学問入門講座

射影の幾何学

西山 享

青山学院大学 理工学部 物理・数理学科

2011 年 5 月 14 日 (土)

Abstract

数学では、とても単純なアイデアが理論を作りだしたり、既存の理論を全く変えてしまうということがよくおこります。例えば、幾何学における補助線。これを一本引くだけで、難しい証明が一目で明らかになるという経験をされた方もいるでしょう。また、複素数の導入はその後の数学理論を一変させました。この講義のテーマである「射影」も、そのような、単純ではあるが幾何学の世界を一変させるほど強力なアイデアなのです。
「射影」という言葉は、おそらく皆さんは日常用語として使うが、学校で学ぶ数学の時間にはほとんど聞いたことがないだろうと思います。そこで、この講義では、まず『射影とは何か』を紹介します。その後、射影を使うとどのような幾何学が見えてくるのかについて紹介しましょう。とくに興味深いのが『無限遠点』という概念だと思います。そして、最後にいくつかの有名な定理、例えばデザルグの定理やパップスの定理、パスカルの定理などを味わってみたいと思います。

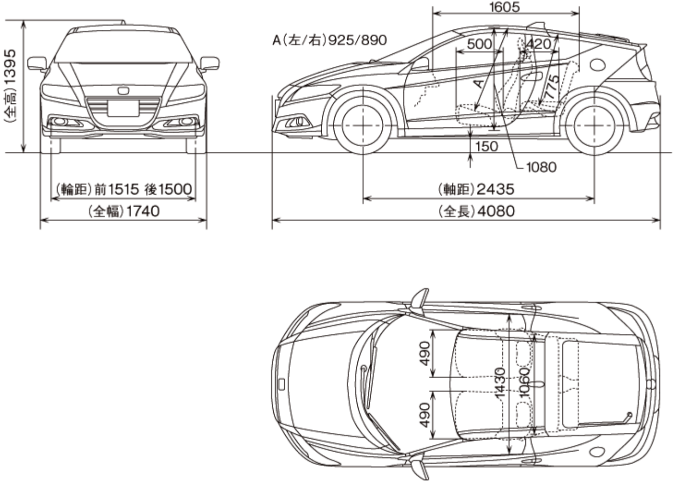
第一部

射影とアフィン幾何

射影とは...?

光源 (光線) でできる物体の影 $\Longleftrightarrow$ 射影

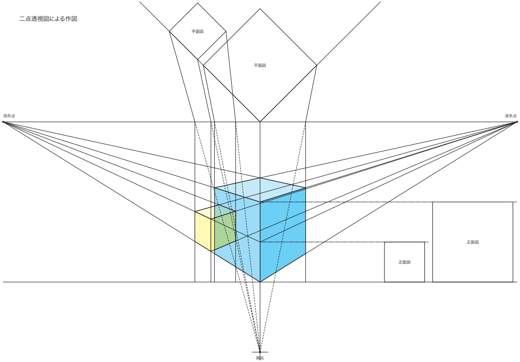
- 正射影 $\cdots$ 三面図



射影とは...?

光源 (光線) でできる物体の影 $\Longleftrightarrow$ 射影

- 正射影 ··· 三面図
- 透視図法 ··· 一点透視・二点透視・消失点

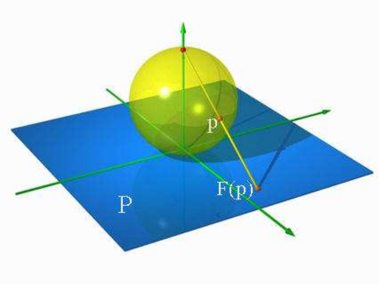


渡辺隆志氏 (電気通信大学) のホームページより

射影とは...?

光源 (光線) でできる物体の影 $\Longleftrightarrow$ 射影

- 正射影 ··· 三面図
- 透視図法 ··· 一点透視・二点透視・消失点
- 立体射影



Dimension ホームページより
http://www.dimensions-math.org/Dim_CH1_JP.htm

射影によって変化するもの・しないもの

射影によって変化するもの・しないもの

- 射影によって変化するもの
  - 線分の長さ
  - 角度
  - 面積

射影によって変化するもの・しないもの

- 射影によって変化するもの
  - 線分の長さ
  - 角度
  - 面積
- 射影によって変化しないもの (射影不変な性質)
  - 直線, 平行な直線
  - 二次曲線 (楕円、放物線、双曲線など)
  - 交点・接点

射影によって変化するもの・しないもの

- 射影によって変化するもの
  - 線分の長さ
  - 角度
  - 面積
- 射影によって変化しないもの (射影不変な性質)
  - 直線, 平行な直線
  - 二次曲線 (楕円、放物線、双曲線など)
  - 交点・接点

■ 射影によって変わらない幾何学的性質の研究 $\Longrightarrow$ 射影幾何学

射影によって変化するもの・しないもの

- 射影によって変化するもの
  - 線分の長さ
  - 角度
  - 面積
- 射影によって変化しないもの (射影不変な性質)
  - 直線, 平行な直線
  - 二次曲線 (楕円、放物線、双曲線など)
  - 交点・接点

■ 射影によって変わらない幾何学的性質の研究 $\Longrightarrow$ 射影幾何学

■ 射影幾何学の創始者たち

- デザルグ

射影によって変化するもの・しないもの

- 射影によって変化するもの
  - 線分の長さ
  - 角度
  - 面積
- 射影によって変化しないもの (射影不変な性質)
  - 直線, 平行な直線
  - 二次曲線 (楕円、放物線、双曲線など)
  - 交点・接点

■ 射影によって変わらない幾何学的性質の研究 $\Longrightarrow$ <u>射影幾何学</u>

■ 射影幾何学の創始者たち

- デザルグ
- パスカル

正射影

E^3 : 3 次元空間 (xyz 空間)　$E^3 = \{(a,b,c) \mid a,b,c : \text{実数}\}$

正射影

E^3 : 3 次元空間 (xyz 空間)　　$E^3 = \{(a, b, c) \mid a, b, c :$ 実数 $\}$

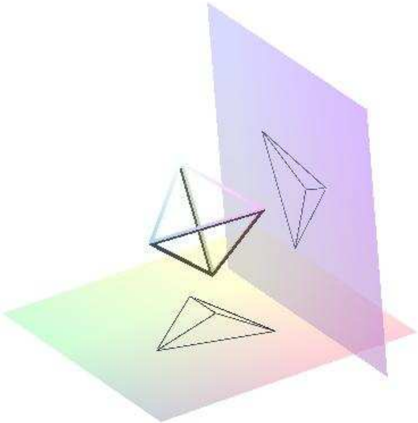
E^2 : 2 次元平面 (xy 空間)　　$E^2 = \{(a, b) \mid a, b :$ 実数 $\}$

正射影

E^3 : 3 次元空間 (xyz 空間)　　$E^3 = \{(a, b, c) \mid a, b, c : \text{実数}\}$

E^2 : 2 次元平面 (xy 空間)　　$E^2 = \{(a, b) \mid a, b : \text{実数}\}$

$$p : E^3 \to E^2, \quad (a, b, c) \mapsto (a, b) : \underline{\text{正射影}}$$



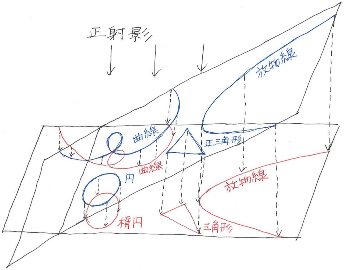
正射影による図形の変化

空間内の平面 H を正射影すると $\cdots$

正射影による図形の変化

空間内の平面 H を正射影すると ⋯

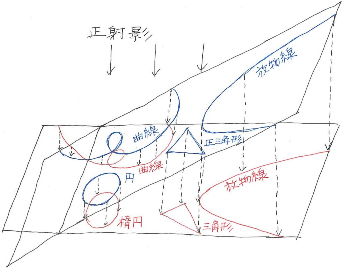
$\pi : E^2 \simeq H \to E^2$: 2 つの平面の変換



正射影による図形の変化

空間内の平面 H を正射影すると $\cdots$

$\pi : E^2 \simeq H \to E^2$: 2 つの平面の変換

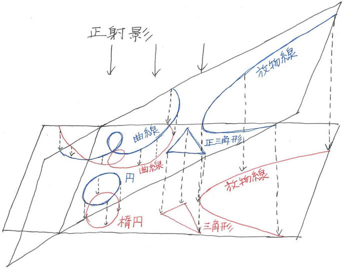


正射影によって図形はどのように変化するか?

正射影による図形の変化

空間内の平面 H を正射影すると $\cdots$

$\pi : E^2 \simeq H \to E^2$: 2 つの平面の変換



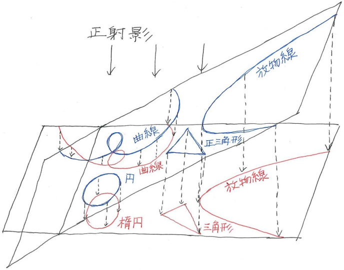
正射影によって図形はどのように変化するか?

1. 球 $\to$ 円　円錐 $\to$ 二本の直線

正射影による図形の変化

空間内の平面 H を正射影すると $\cdots$

$\pi : E^2 \simeq H \to E^2$: 2 つの平面の変換



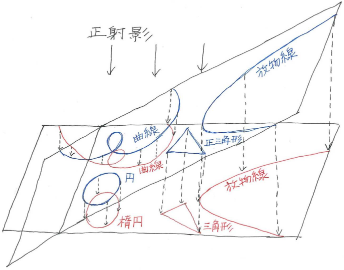
正射影によって図形はどのように変化するか?

1. 球 $\to$ 円　円錐 $\to$ 二本の直線
2. 直線 $\to$ 直線　平行な直線 $\to$ 平行な直線　平行四辺形 $\to$ 平行四辺形

正射影による図形の変化

空間内の平面 H を正射影すると $\cdots$

$\pi : E^2 \simeq H \to E^2$: 2 つの平面の変換



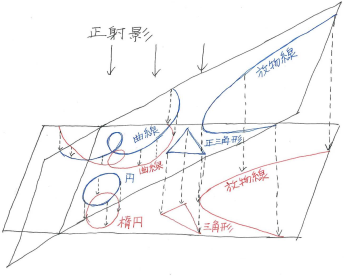
正射影によって図形はどのように変化するか?

1. 球 $\to$ 円　円錐 $\to$ 二本の直線
2. 直線 $\to$ 直線　平行な直線 $\to$ 平行な直線　平行四辺形 $\to$ 平行四辺形
3. 楕円 $\to$ 楕円　円 $\to$ 楕円　放物線 $\to$ 放物線　双曲線 $\to$ 双曲線

正射影による図形の変化

空間内の平面 H を正射影すると $\cdots$

$\pi : E^2 \simeq H \to E^2$: 2 つの平面の変換



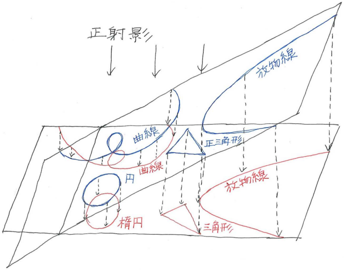
正射影によって図形はどのように変化するか?

1. 球 $\to$ 円　円錐 $\to$ 二本の直線
2. 直線 $\to$ 直線　平行な直線 $\to$ 平行な直線　平行四辺形 $\to$ 平行四辺形
3. 楕円 $\to$ 楕円　円 $\to$ 楕円　放物線 $\to$ 放物線　双曲線 $\to$ 双曲線
4. 三角形 $\to$ 三角形　正三角形 $\to$ 三角形　n 角形 $\to$ n 角形

正射影による図形の変化

空間内の平面 H を正射影すると $\cdots$

$\pi : E^2 \simeq H \to E^2$: 2 つの平面の変換

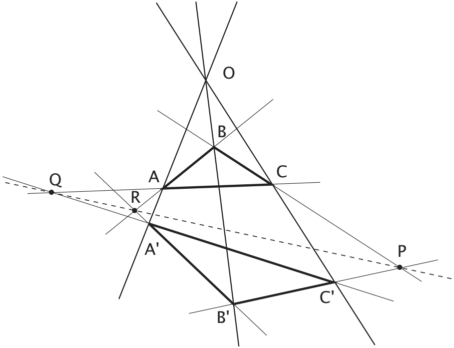


正射影によって図形はどのように変化するか?

1. 球 → 円　円錐 → 二本の直線
2. 直線 → 直線　平行な直線 → 平行な直線　平行四辺形 → 平行四辺形
3. 楕円 → 楕円　円 → 楕円　放物線 → 放物線　双曲線 → 双曲線
4. 三角形 → 三角形　正三角形 → 三角形　n 角形 → n 角形
5. 交点 → 交点　接点 → 接点　接線 → 接線

Theorem (デザルグの定理)

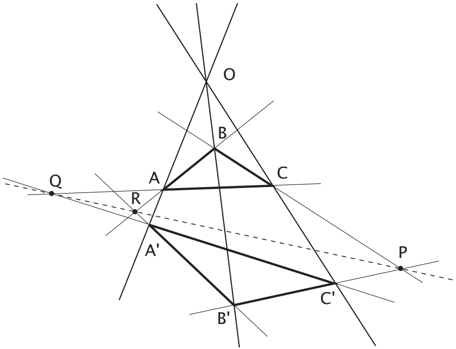
平面の $\triangle ABC$ と $\triangle A'B'C'$



Theorem (デザルグの定理)

平面の $\triangle ABC$ と $\triangle A'B'C'$

条件 1　3 直線 AA', BB', CC' が一点で交わる。

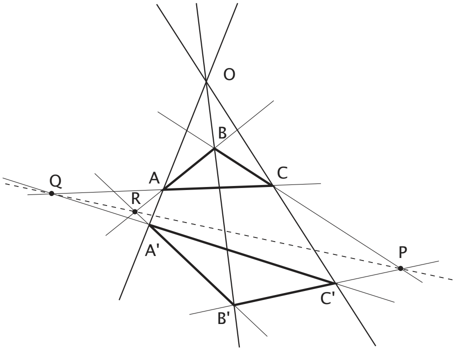


Theorem (デザルグの定理)

平面の $\triangle ABC$ と $\triangle A'B'C'$

条件 1 3 直線 AA', BB', CC' が一点で交わる。

条件 2 対応する辺同士が平行でない。



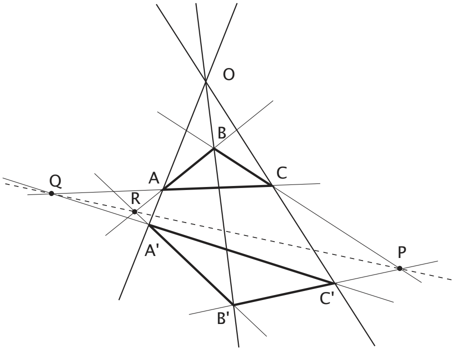
Theorem (デザルグの定理)

平面の $\triangle ABC$ と $\triangle A'B'C'$

条件 1 3 直線 AA', BB', CC' が一点で交わる。

条件 2 対応する辺同士が平行でない。

$\Longrightarrow$ 辺の交点 $AB \cap A'B', BC \cap B'C', CA \cap C'A'$ は一直線上にある。



共点と共線

共点と共線

1. 共線 ··· いくつかの点が同一直線上にある

共点と共線

1. 共線 ··· いくつかの点が同一直線上にある
2. 共点 ··· いくつかの直線が一点で交わる

共点と共線

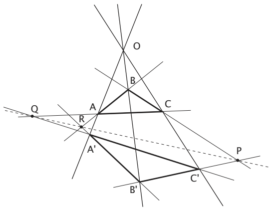
1. 共線 $\cdots$ いくつかの点が同一直線上にある
2. 共点 $\cdots$ いくつかの直線が一点で交わる

Theorem (デザルグの定理:平面言替版)

平面の $\triangle ABC$ と $\triangle A'B'C'$

条件 1　三直線 AA', BB', CC' が一点で交わる
条件 2　対応する辺同士が平行でない

$\Longrightarrow$　辺の交点 $AB \cap A'B', BC \cap B'C', CA \cap C'A'$ は同一直線上にある



共点と共線

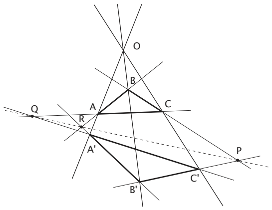
1. 共線 ··· いくつかの点が同一直線上にある
2. 共点 ··· いくつかの直線が一点で交わる

Theorem (デザルグの定理:平面言替版)

平面の $\triangle ABC$ と $\triangle A'B'C'$

条件 1 三直線 AA', BB', CC' が共点
条件 2 対応する辺同士が平行でない

$\Longrightarrow$ 辺の交点 $AB \cap A'B', BC \cap B'C', CA \cap C'A'$ は同一直線上にある



共点と共線

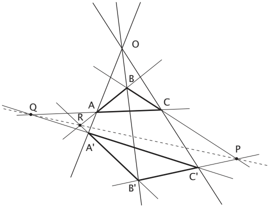
1. 共線 ··· いくつかの点が同一直線上にある
2. 共点 ··· いくつかの直線が一点で交わる

Theorem (デザルグの定理:平面言替版)

平面の $\triangle ABC$ と $\triangle A'B'C'$

条件 1　三直線 AA', BB', CC' が共点
条件 2　対応する辺同士が平行でない

$\Longrightarrow$　辺の交点 $AB \cap A'B', BC \cap B'C', CA \cap C'A'$ は同一直線上にある



共点と共線

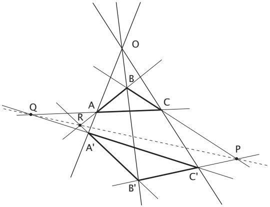
1. 共線 $\cdots$ いくつかの点が同一直線上にある
2. 共点 $\cdots$ いくつかの直線が一点で交わる

Theorem (デザルグの定理:平面言替版)

平面の $\triangle ABC$ と $\triangle A'B'C'$

条件 1 三直線 AA', BB', CC' が共点
条件 2 対応する辺同士が平行でない

$\Longrightarrow$ 辺の交点 $AB \cap A'B', BC \cap B'C', CA \cap C'A'$ は共線



デザルグの定理の証明・・・ ■ アイデア：空間版の定理を正射影で投影

デザルグの定理の証明 ··· ■ アイデア：空間版の定理を正射影で投影

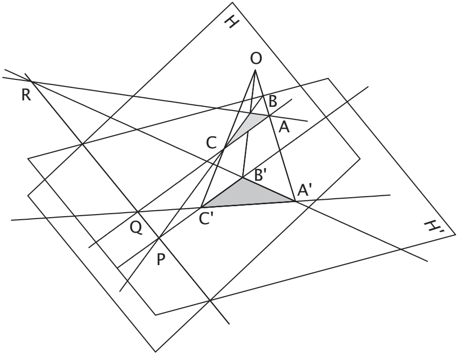
Theorem (デザルグの定理:空間版)

空間内の $\triangle ABC$ と $\triangle A'B'C'$

条件 1　三直線 AA', BB', CC' が共点

条件 2　対応する辺同士が平行でない

$\Longrightarrow$ 3 交点 $AB \cap A'B', BC \cap B'C', CA \cap C'A'$ は共線



デザルグの定理の証明 ··· ■ アイデア : 空間版の定理を正射影で投影

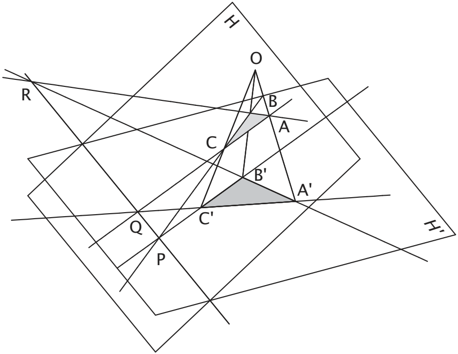
Theorem (デザルグの定理:空間版)

空間内の $\triangle ABC$ と $\triangle A'B'C'$

条件 1　三直線 AA', BB', CC' が共点

条件 2　対応する辺同士が平行でない

$\Longrightarrow$ 3 交点 $AB \cap A'B', BC \cap B'C', CA \cap C'A'$ は共線



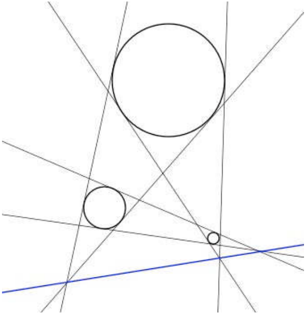
← これを見れば (2 次元版の) 証明になる

3 円の共通接線定理

平面上の三つの円 C_1, C_2, C_3 (半径は相異なる)
p_{ij} : C_i, C_j の外接共通接線の交点
(外接接線 $\cdots$ 中心を結ぶ線分と交わらない共通接線)

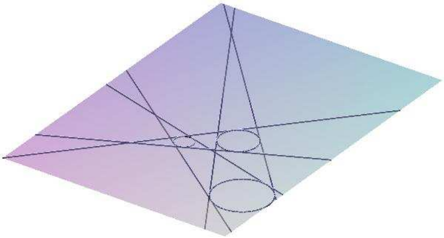
Theorem

平面上の 3 円 C_1, C_2, C_3 の共通接線の交点 p_{12}, p_{23}, p_{31} は共線である。



証明：3 円の共通接線定理

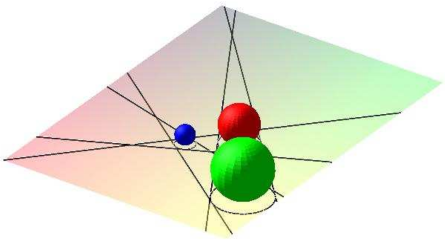
- アイデア ··· 正射影を用いて立体的に見る！



証明：3 円の共通接線定理

- アイデア ··· 正射影を用いて立体的に見る！

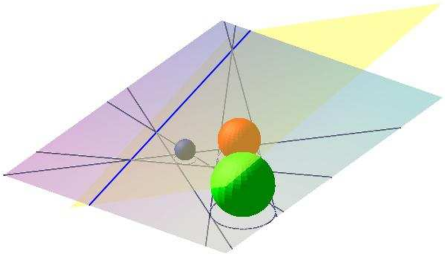
1. 平面 E_2 上に球を 3 つおく。3 つの球の正射影像が C_1, C_2, C_3



証明：3 円の共通接線定理

- アイデア ··· 正射影を用いて立体的に見る！

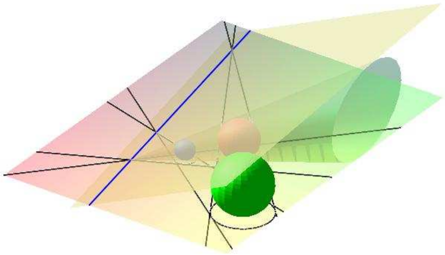
1. 平面 E_2 上に球を 3 つおく。3 つの球の正射影像が C_1, C_2, C_3
2. この球の上に平面 H をのせる $\Longrightarrow$ 3 点で接する



証明：3 円の共通接線定理

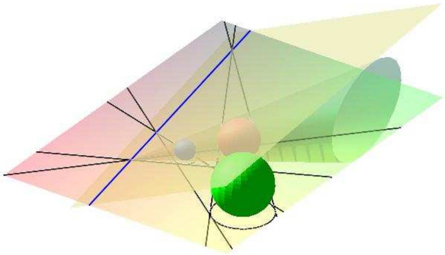
- アイデア ··· 正射影を用いて立体的に見る！

1. 平面 E_2 上に球を 3 つおく。3 つの球の正射影像が C_1, C_2, C_3
2. この球の上に平面 H をのせる $\Longrightarrow$ 3 点で接する
3. 2 つの球に外接する円錐 $\Longrightarrow$ 正射影像は共通接線



証明：3 円の共通接線定理

- アイデア ・・・ 正射影を用いて立体的に見る！
  1. 平面 E_2 上に球を 3 つおく。3 つの球の正射影像が C_1, C_2, C_3
  2. この球の上に平面 H をのせる $\Longrightarrow$ 3 点で接する
  3. 2 つの球に外接する円錐 $\Longrightarrow$ 正射影像は共通接線
  4. E_2 と H との交線 L を考える $\Longrightarrow$ p_{ij} はすべて L 上にある。



平行光線による射影

$\pi : E_3 \to E_2$: 平行光線による射影 (正射影の一般化)

平行光線による射影

$\pi : E_3 \to E_2$: 平行光線による射影 (正射影の一般化)

■ 座標で書くと？

$\mathbf{v} = (p, q, r)$ $(r \neq 0)$: 平行光線の方向ベクトル

$\mathbf{a} = (a, b, c) \in E_3$ を通る 方向 $\mathbf{v}$ の直線のパラメータ表示:

$$\ell : \mathbf{a} + t\mathbf{v} = (a + pt, b + qt, c + rt)$$

平行光線による射影

$\pi : E_3 \to E_2$: 平行光線による射影 (正射影の一般化)

■ 座標で書くと？

$\mathbf{v} = (p, q, r) \ (r \neq 0)$: 平行光線の方向ベクトル

$\mathbf{a} = (a, b, c) \in E_3$ を通る 方向 $\mathbf{v}$ の直線のパラメータ表示:

$$\ell : \mathbf{a} + t\mathbf{v} = (a + pt, b + qt, c + rt)$$

平行光線による射影

$\pi : E_3 \to E_2$: 平行光線による射影 (正射影の一般化)

■ 座標で書くと？

$\mathbf{v} = (p, q, r)$ $(r \neq 0)$: 平行光線の方向ベクトル

$\mathbf{a} = (a, b, c) \in E_3$ を通る 方向 $\mathbf{v}$ の直線のパラメータ表示:

$$\ell : \mathbf{a} + t\mathbf{v} = (a + pt, b + qt, c + rt)$$

平行光線による射影

$\pi : E_3 \to E_2$: 平行光線による射影 (正射影の一般化)

■ 座標で書くと？

$\mathbf{v} = (p, q, r)$ $(r \neq 0)$: 平行光線の方向ベクトル

$\mathbf{a} = (a, b, c) \in E_3$ を通る 方向 $\mathbf{v}$ の直線のパラメータ表示:

$$\ell : \mathbf{a} + t\mathbf{v} = (a + pt, b + qt, c + rt)$$

$E_2 : z = 0$ と ℓ との交点では z 座標 $= c + rt = 0$, $\quad \therefore \quad t = -c/r$

$$\Longrightarrow \frac{1}{r}(ra - cp, rb - cq, 0) \in E_2$$

平行光線による射影

$\pi : E_3 \to E_2$: 平行光線による射影 (正射影の一般化)

■ 座標で書くと？

$\mathbf{v} = (p, q, r)$ $(r \neq 0)$: 平行光線の方向ベクトル

$\mathbf{a} = (a, b, c) \in E_3$ を通る 方向 $\mathbf{v}$ の直線のパラメータ表示:

$$\ell : \mathbf{a} + t\mathbf{v} = (a + pt, b + qt, c + rt)$$

$E_2 : z = 0$ と ℓ との交点では z 座標 $= c + rt = 0$, $\therefore$ $t = -c/r$

$$\Longrightarrow \frac{1}{r}(ra - cp, rb - cq, 0) \in E_2$$

記号

$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$: 2 次の行列式

平行光線による射影

$\pi : E_3 \to E_2$: 平行光線による射影 (正射影の一般化)

■ 座標で書くと？

$\mathbf{v} = (p, q, r)$ $(r \neq 0)$: 平行光線の方向ベクトル

$\mathbf{a} = (a, b, c) \in E_3$ を通る 方向 $\mathbf{v}$ の直線のパラメータ表示:

$$\ell : \mathbf{a} + t\mathbf{v} = (a + pt, b + qt, c + rt)$$

$E_2 : z = 0$ と ℓ との交点では z 座標 $= c + rt = 0$, $\quad \therefore \quad t = -c/r$

$$\Longrightarrow \frac{1}{r}(ra - cp, rb - cq, 0) \in E_2$$

記号

$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$: 2 次の行列式

平行射影の式

$$\pi : E_3 \ni (a, b, c) \mapsto \frac{1}{r}\left(\begin{vmatrix} a & c \\ p & r \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b & c \\ q & r \end{vmatrix} \right) \in E_2$$

(注) $E_2 = \{(a, b, 0)\}$ の点を (a, b) と同一視した。

平行射影

$\pi : E_3 \to E_2$: 平行射影で図形はどう変化するか？

1. 平行直線 $\to$ 平行直線　平行四辺形 $\to$ 任意の平行四辺形

平行射影

$\pi : E_3 \to E_2$: 平行射影で図形はどう変化するか？

1. 平行直線 $\to$ 平行直線　平行四辺形 $\to$ 任意の平行四辺形
2. 楕円 $\to$ 楕円　円 $\to$ 楕円　放物線 $\to$ 放物線　双曲線 $\to$ 双曲線

平行射影

π : $E_3 \to E_2$: 平行射影で図形はどう変化するか？

1. 平行直線 $\to$ 平行直線　平行四辺形 $\to$ 任意の平行四辺形
2. 楕円 $\to$ 楕円　円 $\to$ 楕円　放物線 $\to$ 放物線　双曲線 $\to$ 双曲線
3. 三角形 $\to$ 三角形　正三角形 $\to$ 任意の三角形

平行射影

$\pi : E_3 \to E_2$: 平行射影で図形はどう変化するか？

1. 平行直線 $\to$ 平行直線　平行四辺形 $\to$ 任意の平行四辺形
2. 楕円 $\to$ 楕円　円 $\to$ 楕円　放物線 $\to$ 放物線　双曲線 $\to$ 双曲線
3. 三角形 $\to$ 三角形　正三角形 $\to$ 任意の三角形
4. 交点 $\to$ 交点　接点 $\to$ 接点　接線 $\to$ 接線

平行射影

$\pi : E_3 \to E_2$: 平行射影で図形はどう変化するか？

1. 平行直線 $\to$ 平行直線　平行四辺形 $\to$ 任意の平行四辺形
2. 楕円 $\to$ 楕円　円 $\to$ 楕円　放物線 $\to$ 放物線　双曲線 $\to$ 双曲線
3. 三角形 $\to$ 三角形　正三角形 $\to$ 任意の三角形
4. 交点 $\to$ 交点　接点 $\to$ 接点　接線 $\to$ 接線
5. 線分の<u>内分比は保存される</u>

平行射影

$\pi : E_3 \to E_2$: 平行射影で図形はどう変化するか？

1. 平行直線 $\to$ 平行直線　平行四辺形 $\to$ 任意の平行四辺形
2. 楕円 $\to$ 楕円　円 $\to$ 楕円　放物線 $\to$ 放物線　双曲線 $\to$ 双曲線
3. 三角形 $\to$ 三角形　正三角形 $\to$ 任意の三角形
4. 交点 $\to$ 交点　接点 $\to$ 接点　接線 $\to$ 接線
5. 線分の内分比は保存される

- 平行射影を何回か繰り返す $\Longrightarrow$ アフィン変換

平行射影

$\pi : E_3 \to E_2$: 平行射影で図形はどう変化するか？

1. 平行直線 $\to$ 平行直線　平行四辺形 $\to$ 任意の平行四辺形
2. 楕円 $\to$ 楕円　円 $\to$ 楕円　放物線 $\to$ 放物線　双曲線 $\to$ 双曲線
3. 三角形 $\to$ 三角形　正三角形 $\to$ 任意の三角形
4. 交点 $\to$ 交点　接点 $\to$ 接点　接線 $\to$ 接線
5. 線分の内分比は保存される

- 平行射影を何回か繰り返す $\Longrightarrow$ アフィン変換

Theorem

アフィン変換によって

1. 任意の二つの三角形 T_1, T_2 は $T_1 \to T_2$ と写すことができる。

平行射影

$\pi : E_3 \to E_2$: 平行射影で図形はどう変化するか？

1. 平行直線 → 平行直線　平行四辺形 → 任意の平行四辺形
2. 楕円 → 楕円　円 → 楕円　放物線 → 放物線　双曲線 → 双曲線
3. 三角形 → 三角形　正三角形 → 任意の三角形
4. 交点 → 交点　接点 → 接点　接線 → 接線
5. 線分の内分比は保存される

- 平行射影を何回か繰り返す $\Longrightarrow$ アフィン変換

Theorem

アフィン変換によって

1. 任意の二つの三角形 T_1, T_2 は $T_1 \to T_2$ と写すことができる。
2. 任意の楕円 $\mathcal{E}$ は円 C に写すことができる。

アフィン変換

平行射影を何回か繰り返す $\Longrightarrow$ <u>アフィン変換</u>

式で書くと：$(x, y) \mapsto (X, Y)$

$$\begin{cases} X = ax + by + u \\ Y = cx + dy + v \end{cases} \quad (ad - bc \neq 0 \text{ ：行列式!})$$

アフィン変換

平行射影を何回か繰り返す $\Longrightarrow$ アフィン変換

式で書くと：$(x, y) \mapsto (X, Y)$

$$\begin{cases} X = ax + by + u \\ Y = cx + dy + v \end{cases} \quad (ad - bc \neq 0 \text{ ：行列式!})$$

アフィン変換の特徴

1. $\forall$ 三角形を正三角形に写す ($\forall$ 三角形を写しあう)

アフィン変換

平行射影を何回か繰り返す $\Longrightarrow$ アフィン変換

式で書くと：$(x, y) \mapsto (X, Y)$

$$\begin{cases} X = ax + by + u \\ Y = cx + dy + v \end{cases} \quad (ad - bc \neq 0 \text{ ：行列式!})$$

アフィン変換の特徴

1. $\forall$ 三角形を正三角形に写す ($\forall$ 三角形を写しあう)
2. $\forall$ 楕円を単位円に写す ($\forall$ 楕円を写しあう)

アフィン変換

平行射影を何回か繰り返す $\Longrightarrow$ アフィン変換

式で書くと：$(x, y) \mapsto (X, Y)$

$$\begin{cases} X = ax + by + u \\ Y = cx + dy + v \end{cases} \qquad (ad - bc \neq 0 \ \text{：行列式!})$$

アフィン変換の特徴

1. $\forall$ 三角形を正三角形に写す ($\forall$ 三角形を写しあう)
2. $\forall$ 楕円を単位円に写す ($\forall$ 楕円を写しあう)
3. $\forall$ 放物線を $y = x^2$ に写す ($\forall$ 放物線を写しあう)

アフィン変換

平行射影を何回か繰り返す $\Longrightarrow$ アフィン変換

式で書くと：$(x, y) \mapsto (X, Y)$

$$\begin{cases} X = ax + by + u \\ Y = cx + dy + v \end{cases} \quad (ad - bc \neq 0\ :\text{行列式!})$$

アフィン変換の特徴

1. $\forall$ 三角形を正三角形に写す ($\forall$ 三角形を写しあう)
2. $\forall$ 楕円を単位円に写す ($\forall$ 楕円を写しあう)
3. $\forall$ 放物線を $y = x^2$ に写す ($\forall$ 放物線を写しあう)
4. $\forall$ 双曲線を $xy = 1$ に写す ($\forall$ 双曲線を写しあう)

アフィン変換

平行射影を何回か繰り返す $\Longrightarrow$ アフィン変換

式で書くと：$(x, y) \mapsto (X, Y)$

$$\begin{cases} X = ax + by + u \\ Y = cx + dy + v \end{cases} \quad (ad - bc \neq 0 \text{ ：行列式!})$$

アフィン変換の特徴

1. $\forall$ 三角形を正三角形に写す ($\forall$ 三角形を写しあう)
2. $\forall$ 楕円を単位円に写す ($\forall$ 楕円を写しあう)
3. $\forall$ 放物線を $y = x^2$ に写す ($\forall$ 放物線を写しあう)
4. $\forall$ 双曲線を $xy = 1$ に写す ($\forall$ 双曲線を写しあう)
5. $\forall$ 平行四辺形を正方形に写す ($\forall$ 平行四辺形を写しあう)

アフィン変換

平行射影を何回か繰り返す $\Longrightarrow$ アフィン変換

式で書くと：$(x, y) \mapsto (X, Y)$

$$\begin{cases} X = ax + by + u \\ Y = cx + dy + v \end{cases} \quad (ad - bc \neq 0 \ : \text{行列式!})$$

アフィン変換の特徴

1. $\forall$ 三角形を正三角形に写す ($\forall$ 三角形を写しあう)
2. $\forall$ 楕円を単位円に写す ($\forall$ 楕円を写しあう)
3. $\forall$ 放物線を $y = x^2$ に写す ($\forall$ 放物線を写しあう)
4. $\forall$ 双曲線を $xy = 1$ に写す ($\forall$ 双曲線を写しあう)
5. $\forall$ 平行四辺形を正方形に写す ($\forall$ 平行四辺形を写しあう)
6. 三角形 (あるいは 3 点) の像によって変換が決まる

ガウスの内接楕円

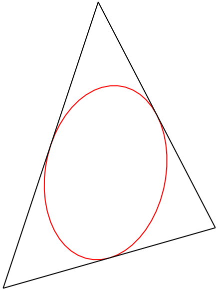
Theorem

三角形 $\triangle ABC$ の各辺の中点で内接する楕円がただ一つ存在する。

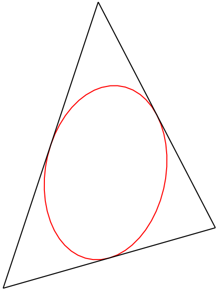
ガウスの内接楕円

Theorem

三角形 $\triangle ABC$ の各辺の中点で内接する楕円がただ一つ存在する。



ガウスの内接楕円



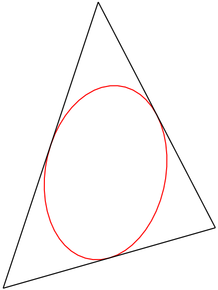
Theorem

三角形 $\triangle ABC$ の各辺の中点で内接する楕円がただ一つ存在する。

平行射影による証明

1. 正三角形 $\triangle PQR$ であって
$\pi : \triangle PQR \to \triangle ABC$ となる平行射影を取る

ガウスの内接楕円



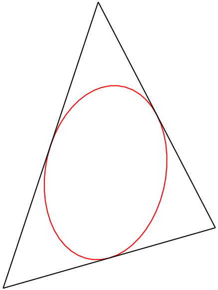
Theorem

三角形 $\triangle ABC$ の各辺の中点で内接する楕円がただ一つ存在する。

平行射影による証明

1. 正三角形 $\triangle PQR$ であって
   $\pi : \triangle PQR \to \triangle ABC$ となる平行射影を取る
2. 正三角形 $\triangle PQR$ の内接円 $\mathcal{C}$ $\cdots$ 各辺の中点で内接

ガウスの内接楕円



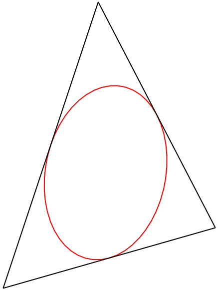
Theorem

三角形 $\triangle ABC$ の各辺の中点で内接する楕円がただ一つ存在する。

平行射影による証明

1. 正三角形 $\triangle PQR$ であって
   $\pi : \triangle PQR \to \triangle ABC$ となる平行射影を取る
2. 正三角形 $\triangle PQR$ の内接円 $\mathcal{C}$ $\cdots$ 各辺の中点で内接

ガウスの内接楕円



Theorem

三角形 $\triangle ABC$ の各辺の中点で内接する楕円がただ一つ存在する。

平行射影による証明

1. 正三角形 $\triangle PQR$ であって $\pi : \triangle PQR \to \triangle ABC$ となる平行射影を取る
2. 正三角形 $\triangle PQR$ の内接円 $\mathcal{C}$ $\cdots$ 各辺の中点で内接
3. $\mathcal{E} = \pi(\mathcal{C})$ 楕円で $\triangle ABC$ の各辺の中点に内接

発展

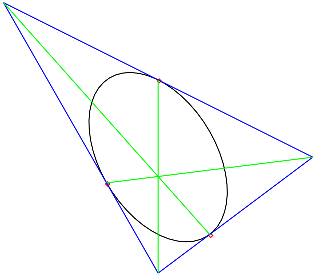
- 自分の定理を見つけてみる

発展

- 自分の定理を見つけてみる

Theorem

三角形 $\triangle ABC$ に内接する楕円の接点を $P \in AB, Q \in BC, R \in CA$ とするとき、3 直線 AQ, BR, CP は共点である。



アフィン幾何

平行射影で不変な幾何学的性質 $\Longrightarrow$ アフィン変換で不変

アフィン幾何

平行射影で不変な幾何学的性質 $\Longrightarrow$ アフィン変換で不変

アフィン幾何学

アフィン変換で不変な図形の性質の研究

アフィン幾何

平行射影で不変な幾何学的性質 $\Longrightarrow$ アフィン変換で不変

アフィン幾何学

アフィン変換で不変な図形の性質の研究

アフィン幾何で扱う図形の性質

1. 平行な直線群のなす図形 (平行四辺形)

アフィン幾何

平行射影で不変な幾何学的性質 $\Longrightarrow$ アフィン変換で不変

アフィン幾何学

アフィン変換で不変な図形の性質の研究

アフィン幾何で扱う図形の性質

1. 平行な直線群のなす図形 (平行四辺形)
2. 二次曲線と直線の交点・接点の数、共点・共線関係

アフィン幾何

平行射影で不変な幾何学的性質 $\Longrightarrow$ アフィン変換で不変

アフィン幾何学

アフィン変換で不変な図形の性質の研究

アフィン幾何で扱う図形の性質

1. 平行な直線群のなす図形 (平行四辺形)
2. 二次曲線と直線の交点・接点の数、共点・共線関係
3. 線分比や三角形の面積比に関する性質

アフィン幾何

平行射影で不変な幾何学的性質 $\Longrightarrow$ アフィン変換で不変

アフィン幾何学

アフィン変換で不変な図形の性質の研究

アフィン幾何で扱う図形の性質

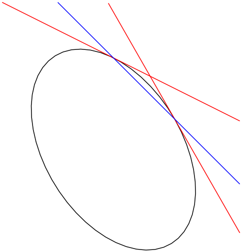
1. 平行な直線群のなす図形 (平行四辺形)
2. 二次曲線と直線の交点・接点の数、共点・共線関係
3. 線分比や三角形の面積比に関する性質

- アフィン幾何学で扱わないもの: 線分の長さや角度に関する性質

極線 polar line その 1

楕円 $\mathcal{E}$ に楕円外の一点 q から引いた二つの接線の接点 : t_1, t_2

$\implies$ $L(q)$: t_1, t_2 を通る直線



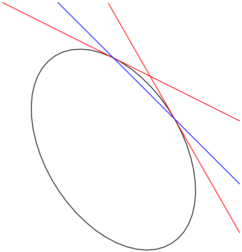
極線 polar line その 1

楕円 $\mathcal{E}$ に楕円外の一点 q から引いた二つの接線の接点 : t_1, t_2

$$\Longrightarrow \; L(q) : t_1, t_2 \text{ を通る直線}$$

Definition

$L(q)$: 楕円外の点 q に対する極線

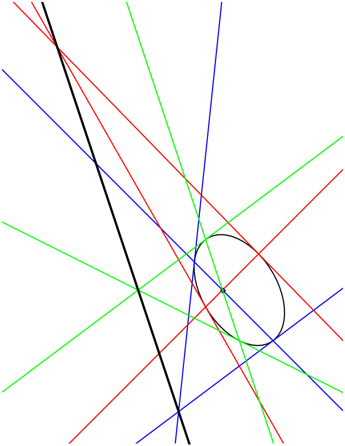


極線 その2

楕円内の点 p を通る直線 m と楕円との交点：t_1, t_2

$q(m)$：t_1, t_2 における楕円の 2 接線の交点

m を動かす $\Longrightarrow$ $q(m)$ は直線 $\ell(p)$ 上を動く

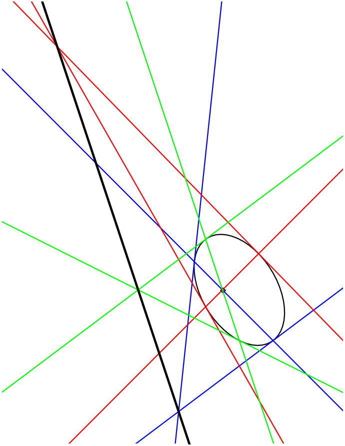


極線 その 2

楕円内の点 p を通る直線 m と楕円との交点：t_1, t_2

$q(m)$：t_1, t_2 における楕円の 2 接線の交点

m を動かす $\Longrightarrow$ $q(m)$ は直線 $\ell(p)$ 上を動く



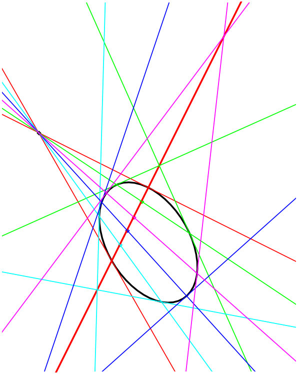
Definition

$\ell(p)$：楕円内の点 p に対する**極線**

Theorem

平面上の直線 ℓ :

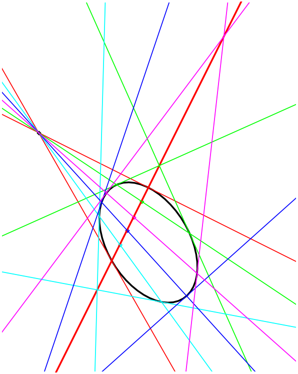
1. $\{L(q) \mid q \in \ell\}$ は共点



Theorem

平面上の直線 ℓ :

1. $\{L(q) \mid q \in \ell\}$ は共点
2. 共点を $p \implies \ell = \ell(p)$ は p における極線



第二部

射影幾何と無限遠点

一点からの射影

空間 E_3 内の一点 P に光源を置く

一点からの射影

空間 E_3 内の一点 P に光源を置く

$\pi : E_3 \setminus \{P\} \to E_2$: P から発する光線による射影

一点からの射影

空間 E_3 内の一点 P に光源を置く

$\pi : E_3 \setminus \{P\} \to E_2$: P から発する光線による射影

式で表わすと？

$P = (u, v, w)$ と $X = (a, b, c) \in E_3, \neq P$ を結んだ直線 PX (光線)

$\Longrightarrow$ 平面 E_2 と交わる点 $\cdots$ $\pi(X)$

直線 XP のパラメータ表示 : $t(u, v, w) + (1-t)(a, b, c)$ $(t \in \mathbb{R})$

$E_2 \iff (z$ 座標$) = 0 \quad \therefore \quad tw + (1-t)c = 0, \quad t = c/(c-w)$

$$\therefore \quad \pi(X) = (a + \frac{ac - uc}{w - c}, b + \frac{bc - vc}{w - c}, 0)$$

$$= (\frac{aw - uc}{w - c}, \frac{bw - vc}{w - c}, 0) = \frac{1}{w - c}(\begin{vmatrix} a & c \\ u & w \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b & c \\ v & w \end{vmatrix}, 0)$$

射影不可能な点

点射影を座標で書き表す

$$\pi(a, b, c) = \frac{1}{w - c}\left(\begin{vmatrix} a & c \\ u & w \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b & c \\ v & w \end{vmatrix} \right)$$

射影不可能な点

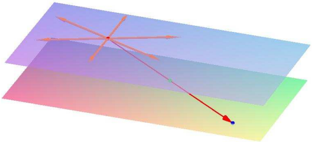
点射影を座標で書き表す

$$\pi(a,b,c) = \frac{1}{w-c}\left(\begin{vmatrix} a & c \\ u & w \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b & c \\ v & w \end{vmatrix}\right)$$

$\Longrightarrow$ $w = c$ の時には定義できない (分母がゼロになってしまう！)

$w = c$ を満たす点 $(a,b,c)\cdots$

P を通り、$E_2 = (xy$ 平面) と平行な平面上の点



射影不可能な点

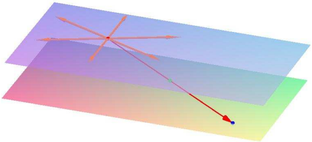
点射影を座標で書き表す

$$\pi(a,b,c) = \frac{1}{w-c}\left(\begin{vmatrix} a & c \\ u & w \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b & c \\ v & w \end{vmatrix} \right)$$

$\Longrightarrow$ $w = c$ の時には定義できない (分母がゼロになってしまう！)

$w = c$ を満たす点 $(a,b,c)\cdots$

P を通り、$E_2 = (xy$ 平面) と平行な平面上の点



- 以下 $P = (0,0,1)$ からの射影を考える

$$\pi : E_3 \dashrightarrow E_2, \qquad \pi(a,b,c) = \frac{1}{1-c}(a,b)$$

無限に伸びる影

いろいろな円の射影

1. 円：$a = 1,\ b^2 + c^2 = 1$　($c = 1$ に接する場合)

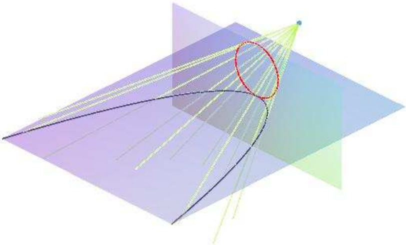
無限に伸びる影

いろいろな円の射影

1. 円 : $a = 1,\ b^2 + c^2 = 1$　($c = 1$ に接する場合)

$$(x, y) = \frac{1}{1-c}(a, b) = \frac{1}{1-c}(1, b) \implies (b, c) = \frac{1}{x}(y, x-1)$$

$$(y/x)^2 + ((x-1)/x)^2 = 1, \quad \therefore\ y^2 = 2x - 1 : \text{放物線}$$



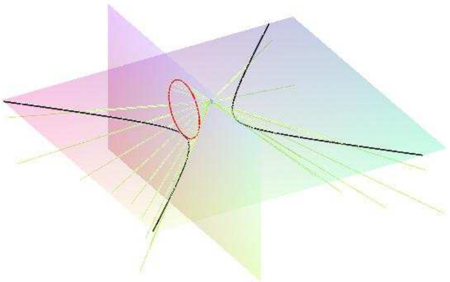
いろいろな円の射影

2. 円：$a = 1,\ b^2 + (c-1)^2 = 1$ （$c = 1$ と 2 点で交わる場合）

いろいろな円の射影

2. 円：$a = 1,\ b^2 + (c-1)^2 = 1 \quad (c = 1$ と 2 点で交わる場合)

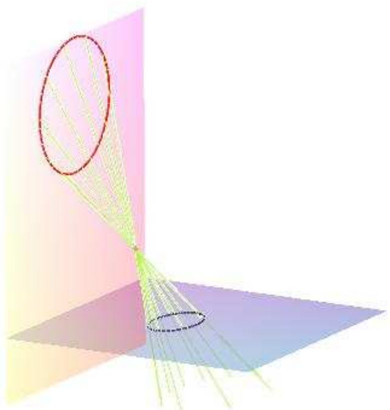
   上の計算と同様にして　$x^2 - y^2 = 1$：双曲線



いろいろな円の射影

3. 円：$a = 1,\ b^2 + (c-3)^2 = 1$　($c = 1$ と交わらない場合)

$$3(x + \frac{2}{3})^2 + y^2 = \frac{1}{3}$$ ：楕円



平行直線は無限遠で交わる

平行直線は無限遠で交わる

- 点射影による直線の像

直線の方程式：$px + qy = r$

平行直線は無限遠で交わる

点射影による直線の像

直線の方程式：$px + qy = r$

点射影 $\pi : (a, b, c) \to (x, y) = \dfrac{1}{1-c}(a, b)$ で引き戻す:

$$p\frac{a}{1-c} + q\frac{b}{1-c} = r, \quad pa + qb = r(1-c),$$

$$\therefore \quad pa + qb + rc = r \qquad : \text{平面の方程式}$$

$$\xrightarrow{a=1\ \text{で切る}} \quad qb + rc = r - p \qquad : \text{直線の方程式 (変数は } b, c\text{)}$$

平行直線は無限遠で交わる

点射影による直線の像

直線の方程式：$px + qy = r$

点射影 $\pi : (a, b, c) \to (x, y) = \dfrac{1}{1-c}(a, b)$ で引き戻す:

$$p\frac{a}{1-c} + q\frac{b}{1-c} = r, \quad pa + qb = r(1-c),$$

$$\therefore \quad pa + qb + rc = r \qquad : \text{平面の方程式}$$

$$\xrightarrow{a=1\ \text{で切る}} \quad qb + rc = r - p \qquad : \text{直線の方程式 (変数は } b, c)$$

平行な 2 直線：$\begin{cases} px + qy = r \\ px + qy = R \end{cases} \xrightarrow{\text{引き戻す}} \begin{cases} qb + rc = r - p, \\ qb + Rc = R - p \end{cases}$

これは　$(b, c) = (-\dfrac{q}{p}, 1)$　において交わる！

直線のパラメータ表示

点 (x_0, y_0) を通り、方向が (u, v) の直線

$$(x, y) = (x_0, y_0) + t(u, v) \qquad (t \in \mathbb{R} : \text{パラメータ})$$

直線のパラメータ表示

点 (x_0, y_0) を通り、方向が (u, v) の直線

$$(x, y) = (x_0, y_0) + t(u, v) \qquad (t \in \mathbb{R}: \text{パラメータ})$$

点射影で引き戻す:

$$\begin{aligned}(1, b, c) &= (1, \frac{y}{x}, \frac{x-1}{x}) \\ &= (1, \frac{y_0 + tu}{x_0 + tv}, \frac{x_0 + tv - 1}{x_0 + tv}) \to (1, \frac{u}{v}, 1) \quad (t \to \pm\infty)\end{aligned}$$

直線のパラメータ表示

点 (x_0, y_0) を通り、方向が (u, v) の直線

$$(x, y) = (x_0, y_0) + t(u, v) \qquad (t \in \mathbb{R} : \text{パラメータ})$$

点射影で引き戻す:

$$(1, b, c) = (1, \frac{y}{x}, \frac{x-1}{x})$$

$$= (1, \frac{y_0 + tu}{x_0 + tv}, \frac{x_0 + tv - 1}{x_0 + tv}) \to (1, \frac{u}{v}, 1) \quad (t \to \pm\infty)$$

無限遠点

無限遠 $t \to \pm\infty$ においては、$(u/v, 1)$ に**収束する** $\cdots$ **無限遠点**

$(v \neq 0,$　通過する点 (x_0, y_0) (初期点) には無関係)

$(u/v, 1)$ は射影できない点であることに注意

直線のパラメータ表示

点 (x_0, y_0) を通り、方向が (u, v) の直線

$$(x, y) = (x_0, y_0) + t(u, v) \qquad (t \in \mathbb{R} :\ \text{パラメータ})$$

点射影で引き戻す:

$$\begin{aligned}(1, b, c) &= (1, \frac{y}{x}, \frac{x-1}{x}) \\ &= (1, \frac{y_0 + tu}{x_0 + tv}, \frac{x_0 + tv - 1}{x_0 + tv}) \to (1, \frac{u}{v}, 1) \quad (t \to \pm\infty)\end{aligned}$$

無限遠点

無限遠 $t \to \pm\infty$ においては、$(u/v, 1)$ に**収束する** $\cdots$ **無限遠点**

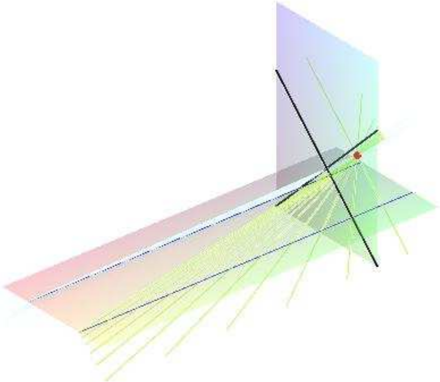
$(v \neq 0,$　通過する点 (x_0, y_0) (初期点) には無関係)

$(u/v, 1)$ は射影できない点であることに注意

$\Longrightarrow$ 平行な直線はすべて一点 (無限遠点) で交わる

無限遠点と無限遠直線

1. 2 本の直線は一点で交わる



無限遠点と無限遠直線

1. 2 本の直線は一点で交わる
2. $$\text{交点} = \begin{cases} \text{平行でないなら有限の点} \\ \text{平行なら無限遠点} \end{cases}$$

無限遠点と無限遠直線

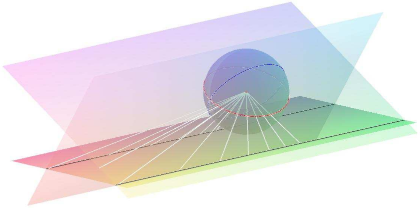
1. 2 本の直線は一点で交わる
2. $$交点 = \begin{cases} 平行でないなら有限の点 \\ 平行なら無限遠点 \end{cases}$$
3. 無限遠点の全体は一本の直線をなす $\cdots$ 無限遠直線

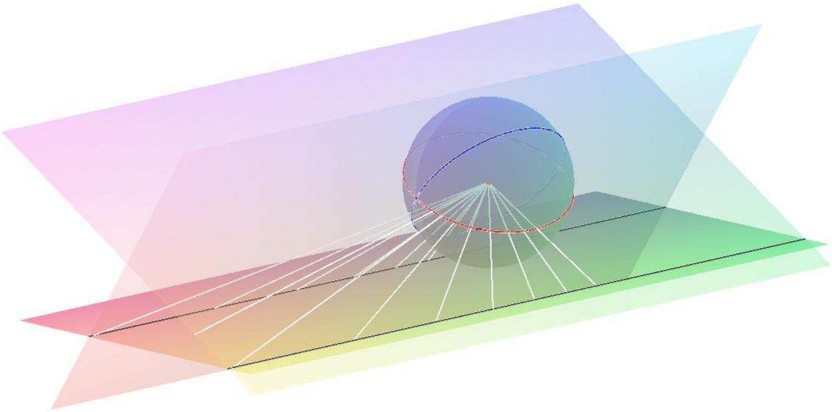
無限遠点と無限遠直線

1. 2 本の直線は一点で交わる
2. 交点 $= \begin{cases} \text{平行でないなら有限の点} \\ \text{平行なら無限遠点} \end{cases}$
3. 無限遠点の全体は一本の直線をなす $\cdots$ 無限遠直線
4. 放物線は無限遠直線に接する
5. 双曲線は無限遠直線と 2 点で交わる

無限遠点と無限遠直線

1. 2 本の直線は一点で交わる
2. 交点 $= \begin{cases} \text{平行でないなら有限の点} \\ \text{平行なら無限遠点} \end{cases}$
3. 無限遠点の全体は一本の直線をなす $\cdots$ 無限遠直線
4. 放物線は無限遠直線に接する
5. 双曲線は無限遠直線と 2 点で交わる
6. 立体射影を利用した球面モデルで考えるとわかりやすい





平面	球面
直線	大円

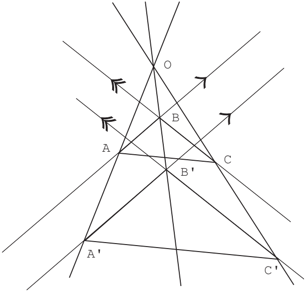
赤道上の点が無限遠点

応用: デザルグの定理ほか

Theorem (デザルグの定理:無限遠版)

$\triangle ABC$ と $\triangle A'B'C'$ において、3 直線 AA', BB', CC' が共点ならば交点 $AB \cap A'B', BC \cap B'C', CA \cap C'A'$ は共線である。

どこが変わったか



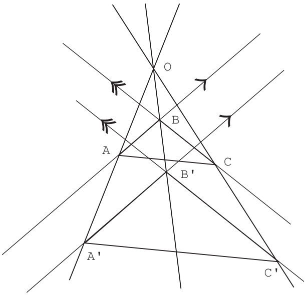
応用: デザルグの定理ほか

Theorem (デザルグの定理:無限遠版)

$\triangle ABC$ と $\triangle A'B'C'$ において、3 直線 AA', BB', CC' が共点ならば交点 $AB \cap A'B', BC \cap B'C', CA \cap C'A'$ は共線である。

どこが変わったか

1. 交点 $AB \cap A'B'$, が無限遠点
   $\Longrightarrow$ 2 直線は平行 : $AB /\!/ A'B'$



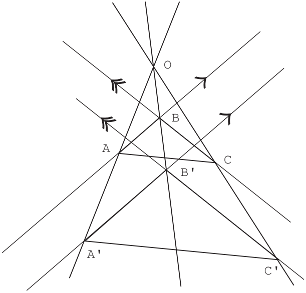
応用: デザルグの定理ほか

Theorem (デザルグの定理:無限遠版)

$\triangle ABC$ と $\triangle A'B'C'$ において、3 直線 AA', BB', CC' が共点ならば交点 $AB \cap A'B', BC \cap B'C', CA \cap C'A'$ は共線である。

どこが変わったか

1. 交点 $AB \cap A'B'$, が無限遠点
   $\Longrightarrow$ 2 直線は平行 : $AB /\!/ A'B'$
2. $AB /\!/ A'B', BC /\!/ B'C', CA /\!/ C'A'$:
   3 組の平行直線
   $\Longrightarrow$ 3 交点は無限遠直線を共線に持つ



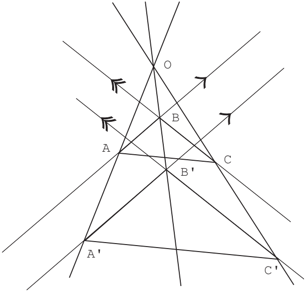
応用: デザルグの定理ほか

Theorem (デザルグの定理:無限遠版)

$\triangle ABC$ と $\triangle A'B'C'$ において、3 直線 AA', BB', CC' が共点ならば交点 $AB \cap A'B', BC \cap B'C', CA \cap C'A'$ は共線である。

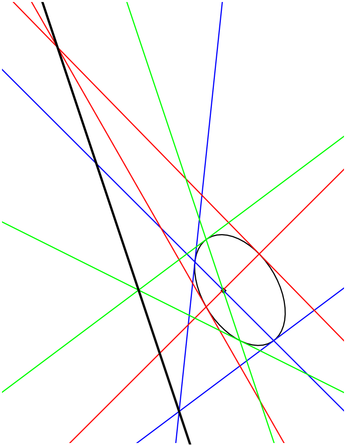
どこが変わったか

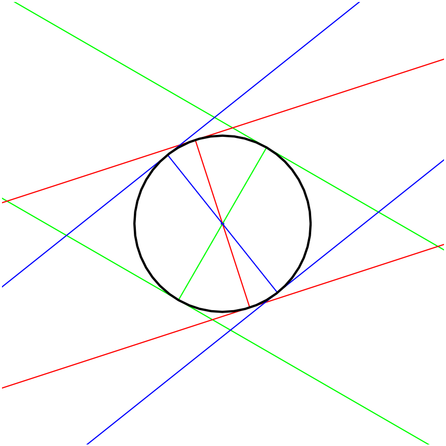
1. 交点 $AB \cap A'B'$, が無限遠点
   $\Longrightarrow$ 2 直線は平行 : $AB /\!/ A'B'$
2. $AB /\!/ A'B', BC /\!/ B'C', CA /\!/ C'A'$:
   3 組の平行直線
   $\Longrightarrow$ 3 交点は無限遠直線を共線に持つ
3. 3 直線 AA', BB', CC' が共点 $\cdots$
   無限遠点の場合は『3 直線が平行』



楕円の極線

極点が楕円の中心部にあるとき、極線は無限遠直線

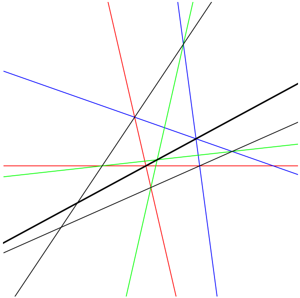




応用: パップスの定理

Theorem

平面上の 2 直線 ℓ_i $(i = 1, 2)$

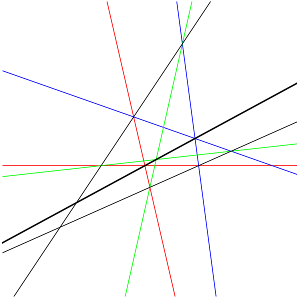


応用: パップスの定理

Theorem

平面上の 2 直線 ℓ_i $(i = 1, 2)$

ℓ_i 上に点 A_i, B_i, C_i がこの順に並んでいる

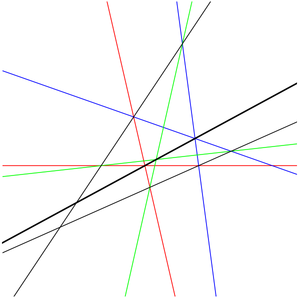


応用: パップスの定理

Theorem

平面上の 2 直線 ℓ_i $(i = 1, 2)$
ℓ_i 上に点 A_i, B_i, C_i がこの順に並んでいる
直線の交点：

$$\mathrm{A}_1\mathrm{B}_2 \cap \mathrm{A}_2\mathrm{B}_1 = \mathrm{P}_1, \quad \mathrm{B}_1\mathrm{C}_2 \cap \mathrm{B}_2\mathrm{C}_1 = \mathrm{P}_2, \quad \mathrm{C}_1\mathrm{A}_2 \cap \mathrm{C}_2\mathrm{A}_1 = \mathrm{P}_3,$$



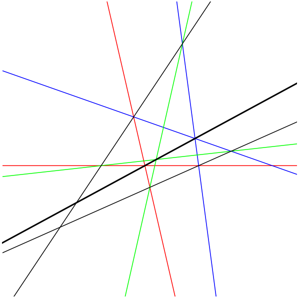
応用: パップスの定理

Theorem

平面上の 2 直線 ℓ_i $(i=1,2)$
ℓ_i 上に点 A_i, B_i, C_i がこの順に並んでいる
直線の交点：

$$\mathrm{A}_1\mathrm{B}_2 \cap \mathrm{A}_2\mathrm{B}_1 = \mathrm{P}_1, \quad \mathrm{B}_1\mathrm{C}_2 \cap \mathrm{B}_2\mathrm{C}_1 = \mathrm{P}_2, \quad \mathrm{C}_1\mathrm{A}_2 \cap \mathrm{C}_2\mathrm{A}_1 = \mathrm{P}_3,$$

$\Longrightarrow$ 3 点 P_1, P_2, P_3 は共線



応用: パップスの定理

Theorem

平面上の 2 直線 ℓ_i $(i = 1, 2)$

ℓ_i 上に点 A_i, B_i, C_i がこの順に並んでいる

直線の交点：

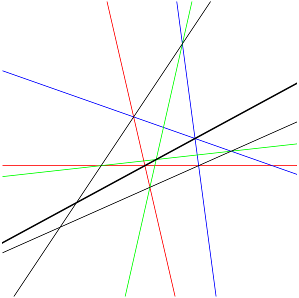
$$\mathrm{A}_1\mathrm{B}_2 \cap \mathrm{A}_2\mathrm{B}_1 = \mathrm{P}_1, \quad \mathrm{B}_1\mathrm{C}_2 \cap \mathrm{B}_2\mathrm{C}_1 = \mathrm{P}_2, \quad \mathrm{C}_1\mathrm{A}_2 \cap \mathrm{C}_2\mathrm{A}_1 = \mathrm{P}_3,$$

$\Longrightarrow$ 3 点 P_1, P_2, P_3 は共線

ポイント

パップスの定理に現れる幾何学的性質

$\cdots$ 直線・交点・共線関係のみ



応用: パップスの定理

Theorem

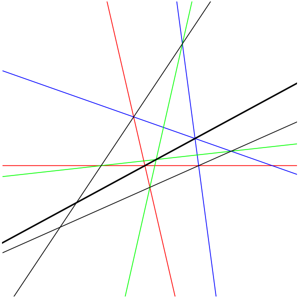
平面上の 2 直線 ℓ_i $(i = 1, 2)$
ℓ_i 上に点 A_i, B_i, C_i がこの順に並んでいる
直線の交点：

$$\mathrm{A_1B_2} \cap \mathrm{A_2B_1} = \mathrm{P_1}, \quad \mathrm{B_1C_2} \cap \mathrm{B_2C_1} = \mathrm{P_2}, \quad \mathrm{C_1A_2} \cap \mathrm{C_2A_1} = \mathrm{P_3},$$

$\Longrightarrow$ 3 点 $\mathrm{P_1}$, $\mathrm{P_2}$, $\mathrm{P_3}$ は共線

ポイント

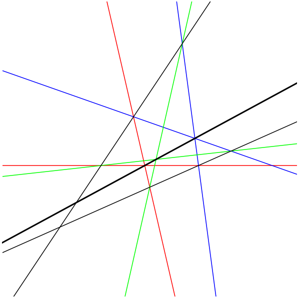
パップスの定理に現れる幾何学的性質
… 直線・交点・共線関係のみ
$\Longrightarrow$ 射影幾何学の定理
(射影によって変わらない)

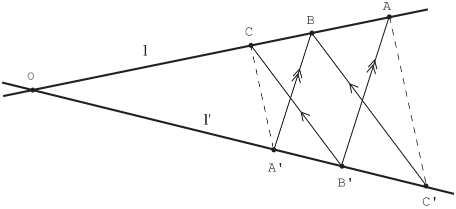


応用: パップスの定理

証明のアイディア

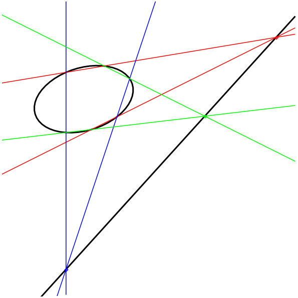
1. 2 直線の交点を点射影によって無限遠点に飛ばす
2. 2 本の直線は平行として一般性を失わない！





Theorem (パスカルの定理)

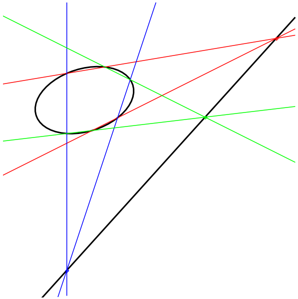
楕円に内接する 6 角形の 3 組の対辺の交点は共線である



Theorem (パスカルの定理)

楕円に内接する 6 角形の 3 組の対辺の交点は共線である

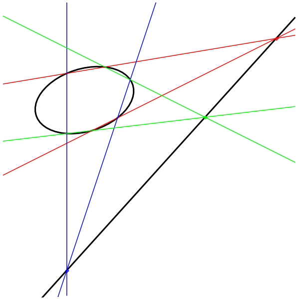
1. 射影変換で、共線を無限遠直線に写す ⋯ 3 組の対辺は平行



Theorem (パスカルの定理)

楕円に内接する 6 角形の 3 組の対辺の交点は共線である

1. 射影変換で、共線を無限遠直線に写す ··· 3 組の対辺は平行
2. アフィン変換で、楕円を円に写すと ··· 平行な直線はそのまま



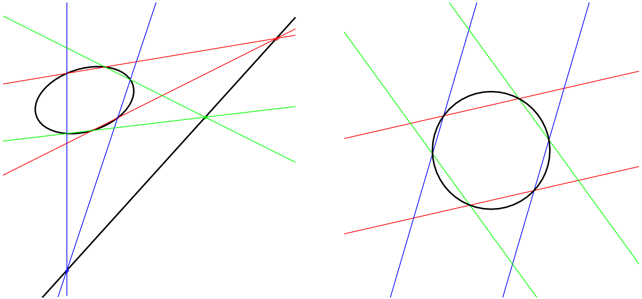
Theorem (パスカルの定理)

楕円に内接する 6 角形の 3 組の対辺の交点は共線である

1. 射影変換で、共線を無限遠直線に写す ⋯ 3 組の対辺は平行
2. アフィン変換で、楕円を円に写すと ⋯ 平行な直線はそのまま

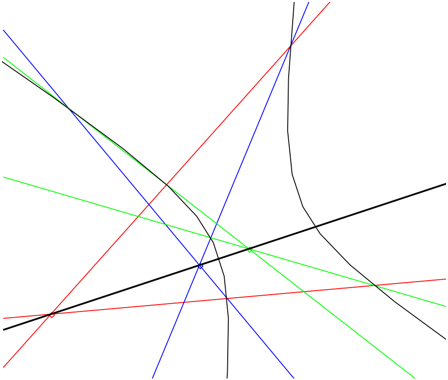
Theorem (パスカルの定理:無限遠直線版)

円に内接する 6 角形の 2 組の対辺が平行 $\Longrightarrow$ 残りの対辺も平行



一般化：楕円 → 放物線、双曲線

放物線または双曲線上の 6 点 P_i $(i = 1, \ldots, 6)$ が与えられたとき
3 交点：$A = P_1P_2 \cap P_4P_5$, $B = P_2P_3 \cap P_5P_6$, $C = P_3P_4 \cap P_6P_1$
は共線である



まとめ

本日のモラル

まとめ

本日のモラル

1. 図形を射影で写すことでさまざまな図形が現れる

まとめ

本日のモラル

1. 図形を射影で写すことでさまざまな図形が現れる

   例: 円 $\rightarrow$ 放物線、双曲線、楕円

まとめ

本日のモラル

1. 図形を射影で写すことでさまざまな図形が現れる

   例: 円 $\rightarrow$ 放物線、双曲線、楕円

2. 図形を高次元化すると簡単になる

まとめ

本日のモラル

1. 図形を射影で写すことでさまざまな図形が現れる

   例: 円 $\rightarrow$ 放物線、双曲線、楕円

2. 図形を高次元化すると簡単になる

   例: 空間版のデザルグの定理・3 円の共通接線定理

まとめ

本日のモラル

1. 図形を射影で写すことでさまざまな図形が現れる

   例: 円 → 放物線、双曲線、楕円

2. 図形を高次元化すると簡単になる

   例: 空間版のデザルグの定理・3 円の共通接線定理

3. 基本的な図形 (円や正三角形) を使って、

   高度な定理を予測・創出できる

まとめ

本日のモラル

1. 図形を射影で写すことでさまざまな図形が現れる

   例: 円 → 放物線、双曲線、楕円

2. 図形を高次元化すると簡単になる

   例: 空間版のデザルグの定理・3 円の共通接線定理

3. 基本的な図形 (円や正三角形) を使って、
   高度な定理を予測・創出できる

   例: ガウスの内接円・パスカルの定理など

まとめ

本日のモラル

1. 図形を射影で写すことでさまざまな図形が現れる

   例: 円 → 放物線、双曲線、楕円

2. 図形を高次元化すると簡単になる

   例: 空間版のデザルグの定理・3 円の共通接線定理

3. 基本的な図形 (円や正三角形) を使って、
   高度な定理を予測・創出できる

   例: ガウスの内接円・パスカルの定理など

4. 幾何学 · · · 変換によって変わらない性質を研究する学問

Thank you for your attention!