 x_2^4 x_3$$

である．

補題 11.5. $e_k = s_{(1^k)} = \displaystyle\sum_{T \in \mathrm{SSTab}^{(n)}((1^k))} x^T$ が成り立つ．

証明. 半標準盤の定義より

$$\mathrm{SSTab}^{(n)}((1^k)) = \left\{ \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \vdots \\ \hline k \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|}\hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \vdots \\ \hline {\scriptstyle k+1} \\ \hline \end{array}, \ \ldots \right\} = \left\{ \begin{array}{|c|}\hline i_1 \\ \hline i_2 \\ \hline \vdots \\ \hline i_k \\ \hline \end{array} \;\middle|\; 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n \right\}$$

だったが,

$$T = \begin{array}{|c|}\hline i_1 \\ \hline i_2 \\ \hline \vdots \\ \hline i_k \\ \hline \end{array} \quad \text{に対して} \quad x^T = x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k}$$

だったから，これらを $T \in \mathrm{SSTab}^{(n)}((1^k))$ にわたって加えると e_k になる． □

同様にして次が成り立つ．

補題 11.6. $h_k = s_{(k)} = \sum_{T \in \mathrm{SSTab}^{(n)}((k))} x^T$ が成り立つ．

証明. 半標準盤の定義より

$$\mathrm{SSTab}^{(n)}((k)) = \left\{ \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ \hline \end{array} \;\middle|\; 1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_k \leq n \right\}$$

だったから，

$$\sum_{T \in \mathrm{SSTab}^{(n)}((k))} x^T = \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_k \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k} = h_k = s_{(k)}$$

□

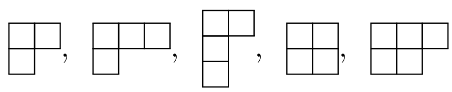
これらの一般化として，次の定理が成り立つ．この定理の証明が次回以降の目標である．

定理 11.7. λ を $\ell(\lambda) \leq n$ となるような分割とする．このとき Schur 関数は

$$s_\lambda(x) = \frac{a_{\lambda+\rho}(x)}{a_\rho(x)} = \sum_{T \in \mathrm{SSTab}^{(n)}(\lambda)} x^T$$

で与えられる．

演習 11.8. $n = 3$ とする．この（まだ証明していない）定理を用いて次の λ に対して Schur 関数 $s_\lambda(x_1, x_2, x_3)$ を書き下し，行列式の表示と比較せよ．



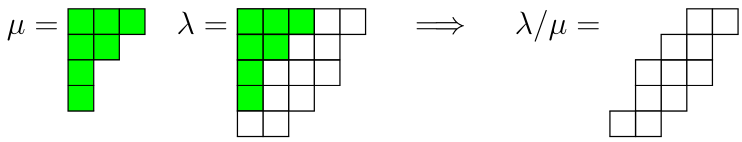
第 12 回　Pieri の公式

Pieri の公式は，基本対称式・完全対称式と Schur 多項式との積の展開を与えるものである．この公式は組合せ論的な表現で与えられるが，その本質は実は幾何学的なものである．代数学に対する影響も大きく，対称多項式環の性質の大きな部分は Pieri 公式から導かれると言っても過言ではない．ここではその一番基本的な形で公式を述べ，証明と，すぐさまわかる帰結について解説する．

45　水平・垂直帯

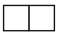
二つの分割 $\lambda, \mu \in \mathcal{P}$ が包含関係 $\mu \subset \lambda$ にあるとする．このとき，歪ヤング図形 (skew Young diagram) λ/μ が λ の箱から，μ の箱を取り除いたものとして定まる[14]．

たとえば $\lambda = (5, 4, 4, 3, 2), \mu = (3, 2, 1, 1)$ のとき，



である（見やすいように μ の部分を緑で表示した）．

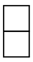
定義 12.1 (水平帯・垂直帯). 上の記号の下に，λ/μ が**垂直帯** (vertical strip, column strip) であるとは次の同値な条件を満たす[15]ときに言う．

(1) λ/μ は 1×2 ブロック  を含まない．

(2) $|\lambda_i - \mu_i| \leq 1 \quad (\forall i \geq 1)$

(3) λ/μ の各行にある箱の数は 1 以下．

同様にして，**水平帯** (horizontal strip, row strip) も定義される．念のために同値な条件を書いておくと

(1) λ/μ は 2×1 ブロック  を含まない．

(2) $|{}^t\lambda_i - {}^t\mu_i| \leq 1 \quad (\forall i \geq 1)$

(3) λ/μ の各列にある箱の数は 1 以下．

---

[14]記号は「商」を表しているが,「差」と考えた方が自然である．しかし，この記号は国際標準となっているのでいまさらここで変更することはできない．

[15]つまり，一つの条件を満たせばすべて満たされる．

46　Pieri の公式

Schur 多項式 s_μ は対称式なので，基本対称式 e_k との積もまた対称式である．実は $e_k \cdot s_\mu$ は Schur 多項式の一次結合であることがわかる．同様にして完全対称式 h_k との積もやはり s_λ たちの一次結合であって，これらの一次結合への分解を具体的に与えるのが Pieri の公式である．

Pieri の公式を用いると Schur 多項式が対称多項式環 $\Lambda = \Lambda(n)$ の線形空間としての基底をなすことが証明できるが，この事実の証明が当面の目標である．

定理 12.2 (Pieri の公式 (Pieri rule)[16])．(1) $e_k \cdot s_\mu = \displaystyle\sum_{\mu\subset\lambda:\,(\star)} s_\lambda$

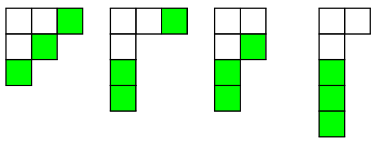
(⋆)　λ は λ/μ が垂直帯で $|\lambda/\mu| = |\lambda| - |\mu| = k$ を満たす分割をすべて動く．

(2) $h_k \cdot s_\mu = \displaystyle\sum_{\mu\subset\lambda:\,(\star\star)} s_\lambda$

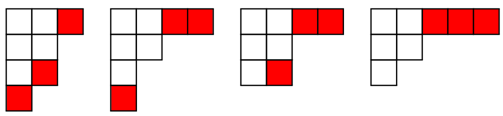
(⋆⋆)　λ は λ/μ が水平帯で $|\lambda/\mu| = |\lambda| - |\mu| = k$ を満たす分割をすべて動く．

証明の前に，定理の公式を具体的に見ておこう．

例 12.3. $e_3 \cdot s_{(2,1)} = \sum_\lambda s_\lambda$ ここで λ は $\lambda = (3,2,1)$, $(3,1,1,1)$, $(2,2,1,1)$, $(2,1,1,1,1)$ の 4 つの分割を動き，ヤング図形で表すと次のようになる．



例 12.4. $h_3 \cdot s_{(2^2,1)} = \sum_\lambda s_\lambda$ ここで λ は $\lambda = (3,2,2,1)$, $(4,2,1,1)$, $(4,2,2)$, $(5,2,1)$ の 4 つの分割を動き，ヤング図形で表すと次のようになる．



演習 12.5. $e_2 \cdot s_{(2,1)}$，$e_3 \cdot s_{(2^2,1)}$ および $h_2 \cdot s_{(2^2,1)}$，$h_3 \cdot s_{(2,1)}$ を計算せよ．

46.1　Pieri の公式の証明（基本対称式の場合）

定理の証明: 基本対称式．$\nu = \mu + \rho$ と書いておく．このとき

$$e_k \cdot a_{\mu+\rho} = e_k \sum_{w\in S_n} \mathrm{sgn}(w) x_{w(1)}^{\nu_1} x_{w(2)}^{\nu_2} \cdots x_{w(n)}^{\nu_n} \;= \sum_{w\in S_n} \mathrm{sgn}(w) e_k \cdot x_{w(1)}^{\nu_1} x_{w(2)}^{\nu_2} \cdots x_{w(n)}^{\nu_n}$$

[16] Mario Pieri (1860–1913).

だが，e_k は対称式だから $\sum$ に現れる $w \in S_n$ を用いて

$$e_k = w \cdot e_k = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} x_{w(i_1)} x_{w(i_2)} \cdots x_{w(i_k)}$$

と書ける．したがって上の式は

$$\begin{aligned}
e_k \cdot a_{\mu+\rho} &= \sum_{w \in S_n} \mathrm{sgn}(w) \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} x_{w(i_1)} x_{w(i_2)} \cdots x_{w(i_k)} \cdot x_{w(1)}^{\nu_1} x_{w(2)}^{\nu_2} \cdots x_{w(n)}^{\nu_n} \\
&= \sum_{w \in S_n} \mathrm{sgn}(w) \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} x_{w(1)}^{\nu'_1} x_{w(2)}^{\nu'_2} \cdots x_{w(n)}^{\nu'_n} \\
&= \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} \sum_{w \in S_n} \mathrm{sgn}(w) x_{w(1)}^{\nu'_1} x_{w(2)}^{\nu'_2} \cdots x_{w(n)}^{\nu'_n}
\end{aligned}$$

ただし $\binom{[n]}{k}$ は $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ の k 個の元からなる部分集合の全体を表し，$\nu' = \nu + \varepsilon_I = \mu + \varepsilon_I + \rho$ であって $\varepsilon_I = \varepsilon_{i_1} + \varepsilon_{i_2} + \cdots + \varepsilon_{i_k}$ は $i_1, i_2, \ldots, i_k$ 番目の座標に 1 があり，その他はゼロのベクトルを表す．これより

$$e_k \cdot a_{\mu+\rho} = \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} \sum_{w \in S_n} \mathrm{sgn}(w) a_{\mu+\varepsilon_I+\rho}$$

が成り立つが，このとき

- $\lambda = \mu + \varepsilon_I$ が分割であれば，それは定理の $(\star)$ の条件を満たし，逆に定理の $(\star)$ の条件を満たすものはこの形をしている．
- $\mu + \varepsilon_I$ が分割でなければ $a_{\mu+\varepsilon_I+\rho} = 0$ である．

これより定理の基本対称式の場合が従う． □

46.2 Pieri の公式の証明（完全対称式の場合）

定理の証明: 完全対称式. 基本対称式のときとほとんど同じ計算で

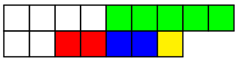
$$\begin{aligned}
h_k \cdot a_{\mu+\rho} &= \sum_{1 \le i_1 \le i_2 \le \cdots \le i_k \le n} \sum_{w \in S_n} \mathrm{sgn}(w) x_{w(i_1)} x_{w(i_2)} \cdots x_{w(i_k)} \cdot x_{w(1)}^{\nu_1} x_{w(2)}^{\nu_2} \cdots x_{w(n)}^{\nu_n} \\
&= \sum_{I} \sum_{w \in S_n} \mathrm{sgn}(w) a_{\mu+\varepsilon_I+\rho}
\end{aligned}$$

が成り立つ．ただし I は $1 \le i_1 \le i_2 \le \cdots \le i_k \le n$ となる $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$（$[n]$ から重複を許して k 個取った組合せ）を表し，$\varepsilon_I = \sum_{j=1}^{k} \varepsilon_{i_j}$ である．

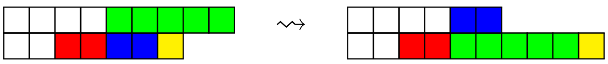
> $\lambda = \mu + \varepsilon_I$ とおくとき，
>
> - λ が分割でないか，あるいは
> - λ は分割だが，λ/μ が水平帯でなければ
>
> その項は消える

ことを示そう．これが示されれば，λ/μ が水平帯になるような分割しか和に現れないことがわかり，Pieri の公式を得る．

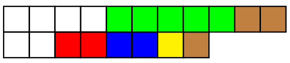
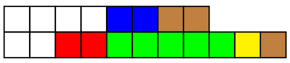
そこでまず λ は分割であるが λ/μ が水平帯でないとして，次の図を考えよう．この図では白の部分が μ で色つきの箱が I に当たっている．λ/μ が水平帯でない場合には色つきの箱で上下に重なっているものが少なくとも一つは現れる．(図ではヤング図形の黄色の箱がある部分.)



青の部分の箱の個数を $b \geq 0$，緑の部分の箱の個数を $a \geq 1$ とする．λ が分割なので $a \geq b+1$ である．この青の部分と緑の部分を入れ替えたものを考えるとやはりこれも $\mu + \varepsilon_J$ $(\#J = k)$ の形をしている．

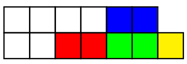


これにそれぞれ ρ を加えると次の図のようになり，この 2 行の長さはちょうど入れ替わっていることになる．(図では $\rho = (2,1)$ を茶色としたが，$(m+1, m)$ の形であれば同じである.)

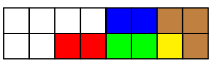
$\mu + \varepsilon_I + \rho$:  $\mu + \varepsilon_J + \rho$: 

ポイントは茶色と黄色を合わせると各行同じ長さになっている点である．この 2 行が入れ替わるのは $a_{\mu+\varepsilon_I+\rho}$ と $a_{\mu+\varepsilon_J+\rho}$ においては隣接する 2 列が入れ替わることに相当するから，それらの符号は逆になり 2 つあわせて**消える**．

さて，λ が分割でないときは，ほとんどの場合，上の議論で作られた右側の図形になっている．したがって，それらは分割になっているものとともに消えている．このようにして分割とペアにならない場合は，次のような場合に限られる (上で $a = b$ の場合).



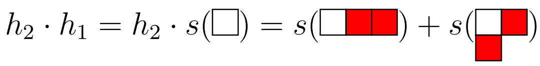
ところがこれに ρ を加えると



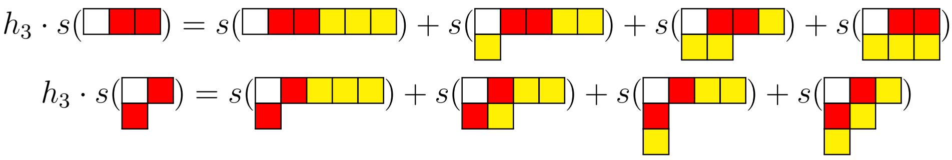
のように，長さの揃った行が現れる．これは対応する $a_{\mu+\varepsilon_I+\rho}$ が**同じ列を持つ**ことを意味し，行列式であるからそれ自身がゼロである． □

46.3 Pieri 公式の例

例 12.6. $h_3 \cdot h_2 \cdot h_1$ を計算してみよう．$s_\lambda = s(\lambda)$ と記すことにする．



さらに



この 2 式をまとめて

$$h_3 \cdot h_2 \cdot h_1 = s_{(6)} + 2s_{(5,1)} + 2s_{(4,2)} + s_{(4,1,1)} + s_{(3,3)} + s_{(3,2,1)}$$

がわかる．**色はどのようにして** *Schur* **関数が形成されていったかという過程を表していることに注意しよう．**

演習 12.7. 同様にして $h_2^2 \cdot h_1$ および $e_2^2 \cdot e_1$ を計算せよ．また $e_1 \cdot s_{(5,3,3,1)}$ および $h_2 \cdot s_{(5,3,1)}$ $e_2 \cdot s_{(4,3,2,1)}$ を計算せよ．

47 対称多項式環の基底

定義 12.8. 分割 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\ell)$ に対して，

$$h_\lambda = h_{\lambda_1} \cdot h_{\lambda_2} \cdots h_{\lambda_\ell} \qquad e_\lambda = e_{\lambda_1} \cdot e_{\lambda_2} \cdots e_{\lambda_\ell}$$

と書く．冪和多項式についてもまったく同様に p_λ を定義する．

定理 12.9. $\Lambda = \Lambda(n)$ を n 変数の対称多項式環とする．また $\mathscr{P}_{\leq n} = \{\lambda \mid \ell(\lambda) \leq n\}$ を長さが n 以下の自然数の分割全体とする．

このとき次の対称式たちはすべて Λ のベクトル空間としての基底である．

(1) $\{h_\lambda \mid \lambda \in \mathscr{P}_{\leq n}\}$

(2) $\{e_\lambda \mid \lambda \in \mathscr{P}_{\leq n}\}$

(3) $\{p_\lambda \mid \lambda \in \mathscr{P}_{\leq n}\}$

(4) $\{s_\lambda \mid \lambda \in \mathscr{P}_{\leq n}\}$

証明. 最初の 3 つの主張は対称式の基本定理?? の帰結である．

Schur 関数については，Pieri の公式から $h_\lambda = s_\lambda + \sum_{\mu \neq \lambda} s_\mu$ と書けること，和に現れる λ 以外の μ たちは，辞書式順序で λ より真に大きいことから，基底であることが分かる．ここで辞書式順序を復習しておくと $\lambda \leq \mu$ とは，

$$\exists k \geq 0 \quad \text{s.t.} \quad \lambda_1 = \mu_1, \ldots, \lambda_k = \mu_k \quad \text{かつ} \quad \lambda_{k+1} < \mu_{k+1}$$

が成り立つときに言う． $\square$

第13回 Kostka 数と Littlewood の定理

Pieri の定理を用いて Schur 関数が対称関数環の基底であることがわかった．したがって完全対称式や基本対称式の積もまた Schur 関数の一次結合で書ける．ヤング盤の組合せ論を用いて一次結合の係数を具体的に与えることができる．このようにして得られた係数を Kostka 数と呼ぶ．

じつは Kostka 数そのものが Schur 関数を記述するのだが，この節では手始めに Schur 多項式を半標準盤をウェイトとするような単項式の和として表す Littlewood の定理を証明する．この過程で講義の最初に与えた和公式の一つ Schur-Weyl の相互律の等式の証明が完結する．

48 Kostka 数

分割 $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m)$ に対して $h_\mu = h_{\mu_1} h_{\mu_2} \cdots h_{\mu_m}$ などと書くのであった．

定理 13.1. $\mu \in \mathscr{P}_{\leq n}$ に対して

$$h_\mu = \sum_{\lambda \in \mathscr{P}_{\leq n}} K_{\lambda,\mu}\, s_\lambda$$

と表したとき，

$$K_{\lambda,\mu} = \#\{T \in \mathrm{SSTab}^{(n)}(\lambda) \mid x^T = x^\mu\}$$

が成り立つ．この数 $K_{\lambda,\mu}$ を **Kostka 数** と呼ぶ[17]．さらにこのとき

$$e_\mu = \sum_{{}^t\lambda \in \mathscr{P}_{\leq n}} K_{\lambda,\mu}\, s_{{}^t\lambda}$$

が成り立つ．

証明. $h_{\mu_1} \to h_{\mu_1} h_{\mu_2} \to h_{\mu_1} h_{\mu_2} h_{\mu_3} \to \cdots$ と Pieri の公式を用いてヤング図形の成長過程を眺め，各ステージに $1, 2, 3, \dots$ の数字を入れてゆくと半標準盤が出来上がる．これは各ステップの差が水平帯になっていてタテに $\begin{array}{|c|}\hline \\ \hline \\ \hline \end{array}$ の形の図形を含んでいないことによる．

基本対称式 e_μ については垂直帯が着いてゆくことになるので，転置をとっておく必要がある． □

[17]Carl Kostka (1846–1921).

例 13.2. $\mu=(2,2,1)$ のときを考えてみる．s_λ をヤング図形 λ で表すことにすると，

$$h_{\mu_1}h_{\mu_2}=h_{\mu_2}s_{(\mu_1)}=h_2\cdot\ytableaushort{11}=\ytableaushort{1122}+\ytableaushort{112,2}+\ytableaushort{11,22}$$

ここで最初の μ_1 個の箱には 1 を，Pieri の公式で付け加わった箱には 2 を入れた．したがって

$$\begin{aligned}
h_{\mu_3}h_{\mu_1}h_{\mu_2}&=h_1(h_2\cdot h_2)=h_1\left(\ytableaushort{1122}+\ytableaushort{112,2}+\ytableaushort{11,22}\right)\\
&=\left(\ytableaushort{11223}+\ytableaushort{1122,3}\right)+\left(\ytableaushort{1123,2}+\ytableaushort{112,23}+\ytableaushort{112,2,3}\right)+\left(\ytableaushort{113,22}+\ytableaushort{11,22,3}\right)\\
&=s_{(5)}+2s_{(4,1)}+2s_{(3,2)}+s_{(3,1,1)}+s_{(2,2,1)}
\end{aligned}$$

このとき，たとえば $s_{(3,2)}$ の係数が 2 であることは，$\ydiagram{3,2}$ に 1 を 2 個，2 を 2 個，3 を 1 個入れてできるような半標準盤の個数は 2 個しかないことを意味している．

面白いのは，$h_{\mu_3}h_{\mu_2}h_{\mu_1}$ と考えれば，1 を 1 個，2 を 2 個，3 を 2 個使うような半標準盤の個数も同じ 2 個であることが分かる点である．さらに順番を入れ替えてみることが可能である．いろいろ試してみて欲しい．

演習 13.3. $\mu=(2,2,1,1)$ とする．$\lambda=(3,2,1),(2,2,2),(4,2),(5,1),(4,1,1)$ に対して $K_{\lambda,\mu}$ を求めよ．

系 13.4. $e_1^N=\sum_{\lambda\vdash N}K_\lambda s_\lambda$ とおくと，

$$K_\lambda=\#\,\mathrm{STab}(\lambda)=f_\lambda$$

は標準盤の個数に等しい．とくに $s_\lambda(x_1,\dots,x_m)$ を m 変数の Schur 関数とすれば

$$m^N=\sum_{\lambda\vdash N}f_\lambda s_\lambda(1)$$

が成り立つ．

【注意】13.5. まだ証明されてはいないが，$s_\lambda(1)=\#\,\mathrm{SSTab}^{(m)}(\lambda)=d_\lambda^{(m)}$ である．

証明. $e_1=h_1$ であることに注意すれば，系の主張は定理の特別な場合に過ぎない．一方，$e_1=h_1$ より $K_{{}^t\lambda}=K_\lambda$，つまり $f_{{}^t\lambda}=f_\lambda$ も従う．（もっともこの等式は標準盤の意味を考えれば明かではあるが．） $\square$

49 Littlewood の定理

定理 13.6 (Littlewood[18]).

$$s_\lambda(x)=\sum_{T\in\mathrm{SSTab}^{(n)}(\lambda)}x^T$$

以下，この定理の証明を行うが，少し長い．まず定理の右辺，半標準盤を重みとする単項式の和を一時的に $\widetilde{s}_\lambda$ と書いておく．したがって定理は $s_\lambda = \widetilde{s}_\lambda$ を示せば証明されたことになる．

まず，$\widetilde{s}_\lambda$ と完全対称式との関係が Schur 関数とまったく同じ Kostka 数を用いて書けることを示そう．

補題 13.7. $h_\mu = \sum_\lambda K_{\lambda,\mu} \widetilde{s}_\lambda$ が成り立つ．

証明. $\alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ に対して $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$ （多重指数）と書いておくと，完全対称式 h_k はすべての k 次の単項式の和だったから

$$h_k = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}, |\alpha| = k} x^\alpha$$

である．したがって

$$\begin{aligned} h_\mu &= h_{\mu_1} h_{\mu_2} \cdots h_{\mu_m} \\ &= \sum_{|\alpha^{(1)}| = \mu_1} x^{\alpha^{(1)}} \sum_{|\alpha^{(2)}| = \mu_2} x^{\alpha^{(2)}} \cdots \sum_{|\alpha^{(m)}| = \mu_m} x^{\alpha^{(m)}} \\ &= \sum_{\mu = (|\alpha^{(1)}|, |\alpha^{(2)}|, \ldots, |\alpha^{(m)}|)} x^{\alpha^{(1)} + \alpha^{(2)} + \cdots + \alpha^{(m)}} \\ &= \sum_A \prod_{i,j} x_j^{a_{i,j}} = \sum_A \prod_{i=1}^m \Big(\prod_{j=1}^n x_j^{a_{i,j}} \Big) \end{aligned}$$

ただし $A = (a_{i,j}) \in \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{Z}_{\geq 0})$ は $m \times n$ 行列であって，$\alpha^{(i)} = (a_{i,1}, a_{i,2}, \ldots, a_{i,n})$ (A の第 i 行目) と対応している．上の式の最後の部分は

$$x^{\alpha^{(i)}} = x_1^{a_{i,1}} x_2^{a_{i,2}} \cdots x_n^{a_{i,n}} = \prod_{j=1}^n x_j^{a_{i,j}}$$

であることから明かだろう．もちろんこの行列 A は自由に動くわけではなく，条件 $\mu = (|\alpha^{(1)}|, |\alpha^{(2)}|, \ldots, |\alpha^{(m)}|)$ を満たすような行列のみを動く．そこで，記号

$$\mathscr{A}(\mu) = \{ A = (a_{i,j}) \in \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{Z}_{\geq 0}) \mid \mu = (|\alpha^{(1)}|, |\alpha^{(2)}|, \ldots, |\alpha^{(m)}|) \}$$

によって，そのような行列全体を表すことにする．したがって，上の式をまとめると

$$h_\mu = \sum_{A \in \mathscr{A}(\mu)} \prod_{i,j} x_j^{a_{i,j}} \tag{49.1}$$

となる．

[18]Dudley Ernest Littlewood (1903–1979)．有名な Hardy-Littlewood の Littlewood とは別人．

ここで RSK 対応 (Robinson-Schensted-Knuth 対応) を思い出そう．$N = |\mu|$ と書いておく．RSK 対応にはいろんな形式があったが，長さが N の辞書式配列 (array) $\mathscr{A}_n^m(N)$ の全体 (上段に並んでいる数字が $[m]$ に属し，下段に並んでいる数字が $[n]$ に属している) と N の分割 λ を台に持つような半標準盤の組 (P, Q) が対応するというものであった．

$$\mathscr{A}_n^m(N) \simeq \coprod_{\lambda \vdash N} \mathrm{SSTab}^{(m)}(\lambda) \times \mathrm{SSTab}^{(n)}(\lambda)$$

辞書式配列

$$w = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_N \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_N \end{pmatrix} \in \mathscr{A}_n^m(N) \qquad (u_k \in [m],\ v_k \in [n])$$

に対して，行列

$$A = \sum_{k=1}^N E_{u_k, v_k} \in \mathrm{M}_{n,m}(\mathbb{Z}_{\geq 0})$$

を対応させることによって，成分の和がちょうど N になるような $A \in \mathrm{M}_{n,m}(\mathbb{Z}_{\geq 0})$ と辞書式配列 $w \in \mathscr{A}_n^m(N)$ は一対一に対応している．我々は両者を区別しないことにしよう．そうすると

$$\mathscr{A}(\mu) = \{A = \begin{pmatrix} \alpha^{(1)} \\ \alpha^{(2)} \\ \vdots \\ \alpha^{(m)} \end{pmatrix} \mathrm{M}_{n,m}(\mathbb{Z}_{\geq 0}) \mid |\alpha^{(i)}| = \mu_i\}$$

$$\xrightarrow{\sim} \mathscr{S}(\mu) = \coprod_{\lambda \vdash N} \{(P, Q) \in \mathrm{SSTab}^{(n)}(\lambda) \times \mathrm{SSTab}^{(m)}(\lambda) \mid y^Q = y^\mu\}$$

である．実際 $|\alpha^{(i)}| = \sum_j a_{i,j} = \mu_i$ は配列の上段に i が m_i 回現れることを意味していて，それは盤 Q （上段の数字を書き込んだもの）の中に i が m_i 回現れることを意味する．それは $y^Q = y^\mu$ と同じことである．ただし $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ は m 個の変数の列で $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ と区別するために y と書いた．

一方，x^P において x_j の冪は辞書式配列の下の段に現れる j の個数に一致するが，それは行列の言葉で言うとちょうど $\sum_{i=1}^m a_{i,j}$ である．そのような項 x^P は P とペアになっている Q の個数だけ現れ（x^P は Q が変わってもまったく同じであることに注意せよ），上で行った考察から x^P $(P \in \mathrm{SSTab}^{(n)}(\lambda))$ の係数は

$$\#\{Q \in \mathrm{SSTab}^{(m)}(\lambda) \mid y^Q = y^\mu\} = K_{\lambda,\mu}$$

である.（これは Kostka 数の意味を考えれば明かである.）

結局 (49.1) 式の右辺に現れる λ に関連した項は

$$K_{\lambda,\mu} \sum_{P \in \mathrm{SSTab}^{(n)}(\lambda)} x^P = K_{\lambda,\mu} \widetilde{s}_\lambda(x)$$

である．これが示したいことであった． $\square$

基本的に s_λ と $\widetilde{s}_\lambda$ は h_μ の同じ展開を与えることが分かった．しかし，これだけでは $s_\lambda = \widetilde{s}_\lambda$ を結論することはできない．係数である Kostka 数 $K_{\lambda,\mu}$ の特殊性を使って帰納的にこの両者が一致することを示そう．そこで分割に次のように辞書式順序をつける．

$$\lambda > \nu \overset{\text{def}}{\iff} \exists k \geq 1 \quad \text{s.t.} \quad \lambda_i = \nu_i \ (1 \leq i \leq k) \quad \text{かつ} \quad \lambda_{k+1} > \nu_{k+1}$$

補題 13.8. (1) $|\lambda| \neq |\mu| \implies K_{\lambda,\mu} = 0$

(2) $K_{\lambda,\lambda} = 1$

(3) $\lambda < \mu \implies K_{\lambda,\mu} = 0$ （または $K_{\lambda,\mu} \neq 0 \implies \lambda \geq \mu$）

この補題は Kostka 数の意味を考えればほぼ明らかだろうと思う．

演習 13.9. $\lambda = (3,2,2,1)$ のとき，$K_{\lambda,\lambda} = 1$ を確かめよ．このことから台が λ で 1 が 2 個，2 が 3 個，3 が 1 個で 4 が 2 個現れるような半標準盤もただ一つしかないことを結論し，実際にそのような半標準盤を構成せよ．1〜4 を入れ替えたものについても考えよ．

この補題を用いて帰納法で $s_\lambda = \widetilde{s}_\lambda$ を示す．逆方向の帰納法．まず $\lambda = (k)$ のときは $h_k = s_{(k)} = \widetilde{s}_{(k)}$ はすでに確かめた．これがサイズ $|\lambda|$ を固定したときは “最大” の分割になっている．

そこで $\nu > \lambda$ では OK として考えると $\nu < \lambda$ なら $K_{\nu,\lambda} = 0$ なので

$$h_\lambda = K_{\lambda,\lambda} s_\lambda + \sum_{\nu > \lambda} K_{\nu,\lambda} s_\nu = K_{\lambda,\lambda} \widetilde{s}_\lambda + \sum_{\nu > \lambda} K_{\nu,\lambda} \widetilde{s}_\nu$$

帰納法の仮定より $s_\nu = \widetilde{s}_\nu$ なので $s_\lambda = \widetilde{s}_\lambda$ が成り立つ．

以上で Littlewood の定理の証明は終わったが，すぐにわかる系を二つあげておこう．

系 13.10. $s_\lambda(1) = \#\,\mathrm{SSTab}^{(n)}(\lambda) = d_\lambda^{(n)}$ (最後の等号は定義)

証明. Littlewood の定理で $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1$ とおくと $s_\lambda(1) = \sum_{T \in \mathrm{SSTab}^{(n)}(\lambda)} 1 = \#\,\mathrm{SSTab}^{(n)}(\lambda)$ がわかる． □

系 13.11. $m^N = \sum_{\lambda \vdash N} f_\lambda d_\lambda^{(m)}$ ($f_\lambda = \#\,\mathrm{STab}(\lambda)$ であった．)

証明. 系 13.10 と系 13.4 よりわかる． □

この系は講義の第 2 回で紹介した Schur-Weyl の双対性の等式である．それが第 13 回目でやっと証明できたことになる．

第14回　Weyl の次元公式と Cauchy の恒等式

この節では長い間お預けとなっていた Weyl の次元公式，つまり半標準盤の個数を与える明示公式を Schur 多項式の表示を通して証明しよう．ここまでくればちょっとした工夫と不定形の極限の公式の応用で証明できてしまう．我々はずいぶん遠いところまでやって来たと思える一瞬である．

また，Schur 多項式に関係するいくつかの公式も導いておこう．

50　Weyl の次元公式

$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$，$\rho = (n-1, n-2, \ldots, 1, 0)$ とする．また $d_\lambda^{(n)} = \#\,\mathrm{SSTab}^{(n)}(\lambda)$ は半標準盤の個数を表すのであった．

定理 14.1 (Weyl の次元公式). $n \geq \ell(\lambda) = \ell$ のとき，$\mu = \lambda + \rho$ とおくと，

$$d_\lambda^{(n)} = s_\lambda(1) = \lim_{x_i \to 1} \frac{a_{\lambda+\rho}(x)}{a_\rho(x)} = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n}(\mu_i - \mu_j)}{\prod_{1 \leq i < j \leq n}(j-i)} = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n}(\lambda_i - \lambda_j + j - i)}{(n-1)!\,(n-2)!\,\cdots 3! \cdot 2! \cdot 1}$$

証明. Schur 関数 $s_\lambda(x) = \dfrac{a_{\lambda+\rho}(x)}{a_\rho(x)}$ は多項式であることが分かっているので，極限は $x = (1, t, t^2, \ldots, t^{n-1})$ とおいて $t \to 1$ ととればよい．$x_i = t^{i-1}$ とおいたとき，

$$a_\mu(x) = \det(x_i^{\mu_j}) = \det(t^{(i-1)\mu_j}) = \det\bigl((t^{\mu_j})^{i-1}\bigr) = \det(z_j^{i-1})$$

ただし $z_j = t^{\mu_j}$ とおいた．すると最後の式は Vandermonde の行列式なので差積で表せる．

$$\det(z_j^{i-1}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ z_1 & z_2 & \cdots & z_n \\ z_1^2 & z_2^2 & \cdots & z_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_1^{n-1} & z_2^{n-1} & \cdots & z_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (z_i - z_j) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (t^{\mu_i} - t^{\mu_j})$$

同じことを $a_\rho(x)$ でも行えば，

$$\begin{aligned} s_\lambda(x) = \frac{a_{\lambda+\rho}(x)}{a_\rho(x)} &= \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n}(t^{\mu_i} - t^{\mu_j})}{\prod_{1 \leq i < j \leq n}(t^{n-i} - t^{n-j})} \\ &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{t^{\mu_i} - t^{\mu_j}}{t-1} \frac{t-1}{t^{n-i} - t^{n-j}} \\ &\to \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\mu_i - \mu_j}{(n-i)-(n-j)} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\mu_i - \mu_j}{j-i} \end{aligned}$$

これが示したい式であった．　□

51　Kostka 数と Schur 多項式

Kostka 数はもともと完全対称式 h_μ の Schur 多項式による分解係数として現れたのであった．

$$h_\mu = \sum_{\lambda \in \mathscr{P}_{\le n}} K_{\lambda,\mu}\, s_\lambda$$

ところが面白いことに，s_λ を単項式の一次結合に表すとその係数も Kostka 多項式なのである!!

定理 14.2. $s_\lambda(x) = \sum_{\substack{\mu \le \lambda \\ |\lambda|=|\mu|}} K_{\lambda,\mu}\, x^\mu$ が成り立つ．とくに

$$d_\lambda^{(n)} = \sum_{\substack{\mu \le \lambda \\ |\lambda|=|\mu|}} K_{\lambda,\mu}$$

である．

証明. すでに証明したことから

$$K_{\lambda,\mu} = \#\{T \in \mathrm{SSTab}^{(n)}(\lambda) \mid x^T = x^\mu\}$$

であったが，Littlewood の定理より

$$s_\lambda(x) = \sum_{T \in \mathrm{SSTab}^{(n)}(\lambda)} x^T$$

と表されているのであった．あとは意味を考えれば明かである． □

【注意】14.3. 置換 $w \in S_n$ に対し，$h_\mu = h_{w\cdot\mu}$ なので $K_{\lambda,\mu} = K_{\lambda,w\cdot\mu}$ であることに注意しておく．つまり Kostka 数は μ の成分をどのように入れ替えても同じである．

演習 14.4. 次の λ, μ の組に対して $K_{\lambda,\mu}$ を計算せよ．Weyl の次元公式も確認するとよい．

$$m=3 \quad \lambda=(2,1,0); \quad \mu=(2,1,0),\ (1,1,1)$$
$$m=4 \quad \lambda=(3,1,0,0), \quad \mu=(3,1,0,0),\ (2,2,0,0),\ (2,1,1,0),\ (1,1,1,1)$$

52　Cauchy の等式

定理 14.5 (Cauchy の等式[19])**.** $N = \min\{n, m\}$ とおくと，次の等式が成り立つ．

$$\prod_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le m}} \frac{1}{1 - x_i y_j} = \sum_{\lambda \in \mathscr{P}_{\le N}} s_\lambda(x)\cdot s_\lambda(y)$$

【注意】14.6. $n > m$ のとき，$s_\lambda(x_1,\ldots,x_m,0,\ldots,0) = s_\lambda(x_1,\ldots,x_m)$ に注意．

証明. ちょっといい加減だが，次のように考えればよい．

$$(\text{左辺}) = \sum_{A} \prod_{i,j} (x_i y_j)^{a_{i,j}} = \sum_{(P,Q)} x^P \cdot y^Q = \sum_{\lambda \in \mathscr{P}_{\leq N}} s_\lambda(x) \cdot s_\lambda(y)$$

ここで $A \in \mathrm{M}_{n,m}(\mathbb{Z}_{\geq 0})$ であって，$A \leftrightarrow (P, Q) \in \mathrm{SSTab}^{(n)}(\lambda) \times \mathrm{SSTab}^{(m)}(\lambda)$ は RSK 対応である． □

Cauchy の等式にはその親戚筋に当たるものが多数ある．それをここで書いておこう．(証明はしないが，いままで学習したことを使えば自然と証明に辿り着くのではないかと思う．挑戦してみて欲しい．)

定理 14.7 (Cauchy の等式たち). $N = \min\{n, m\}$ とおくと，次の等式が成り立つ．

$$\prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} \frac{1}{1 - x_i y_j} = \sum_{\lambda \in \mathscr{P}_{\leq N}} s_\lambda(x) \cdot s_\lambda(y) = \sum_{\lambda \in \mathscr{P}_{\leq N}} m_\lambda(x) \cdot h_\lambda(y) = \sum_{\lambda \in \mathscr{P}_{\leq N}} h_\lambda(x) \cdot m_\lambda(y)$$

$$\prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} (1 + x_i y_j) = \sum_{\lambda \subset (m^n)} s_\lambda(x) \cdot s_{{}^t\lambda}(y) = \sum_{\lambda \subset (m^n)} m_\lambda(x) \cdot e_\lambda(y) = \sum_{\mu \subset (n^m)} e_\mu(x) \cdot m_\mu(y)$$

第 15 回　Jacobi-Trudi の公式

Schur 関数（多項式）の性質は重要かつ多岐にわたる．重要なものからいくつか紹介してきたが，とくに Jacobi-Trudi の公式と呼ばれている Schur 関数の行列式表示はもっとも有名のものの一つである．応用はいくつもあるが，残念ながらこの講義では紹介できない．興味がある人はすでに紹介した教科書，[44], [15], [14] に加えて [9] を参照して欲しい．

53　基本対称式と完全対称式（復習）

まず基本対称式と完全対称式，そしてその関係について復習しておこう．(他にも冪和対称式とか，単項対称式などがあったが，さしあたって出てこないのでこれらは省く.)

まずは定義から．

- 基本対称式
$$e_k = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k}$$
ただし $e_0 = 1$，$e_k = 0 \ (k \geq n+1)$.
- 完全対称式
$$h_k = \sum_{1 \le i_1 \le i_2 \le \cdots \le i_k \le n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k}$$
ただし $h_0 = 1$．これは要するに k 次の単項式すべての和である．

基本対称式と完全対称式は大変簡単な母函数を持っていたことを思い出そう．母函数の変数を t とする．

$$E(t) := \sum_{k=0}^{n} e_k(x) t^k = (1 + x_1 t)(1 + x_2 t) \cdots (1 + x_n t) = \prod_{k=1}^{n} (1 + x_k t)$$
$$H(t) := \sum_{k=0}^{\infty} h_k(x) t^k = \frac{1}{1 - x_1 t} \cdot \frac{1}{1 - x_2 t} \cdots \frac{1}{1 - x_n t} = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1 - x_i t}$$

基本対称式と完全対称式の母函数はたがいに “逆” となっているので次のような関係式を得る（既出）.

補題 15.1. $E(t)H(-t) = E(-t)H(t) = 1$

54 Jacobi-Trudi の公式

基本対称式も完全対称式もどちらも対称多項式環の代数としての生成元であった．一方，ここ数回の間の主な対象であった Shur 多項式 s_λ も対称式であるから，基本対称式や完全対称式を使って書き表すことができるはずである．これを具体的に行列式を用いて書く公式が表題の Jacobi-Trudi の公式と呼ばれているものである．

$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathscr{P}_{\le n}$ を長さが n 以下の分割とする．(n の分割ではないことに注意せよ．) また $\rho = (n-1, n=2, \cdots, 1, 0)$ とおく．Schur 関数は

$$s_\lambda(x) = \frac{a_{\lambda+\rho}(x)}{a_\rho(x)} = \frac{\sum\limits_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, x^{\sigma(\lambda+\rho)}}{\prod_{1\le i<j\le n}(x_i - x_j)} = \frac{\begin{vmatrix} x_1^{\lambda_1+n-1} & x_1^{\lambda_2+n-2} & \cdots & x_1^{\lambda_n} \\ x_2^{\lambda_1+n-1} & x_2^{\lambda_2+n-2} & \cdots & x_2^{\lambda_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^{\lambda_1+n-1} & x_n^{\lambda_2+n-2} & \cdots & x_n^{\lambda_n} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1^{n-1} & x_1^{n-2} & \cdots & x_1 & 1 \\ x_2^{n-1} & x_2^{n-2} & \cdots & x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ x_n^{n-1} & x_n^{n-2} & \cdots & x_n & 1 \end{vmatrix}}$$

で定義されていたことを思い出そう．以上の記号の下に次の定理が成り立つ．

定理 15.2 (Jacobi-Trudi の公式)**.**

$$s_\lambda(x) = \det\bigl(h_{\lambda_i - i + j}\bigr)_{1\le i,j\le n}$$
$$s_{{}^t\lambda}(x) = \det\bigl(e_{\lambda_i - i + j}\bigr)_{1\le i,j\le n}$$

行列式の形は少々分かりにくいが，具体的に書くと次のようになる．

$$\det\bigl(h_{\lambda_i-i+j}\bigr)_{1\le i,j\le n} = \begin{vmatrix} h_{\lambda_1} & h_{\lambda_1+1} & h_{\lambda_1+2} & \cdots & h_{\lambda_1+n-1} \\ h_{\lambda_2-1} & h_{\lambda_2} & h_{\lambda_2+1} & \cdots & h_{\lambda_2+n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_{\lambda_n-n+1} & h_{\lambda_n-n+2} & h_{\lambda_n-n+3} & \cdots & h_{\lambda_n} \end{vmatrix}$$

基本対称式の方は h を e に変更すればよい．なお，$k<0$ なら $h_k = 0$ であって，$0 \le k \le n$ の範囲の外にある k については $e_k = 0$ であることに注意しよう．

そこで証明をする前に例を見ておこう．

55 Jacobi-Trudi 公式の適用例

例 15.3. $n=3$ で $\lambda = (1,0,0)$ のとき．このとき $s_\lambda = s(\square) = h_1 = e_1$ だが，Jacobi-Trudi の公式は

$$s(\square) = \begin{vmatrix} h_1 & h_2 & h_3 \\ h_{-1} & h_0 & h_1 \\ h_{-2} & h_{-1} & h_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} h_1 & h_2 & h_3 \\ 0 & 1 & h_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = h_1$$

同様に h を e で置き換えて $s(\ydiagram{1}) = e_1$ を得る．

例 15.4. $n=3$ で $\lambda=(2,0,0)$ のとき．このとき $s_\lambda = s(\ydiagram{2}) = h_2$ だが，Jacobi-Trudi の公式は

$$s(\ydiagram{2}) = \begin{vmatrix} h_2 & h_3 & h_4 \\ h_{-1} & h_0 & h_1 \\ h_{-2} & h_{-1} & h_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} h_2 & h_3 & h_4 \\ 0 & 1 & h_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = h_2$$

同様に h を e で置き換えると $s(\ydiagram{1,1}) = e_2$ を得る．

例 15.5. $n=3$ で $\lambda=(1,1,0)$ のとき．このとき $s_\lambda = s(\ydiagram{1,1}) = e_2$ だが，Jacobi-Trudi の公式は

$$s(\ydiagram{1,1}) = \begin{vmatrix} h_1 & h_2 & h_3 \\ h_0 & h_1 & h_2 \\ h_{-2} & h_{-1} & h_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} h_1 & h_2 & h_3 \\ 1 & h_1 & h_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = h_1^2 - h_2$$

ここで $h_1 = x_1+x_2+x_3$，$h_2 = x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1$ だから，$h_1^2-h_2 = x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1 = e_2$ で確かに一致している．

h を e で置き換えると $s(\ydiagram{2}) = e_1^2 - e_2 = h_2$ を得る．

少々しつこいが，もう一つだけ例をあげよう．

例 15.6. $n=3$ で $\lambda=(2,1,0)$ のとき．このとき $s_\lambda = s(\ydiagram{2,1})$ だが，Jacobi-Trudi の公式は

$$s(\ydiagram{2,1}) = \begin{vmatrix} h_2 & h_3 & h_4 \\ h_0 & h_1 & h_2 \\ h_{-2} & h_{-1} & h_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} h_2 & h_3 & h_4 \\ 1 & h_1 & h_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = h_1h_2 - h_3$$

ここで Pieri の公式を用いると，

$$h_1h_2 - h_3 = s(\ydiagram{2})h_1 - s(\ydiagram{3}) = s(\ydiagram{3}) + s(\ydiagram{2,1}) - s(\ydiagram{3}) = s(\ydiagram{2,1})$$

で確かに正しい．

h を e で置き換えると $s(\ydiagram{2,1}) = e_1e_2 - e_3$ を得る．これも Pieri の公式を用いて確かに正しいことが確認できる（演習）．

演習 15.7. $n=3$ のとき，$\lambda=(3,2,1)$, $(3,2,2)$, $(3,1,1)$ に対して，s_λ を h_μ の一次結合の形に表せ．

演習 15.8. $n=3$ のとき，$\lambda=(3,2,1)$, $(3,2,2)$, $(3,1,1)$ に対して，s_λ を e_μ の一次結合の形に表せ．

56 Jacobi-Trudi 公式の証明

母函数 $H(t)=\sum_{k=0}^{\infty}h_k(x)t^k=\prod_{i=1}^{n}\dfrac{1}{1-x_it}$ を思い出す．また，基本対称式の母函数 $E(t)$ そのものではなく，

$$E_j(t)=\frac{E(-t)}{1-x_jt}=\prod_{\substack{1\le k\le n\\ k\ne j}}(1-x_kt)=\sum_{k=0}^{n-1}\varepsilon_k^{(j)}(x)t^k$$

を以下で使う．ここで $\varepsilon_k^{(j)}(x)$ は t^k の係数として与えられる x の多項式であるが，k が $0\le k\le n-1$ の範囲にないときには $\varepsilon_k^{(j)}(x)=0$ と解釈する．

実は，$\varepsilon_k^{(j)}(x)=(-1)^ke_k(x)\big|_{x_j=0}$ つまり，x_j を除いた $(n-1)$ 変数の基本対称式（の ±1 倍）となっているが，我々にはその具体的な形は必要がない（のであまり気にしないでよい）．

補題 15.9. $\ell\ge0$ に対して，$x_j^{\ell}=\sum_{k+p=\ell}h_k(x)\,\varepsilon_p^{(j)}(x)$ が成り立つ．

証明. 定義より

$$E_j(t)H(t)=\frac{E(-t)}{1-x_jt}H(t)=\frac{1}{1-x_jt}=\sum_{\ell=0}^{\infty}x_j^{\ell}t^{\ell}$$

であるが，左辺の冪級数の積は

$$\begin{aligned}E_j(t)H(t)&=\sum_{p=0}^{\infty}\varepsilon_p^{(j)}(x)t^p\sum_{k=0}^{\infty}h_k(x)t^k=\sum_{p,k=0}^{\infty}\varepsilon_p^{(j)}(x)h_k(x)t^{k+p}\\&=\sum_{\ell=0}^{\infty}\Big(\sum_{k+p=\ell}\varepsilon_p^{(j)}(x)h_k(x)\Big)t^{\ell}\end{aligned}$$

となり両辺の t^{ℓ} の係数を比較して，補題の等式を得る． □

さて，n 次正方行列 Φ_λ および Ψ を次のように定めよう．

$$\Phi_\lambda=(h_{\lambda_i-i+j})_{1\le i,j\le n},\qquad \Psi=(\varepsilon_{n-i}^{(j)})_{1\le i,j\le n}$$

もちろん Φ_λ は JT 公式の右辺に現れる行列である．Ψ の方は若干分かりにくいが，n が小さいときに自分で書いてみるとよい．

補題 15.10. $\Phi_\lambda\cdot\Psi=(x_j^{\lambda_i+n-i})_{1\le i,j\le n}$ が成り立つ．とくに $\det\Phi_\lambda\cdot\det\Psi=a_{\lambda+\rho}(x)$ である．

証明. 行列の掛け算を実際に行えばよい．$\Phi_\lambda\cdot\Psi$ の (i,j) 成分は

$$\sum_{m=1}^{n}(\Phi_\lambda)_{i,m}(\Psi)_{m,j}=\sum_{m=1}^{n}h_{\lambda_i-i+m}\varepsilon_{n-m}^{(j)}=\sum_{k+p=\lambda_i+n-i}h_k\cdot\varepsilon_p^{(j)}=x_j^{\lambda_i+n-i}$$

となり，確かに成り立つ．ただし，最後の等式はすでに証明した補題より従う． □

これで Jacobi-Trudi の公式の証明の主要部分は済んでいる．証明を完結させよう．

Schur 関数の定義より

$$s_\lambda = \frac{a_{\lambda+\rho}(x)}{a_\rho(x)} = \frac{\det\Phi_\lambda \cdot \det\Psi}{\det\Phi_0 \cdot \det\Psi} = \frac{\det\Phi_\lambda}{\det\Phi_0}$$

である．一方，

$$\det\Phi_0 = \begin{vmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & \cdots & h_{n-1} \\ h_{-1} & h_0 & h_1 & \cdots & h_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_{1-n} & h_{2-n} & h_{3-n} & \cdots & h_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & h_1 & h_2 & \cdots & h_{n-1} \\ 0 & 1 & h_1 & \cdots & h_{n-2} \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & h_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

なので $s_\lambda = \det\Phi_\lambda$ である．これが定理の最初の主張であった．

第 2 の主張，$s_{{}^t\lambda}$ を基本対称式で表す等式の証明は次の補題から従う．分割 $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\ell)$ に対して $h_\mu = h_{\mu_1} h_{\mu_2} \cdots h_{\mu_\ell}$ だったことを思い出そう．

補題 15.11. $s_\lambda = \sum_\mu c_\mu h_\mu$ と一次結合にあらわされていれば，$s_{{}^t\lambda} = \sum_\mu c_\mu e_\mu$ が成り立つ．

証明. この補題は Pieri の公式を用いて，$|\lambda|$ に関する帰納法で証明できる． □

演習 15.12. $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1$ と置いたとき，$h_k(1) = \binom{n+k-1}{k}$ および $e_k(1) = \binom{n}{k}$ であることを用いて $n = 3$ のとき，$\lambda = (3,2,1)$, $(3,2,2)$, $(3,1,1)$ に対して，半標準盤の個数 $d_\lambda^{(3)} = s_\lambda(1)$ を行列式を用いて（2 通りに）計算せよ．

第16回　ヤング図形に関する参考文献などの紹介 for further readings

ヤング図形の現れる主な事象を挙げながら参考文献などを詳解してみたい．しかし，このリストを見ても分かるように，話題が多岐にわたり，しかも表現論の中心的話題に絡んでいるのでここで取りこぼされている話題や文献も数多い．いや，むしろここで拾っているものはほんの一部であるというべきだろう．(漏れている文献など，ぜひご連絡下さい.)

以上を心に留めおいてご覧になっていただきたい．

57　有限次元の表現論

(1) S_n の表現の基底

(2) GL_n の表現の基底

(3) Schur 多項式：指標

(4) Littlewood-Richardson 係数とテンソル積の分解： skew ヤング図形

(5) モジュラー表現論： 制限ヤング図形と制限ヤング盤

まずは表現論．

ワイルの本 [22] が古典ではあるが，ヤング図形は表立っては出てこない（と思う，いま手元にないので）．そんなわけで，私の取りあえずのお勧めは Fulton-Harris の表現論の本 [9] である．GL だけでなく Sp, SO についてもしっかり書かれている．もし手に入るのなら Howe の Schur Lecture [12] はもっとお勧めである．

日本語の本だと岡田聡一 [26] がスタンダード．私自身は，すくなくとも S_n の表現論については彌永昌吉・杉浦光夫 [50]，岩堀長慶 [28] で勉強した．お勧めです．

GL_n の場合のワイル加群の構成は Fulton のヤングタブロー [44] にも書いてあるが，私は Weyman の本 [21] で学んだ（復習したというべきかも）．

Littlewood-Richardson の規則については，本ではないものの Howe-Lee の論説 [13] がよいと思う．例も豊富で，見てるだけでも楽しい（？）．本格的だが，van Leeuwen の論説 もよいと思う．彼は他にも RSK 対応や Schützenberger のアルゴリズムなどにも造詣が深く，他の論文も当たってみると参考になる．

モジュラー表現論について私が知っていることは少ない．誰も信用しないでほしい．山田裕史さんの本 [34] を手がかりに進んでみてほしい．日本語の本できちんと解説しているものはないのじゃないのかなぁ？ （フラグが立ってます.）

他に日本語の表現論の本で関係しそうなものは，堀田良之 [48]，庄司俊明 [38]，他にもたくさんあるだろうなぁ．不勉強であまり読んでないのでこのあたりで次の話題に．

58　組合せ論・対称関数

(1) 組合せ論

(2) 対称関数・シューア関数を含んだ対称関数の一般的話題

組合せ論は寺田至 [35] の本がよい．ただ，手に入りにくくなっていて残念である．もちろん Stanley [39] にも書いてあるはず（書いてるよね？）．Stanley はには第 2 巻 [19] もあるし，学部向けの教科書 [20] もある．(私はどちらも読んでません．ごめんなさい.) たしか Knuth の本 [23] にもヤング図形の話は書いてあったはず．

ほかにエリクソン・アンドリュースの本が組合せ論に特化していて手軽に読める（背景知識が不要，背景知識があるともちろんもっと楽しめる）．そうそう，私の卒研生がドミノ盤と，フィボナッチ・ヤング盤などについて卒論を書きました．それも参照してほしい．[27, 46, 47]

対称関数と言うともう Macdonald [14] に終止符を打つ．あとの文献はここからたどって下さい，とはいうものの，日本語の文献で三町勝久 [49] も挙げておく．

Macdonald が偉大すぎてその陰に隠れがちであるが，Manivel [15] の本は組合せ論，対称関数，表現論，コホモロジー理論など盛りだくさんでしかも薄い．これもお勧めです．

59　冪零軌道（幾何学的対象）

(1) 冪零軌道の分類・ジョルダン標準形：

(2) 符号付きヤング図形：対称対の冪零軌道

冪零軌道の分類についてはもう Collingwood-McGovern [3] しかない．文献もそちらにお任せします．我々の本，太田・西山「代数群と軌道」[42] も多くの部分が冪零軌道と対称対の冪零軌道に割り当てられてて，とくに対称対の場合はかなり詳しいはず．よろしくお願いします．

60　旗多様体と RSK 対応

(1) グラスマン多様体上の軌道（シューベルト解析・グラスマン置換）

(2) 旗多様体上のボレル部分群の軌道（Bruhat 分解）: RS 対応

(3) 置換に対応する標準ヤング盤の組: RS 対応

(4) 部分置換のヤング盤: RSK 対応

このあたりは幾何学であるが，RS 対応や RSK 対応が出ているように組合せ論とも色濃く関係している．グラスマン多様体のときは池田岳の本 [43] がよいと思う．前野俊昭 [41] もよいと思う．

旗多様体以降についてはあまりよい本は見当たらない．じつは Lucas Fresse と一緒にこの周辺の話を研究中である．我々の対象は旗多様体ではなく二重旗多様体であるが，いろいろとおもしろい例が得られているので，ぜひ参照してほしい [8, 7, 6, 5]．この研究が，講義の原動力となっていることはいうまでもない．

61 リー群の表現論：原始イデアル

(1) ドミノ図形，ドミノ盤

えーっっと，忘れた．(どっとはらい)

これについてはあまりしっかり理解したことがないのだが，Barbash-Vogan [2, 1] の A 型の場合の Lusztig cell の記述や，Garfinkle [10] による C 型の場合の原始イデアルの分類にドミノ図形，ドミノ盤などが現れる．いつか思い出そうと思うけど，もう 40 年近く前の話なのでいまはこれ以上は書けない．CM の本 [3] の最後に少しだけ書いてあるのでそっちも見てほしい．

そうそう，京都大学時代に指導した修士の学生がドミノ盤の修士論文を書きました．そちらもご覧下さい．[37]

[2022/08/18 14:43:46 JST]

参考文献

[1] Dan Barbasch and David Vogan, *Primitive ideals and orbital integrals in complex classical groups*, Math. Ann. **259** (1982), no. 2, 153–199. MR 656661

[2] ———, *Weyl group representations and nilpotent orbits*, Representation theory of reductive groups (Park City, Utah, 1982), Progr. Math., vol. 40, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1983, pp. 21–33. MR 733804

[3] David H. Collingwood and William M. McGovern, *Nilpotent orbits in semisimple Lie algebras*, Van Nostrand Reinhold Mathematics Series, Van Nostrand Reinhold Co., New York, 1993. MR MR1251060 (94j:17001)

[4] Percy Deift, *Integrable systems and combinatorial theory*, Notices Amer. Math. Soc. **47** (2000), no. 6, 631–640. MR 1764262

[5] Lucas Fresse and Kyo Nishiyama, *On the exotic Grassmannian and its nilpotent variety*, Represent. Theory **20** (2016), 451–481, Paging previously given as: 1–31. MR 3576071

[6] ———, *A Generalization of Steinberg Theory and an Exotic Moment Map*, International Mathematics Research Notices (2020), rnaa080.

[7] Lucas Fresse and Kyo Nishiyama, *On generalized Steinberg theory for type AIII*, arXiv e-prints (2021), arXiv:2103.08460.

[8] ———, *Orbit embedding for double flag varieties and Steinberg map*, Contemp. Math. **768** (2021), 21–42.

[9] William Fulton and Joe Harris, *Representation theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 129, Springer-Verlag, New York, 1991, A first course, Readings in Mathematics. MR 1153249

[10] Devra Garfinkle, *On the classification of primitive ideals for complex classical Lie algebra. II*, Compositio Math. **81** (1992), no. 3, 307–336. MR 1149172

[11] Kenneth Glass and Chi-Keung Ng, *A simple proof of the hook length formula*, Amer. Math. Monthly **111** (2004), no. 8, 700–704. MR 2091544

[12] Roger Howe, *Perspectives on invariant theory: Schur duality, multiplicity-free actions and beyond*, The Schur lectures (1992) (Tel Aviv), Israel Math. Conf. Proc., vol. 8, Bar-Ilan Univ., Ramat Gan, 1995, pp. 1–182. MR MR1321638 (96e:13006)

[13] Roger Howe and Soo Teck Lee, *Why should the Littlewood-Richardson rule be true?*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **49** (2012), no. 2, 187–236. MR 2888167

[14] I. G. Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials*, second ed., Oxford Mathematical Monographs, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1995, With contributions by A. Zelevinsky, Oxford Science Publications. MR 1354144

[15] Laurent Manivel, *Symmetric functions, schubert polynomials and degeneracy loci*, SMF/AMS texts and monographs 6, American Mathematical Society,Société Mathématique de France, 2001.

[16] G. de B. Robinson, *On the Representations of the Symmetric Group*, Amer. J. Math. **60** (1938), no. 3, 745–760. MR 1507943

[17] C. Schensted, *Longest increasing and decreasing subsequences*, Canadian J. Math. **13** (1961), 179–191. MR 121305

[18] Richard Stanley, *Permutations (ver.21)*, May 2015, notes for the 2010 AMS Colloquium Lectures, available at
`http://www-math.mit.edu/ rstan/papers/perms.pdf`.

[19] Richard P. Stanley, *Enumerative combinatorics. Vol. 2*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 62, Cambridge University Press, Cambridge, 1999, With a foreword by Gian-Carlo Rota and appendix 1 by Sergey Fomin. MR 1676282

[20] ______, *Algebraic combinatorics*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, New York, 2013, Walks, trees, tableaux, and more. MR 3097651

[21] Jerzy Weyman, *Cohomology of vector bundles and syzygies*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 149, Cambridge University Press, Cambridge, 2003. MR 1988690

[22] H. ワイル（蟹江幸博訳）, **古典群：不変式と表現**, シュプリンガー数学クラシックス 15, 丸善出版, 2012.

[23] D.E. クヌース（青木孝他訳）, *Fundamental algorithms* **（日本語版）**, 日本語版 ed., The art of computer programming 1, ドワンゴ, 2015.

[24] 佐藤幹夫述 (榎本彦衛記), *Maya game* **について**, 1970, pp. 73–84.

[25] ______, **マヤ・ゲームの数学的理論**, **計算機におけるゲームとパズルの諸問題**, 1970, pp. 105–135.

[26] 岡田聡一, **古典群の表現論と組合せ論（上・下）**, 数理物理シリーズ 3–4, 培風館, 2006.

[27] 関口啓, **ポリボナッチ標準盤の転倒数と逆メジャーインデックス**, 2014.02, www.math.aoyama.ac.jp/~kyo/sotsuken/index.html, pp. 1–28.

[28] 岩堀長慶, **対称群と一般線型群の表現論** *:* **既約指標・***Young* **図形とテンソル空間の分解**, オンデマンド版 ed., 岩波オンデマンドブックス, 岩波書店, 2019.

[29] 高橋礼司, **複素解析**, 新版 ed., 基礎数学 8, 東京大学出版会, 1990.

[30] 高木貞治, **代数学講義** *(***改訂新版***)*, 共立出版, 1965.

[31] 佐藤幹夫・木村達雄他, **佐藤幹夫の数学** *(***増補版***)*, 日本評論社, 2014.

[32] アンドリュース (George E. Andrews)・エリクソン (Kimmo Eriksson) (佐藤文広訳), **整数の分割**, 数学書房, 2006.

[33] 佐武一郎, **線型代数学** *(***新装版***)*, 数学選書 1, 裳華房, 2015 (1958 初版, 1974 増補改題).

[34] 山田裕史, **組合せ論プロムナード**, 日本評論社, 2009.

[35] 寺田至, **ヤング図形のはなし**, 日評数学選書, 日本評論社, 2002.

[36] 時弘哲治, **箱玉系の数理**, 開かれた数学 3, 朝倉書店, 2010.

[37] 小西勇樹, *BC* **型** *Weyl* **群の表現と** *Domino Tableaux*, 2009.02.05, www.math.aoyama.ac.jp-/~kyo/sotsuken/index.html, pp. 1–43.

[38] 庄司俊明, **代数群の幾何的表現論** *i, ii*, 朝倉数学大系 16–17, 朝倉書店, 2021.

[39] R.P. スタンレイ (成嶋弘訳), **数え上げ組合せ論**, 日本評論社, 1990.

[40] 石川雅雄, **分割数と分割関数** *(***特集 数や図形を分割しよう***)*, 数学セミナー **44** (2005), no. 2, 30–33, http://poisson.ms.u-tokyo.ac.jp/ mi/papers/partition.pdf.

[41] 前野俊昭, *Schubert* **多項式とその仲間たち**, 問題・予想・原理の数学 3, 数学書房, 2016.

[42] 太田琢也・西山享, **代数群と軌道**, 数学の杜 3, 数学書房, 2015.

[43] 池田岳, **数え上げ幾何学講義** *:* **シューベルト・カルキュラス入門**, 東京大学出版会, 2018.

[44] フルトン (William Fulton) (池田岳・井上玲・岩尾慎介訳), **ヤング・タブロー***:* **表現論と幾何への応用**, 丸善出版, 2019.

[45] 長谷川浩司, **線型代数** *(***改訂版***)*, 日本評論社, 2015.

[46] 藤野優祐, **長方形領域のドミノタイル張りについて**, 2011.02, www.math.aoyama.ac.jp-/~kyo/sotsuken/index.html, pp. 1–17.

[47] 宝積佑樹, **ブレスードの全単射対応の一般化と分割恒等式の証明**, 2010.02, www.math.aoyama.ac.jp-/~kyo/sotsuken/index.html, pp. 1–15.

[48] 堀田良之, **加群十話** *:* **代数学入門**, すうがくぶっくす 3, 朝倉書店, 1988.

[49] 堀田良之・渡辺敬一・庄司俊明・三町勝久, **群論の進化**, 代数学百科, 朝倉書店, 2004.

[50] 弥永昌吉・杉浦光夫, **応用数学者のための代数学**, オンデマンド版 ed., 岩波オンデマンドブックス, 岩波書店, 2017.