旗多様体上の軌道と表現

Orbits on Flag Varieties and Representation Theory: An Overview

Thanks to all joint researchers

Kyo Nishiyama (西山 享)
AGU (青山学院大学理工)

2025 日本数学会秋季総合分科会
2025 年 9 月 18 日 (木)
名古屋大学東山キャンパス

Abstract

旗多様体について基礎的な性質や事項を紹介した後，旗多様体と表現論や組合せ論との関わりについて概観する．後半では，近年研究を進めている二重旗多様体について得られた成果を報告する．

二重旗多様体の研究は，落合啓之氏との共著論文 (2011) によって始まったものである．

はじめての旗多様体: Flag variety/ Flag manifold

旗多様体 (flag variety/ flag manifold) は表現論のいたるところに現れる

基本事項を手短にまとめておこう．以下，複素数体 $\mathbb{C}$ (または $\mathbb{R}$) 上で考える．

G: 連結簡約代数群 $/\mathbb{C}$ (connected reductive alg grp)

Example

$G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), \mathrm{SL}_n(\mathbb{C}), \mathrm{SO}_n(\mathbb{C}), \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C})$ (古典群)，例外型群

Definition

旗多様体 $X =$ 簡約代数群の等質空間 & 射影多様体 (flag variety/manifold)

$X = G/P \quad$ (P: 放物型部分群 (psg = parabolic subgroup))

たとえば $(n-1)$ 次元の射影空間 $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C}) = \mathbb{P}(\mathbb{C}^n)$ は旗多様体の一種である．

Remark

旗多様体 = 完全旗多様体のことが多い．上の定義は部分旗多様体．

例: Projective space and Grassmannians

$G \curvearrowright V = \mathbb{C}^n \rightsquigarrow$ 射影空間 $\mathbb{P}(V)$ 上の推移的な作用

Example (射影空間 $\mathbb{P}(V)$/ projective space)

$E_1 = \langle \boldsymbol{e}_1 \rangle$ の固定部分群 ($\boldsymbol{e}_1$: 基本ベクトル):

$$\mathrm{Stab}_G(E_1) = P_{(1,n-1)} = \left\{ g = \begin{pmatrix} a & * \\ 0 & b \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \,\middle|\, a \in \mathbb{C}^\times, b \in \mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{C}) \right\}$$

$\therefore \quad \mathbb{P}(V) \simeq \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})/P_{(1,n-1)}$: 射影空間はコンパクト等質多様体 $=$ 旗多様体

Example (Grassmann 多様体 $\mathrm{Gr}_d(V)$/ Grassmannian)

Grassmann 多様体: $\mathrm{Gr}_d(V) = \{ V = \mathbb{C}^n$ の d 次元部分空間の全体 $\}$

$$\simeq \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})/P_{(d,n-d)}$$

$P_{(d,n-d)} \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$: ブロックが $d, (n-d)$ のブロック上半三角行列全体

Complete flag variety

$\mathrm{GL}(V) \curvearrowright$ 種々の部分空間 $\rightsquigarrow$ 部分空間の「配置空間」に $\mathrm{GL}(V)$ の作用

Definition (旗/ flag)

旗 = 部分空間の増大列: $V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_k \subset \cdots \subset V_n = V$; $\dim V_k = k$
旗の全体 $\cdots$ $X = \mathscr{F}\ell(\mathbb{C}^n)$: 完全旗多様体 (complete FV)

射影空間・Grassmann 多様体 $\cdots$ 完全旗の一部分を抜きだしたもの
$\rightsquigarrow$ 部分旗多様体 (partial flag variety)

標準基底で生成された旗 $E = (E_k)_{k=0}^n, E_k = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_k\}$: 標準旗

- $\mathscr{F}\ell(V) = G \cdot E$: G の作用は推移的
- $\mathrm{Stab}_G(E) = B = B_n(\mathbb{C})$: 固定部分群は Borel 部分群 (上半三角行列群)

$$\mathscr{F}\ell(V) \simeq \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})/B_n(\mathbb{C})$$

$B_n(\mathbb{C}) \subset P_{\mathbb{C}}$ $\rightsquigarrow$ $X = \mathscr{F}\ell(V) \twoheadrightarrow G_{\mathbb{C}}/P_{\mathbb{C}}$: (partial) flag variety
$P_{\mathbb{C}}$: 放物型部分群 (parabolic subgroup)

More general flag varieties

以上紹介したのは A 型の旗多様体 ($G_{\mathbb{C}} = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$) $\cdots$ 一般には?

Definition

- $B_{\mathbb{C}} \subset G_{\mathbb{C}}$: 極大な連結可解部分群 を Borel 部分群という (Borel subgrp)
- $B_{\mathbb{C}} \subset P_{\mathbb{C}}$: 放物型部分群 (parabolic subgrp = psg)

Definition

$\forall$ 連結な簡約代数群 $G_{\mathbb{C}}$, $B_{\mathbb{C}}$: Borel 部分群 $\Longrightarrow$

- $X = G_{\mathbb{C}}/B_{\mathbb{C}}$: 完全旗多様体 complete flag variety (projective variety)
- $G_{\mathbb{C}}/P_{\mathbb{C}}$: 部分旗多様体 partial flag variety ($B_{\mathbb{C}} \subset P_{\mathbb{C}}$: parabolic subgrp = psg)

Example (等方的部分空間の旗多様体)

$G_{\mathbb{C}} = \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C})$ or $\mathrm{SO}_n(\mathbb{C})$ $\rightsquigarrow$ $G_{\mathbb{C}}/B_{\mathbb{C}} = \{$complete flags of isotropic subsp$\}$

簡約代数群とその部分群，実形

以下，$G_{\mathbb{C}}$ は常に連結な複素簡約代数群と仮定　$G_{\mathbb{R}} \subset G_{\mathbb{C}}$: $G_{\mathbb{C}}$ の実形
(多くの場合，一般線型群 $G_{\mathbb{C}} = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ を考える)

Example ($G_{\mathbb{C}} = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ の非コンパクト実形)

- $G_{\mathbb{R}} = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ や $\mathrm{U}(p, q)$ $(n = p + q)$ (不定値ユニタリ群)
- $n = 2m$ が偶数 $\rightsquigarrow$ $G_{\mathbb{R}} = \mathrm{GL}_m(\mathbb{H})$ （四元数体 $\mathbb{H}$ 上の一般線型群）
- これらは一般に非コンパクト，非連結な実リー群

$K_{\mathbb{R}} \subset G_{\mathbb{R}}$: 極大コンパクト部分群 $\rightsquigarrow$ 複素化 $\rightsquigarrow$ $K_{\mathbb{C}} \subset G_{\mathbb{C}}$

$G_{\mathbb{C}}$	$G_{\mathbb{R}}$	$K_{\mathbb{R}}$	$K_{\mathbb{C}}$	condition
$\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$	$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$	$\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$	$\mathrm{O}_n(\mathbb{C})$	
	$\mathrm{U}(p, q)$	$\mathrm{U}(p)\times\mathrm{U}(q)$	$\mathrm{GL}_p(\mathbb{C})\times\mathrm{GL}_q(\mathbb{C})$	$n = p+q$
	$\mathrm{GL}_m(\mathbb{H})$	$\mathrm{USp}(2m)$	$\mathrm{Sp}_{2m}(\mathbb{C})$	$n = 2m$
$\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C})$	$\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})$	$\mathrm{U}(n)$	$\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$	
	$\mathrm{Sp}(2p, 2q)$	$\mathrm{USp}(2p)\times\mathrm{USp}(2q)$	$\mathrm{Sp}_{2p}(\mathbb{C})\times\mathrm{Sp}_{2q}(\mathbb{C})$	$n = p+q$
$\mathrm{SO}_n(\mathbb{C})$	$\mathrm{SO}(p, q)$	$S(\mathrm{O}(p)\times\mathrm{O}(q))$	$S(\mathrm{O}_p(\mathbb{C})\times\mathrm{O}_q(\mathbb{C}))$	$n = p+q$
	$\mathrm{SO}^*(2m)$	$\mathrm{U}(m)$	$\mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$	$n = 2m$

対称対と対称空間/ symmetric spaces

$G_{\mathbb{R}}$ の **Cartan** 対合 (Cartan involution) を θ と表すと，

- 極大コンパクト部分群 $K_{\mathbb{R}} = G_{\mathbb{R}}^{\theta}$ はその固定点部分群であって，
- $G_{\mathbb{R}}/K_{\mathbb{R}}$ は (擬) リーマン対称空間 [堀田良 19]．

Definition (対称対/ symmetric pair)

θ: 対称性を表す位数 2 の自己同型

- 複素化 $K_{\mathbb{C}} = G_{\mathbb{C}}^{\theta}$: $G_{\mathbb{C}}$ の対称部分群 (symmetric subgroup)
- $(G_{\mathbb{R}}, K_{\mathbb{R}})$ や $(G_{\mathbb{C}}, K_{\mathbb{C}})$ を対称対 (symmetric pair) と呼ぶ．

Example (エルミート対称空間 (Hermitian symmetric pairs))

- $G_{\mathbb{R}}/K_{\mathbb{R}} = \mathrm{U}(p,q)/\mathrm{U}(p)\times\mathrm{U}(q)$
- $G_{\mathbb{R}}/K_{\mathbb{R}} = \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R})/\mathrm{U}(n), \quad SO^*(2m)/\mathrm{U}(m)$
- $G_{\mathbb{R}}/K_{\mathbb{R}} = \mathrm{SO}(n,2)/S(\mathrm{O}(n)\times\mathrm{O}(2))$

旗多様体上の種々の軌道と有限性

旗多様体 $X = G_{\mathbb{C}}/B_{\mathbb{C}}$ 上への $G_{\mathbb{C}}$ の部分群の作用

1. Borel 部分群 $B_{\mathbb{C}}$
2. 対称部分群 $K_{\mathbb{C}}$
3. 極大トーラス $T_{\mathbb{C}} = (\mathbb{C}^{\times})^n$: ($G_{\mathbb{C}}$ の Cartan 部分群)
4. 実形 $G_{\mathbb{R}}$ (非コンパクト実リー群)

Borel 部分群の作用と Bruhat 分解

$X = G_{\mathbb{C}}/B_{\mathbb{C}}$ 上の $B_{\mathbb{C}}$ 軌道 $\leftrightarrow$ 両側剰余類分解

Theorem (Bruhat 分解)

$$X/B_{\mathbb{C}} \simeq B_{\mathbb{C}}\backslash G_{\mathbb{C}}/B_{\mathbb{C}} \simeq W_G$$

W_G: **Weyl 群**（有限 Coxeter 群）（[例]　$G_{\mathbb{C}} = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \quad \rightsquigarrow \quad W_G = S_n$: 対称群)

- W_G: $G_{\mathbb{C}}$ のリー環 $\mathfrak{g}$ のルート系より決まる鏡映群 (有限群)
- $W_G \simeq N_{G_{\mathbb{C}}}(T_{\mathbb{C}})/T_{\mathbb{C}}$，　$T_{\mathbb{C}} \subset B_{\mathbb{C}}$: 極大トーラス，　$N_{G_{\mathbb{C}}}(T_{\mathbb{C}})$: 正規化部分群

剰余類分解

$$G_{\mathbb{C}} = \bigsqcup_{w \in W_G} B_{\mathbb{C}} w B_{\mathbb{C}}, \qquad C_w := B_{\mathbb{C}} w B_{\mathbb{C}}/B_{\mathbb{C}}$$

$C_w = B_{\mathbb{C}} w B_{\mathbb{C}}/B_{\mathbb{C}}$ を **Bruhat 胞体 (Schubert 胞体)**

$\rightsquigarrow$ Schubert 解析，コホモロジー理論，Hecke 環，組合せ論

対称部分群 $K_{\mathbb{C}}$ による軌道の有限性

旗多様体 X 上の $K_{\mathbb{C}}$ 軌道 $X/K_{\mathbb{C}}$ の分類 $\cdots$ Richardson-Springer 他

1. $X/K_{\mathbb{C}} \simeq \bigsqcup_{T_i} W_{G_{\mathbb{C}}}(T_i)/W_{K_{\mathbb{C}}}(T_i)$

   $\{T_i\}_{i=1}^{\ell}$: θ 安定な極大トーラスの $K_{\mathbb{C}}$ 共役類

2. $X/K_{\mathbb{C}} \simeq (\tau(G_{\mathbb{C}}) \cap N_{G_{\mathbb{C}}}(T_{\mathbb{C}}))/T_{\mathbb{C}}$
   - $T_{\mathbb{C}}$: $G_{\mathbb{C}}$ の θ 安定極大トーラス
   - $\tau(G_{\mathbb{C}}) := \{x\theta(x^{-1}) \mid x \in G_{\mathbb{C}}\} \simeq G_{\mathbb{C}}/K_{\mathbb{C}}$
   - $N_{G_{\mathbb{C}}}(T_{\mathbb{C}})$ への $T_{\mathbb{C}}$ の作用は θ-twisted な作用 $g \cdot x = gx\theta(g^{-1})$
3. Weyl 群の θ-twisted involution w + π のファイバーの情報

   $$\pi : K_{\mathbb{C}}xB_{\mathbb{C}} \mapsto B_{\mathbb{C}}\theta(x)^{-1}xB_{\mathbb{C}} = B_{\mathbb{C}}wB_{\mathbb{C}}$$

4. 組合せ論的な $K_{\mathbb{C}}$ 軌道の分類 $\cdots$ 大島・松木の clan による分類
5. X の余接束 T^*X からのモーメント写像を用いる方法 ([CNT12])

   $\mathfrak{g}$ の冪零随伴軌道＋ Springer ファイバーを用いる

   冪零軌道の有限性＋ Springer ファイバーの有限性 $\Longrightarrow$ 軌道の有限性

$G_{\mathbb{R}}$ 軌道と松木対応

$G_{\mathbb{R}} \subset G_{\mathbb{C}}$: 実形 (real form)

Theorem (青本 (1966), Wolf (1969))

$X = G_{\mathbb{C}}/B_{\mathbb{C}}$ 上の $G_{\mathbb{R}}$ 軌道は有限である

対称部分群 $K_{\mathbb{C}}$ は $G_{\mathbb{R}}$ の極大コンパクト群の複素化
$\rightsquigarrow$ $K_{\mathbb{C}}$ 軌道と $G_{\mathbb{R}}$ 軌道の間には関係がある（だろう）

Theorem (松木対応 (1979))

旗多様体 $X = G_{\mathbb{C}}/B_{\mathbb{C}}$ 上の $K_{\mathbb{C}}$ 軌道と $G_{\mathbb{R}}$ 軌道の間に閉包関係を逆にする全単射対応が存在する．

$$\underline{\text{松木対応}}: \qquad K_{\mathbb{C}}\backslash G_{\mathbb{C}}/B_{\mathbb{C}} \xleftrightarrow{\sim} G_{\mathbb{R}}\backslash G_{\mathbb{C}}/B_{\mathbb{C}}$$

- $K_{\mathbb{C}}$ 軌道 $\mathbb{O} \longleftrightarrow G_{\mathbb{R}}$ 軌道 $\mathcal{O} \iff O = \mathbb{O} \cap \mathcal{O}$ がコンパクト
- さらに，共通部分 O は唯一つの $K_{\mathbb{R}}$ 軌道

Borel-Weil の定理と離散系列表現

有限次元正則表現

Borel & Weil: $X = G_{\mathbb{C}}/B_{\mathbb{C}}$ 上の直線束 $L \to X$ の切断を考えると G の $\forall$ 有限次元既約表現が得られる

Harish-Chandra, Kostant, Langlands:
非コンパクト群の無限次元ユニタリ表現へと BW の定理を一般化

$G_{\mathbb{R}}$: 非コンパクトな連結実簡約リー群，　極大コンパクト部分群 $K_{\mathbb{R}} \subset G_{\mathbb{R}}$

Definition (離散系列表現/ discrete series)

$L^2(G_{\mathbb{R}})$: 左正則表現の離散スペクトルを離散系列表現 (discrete series) という．

Theorem (Harish-Chandra)

1. $G_{\mathbb{R}}$ の離散系列表現が存在する
   $\iff$ $K_{\mathbb{R}}$ の極大トーラス $T_{\mathbb{R}}$ が $G_{\mathbb{R}}$ の極大トーラス (rank $G_{\mathbb{R}}$ = rank $K_{\mathbb{R}}$)
2. 離散系列表現の分類，正則離散系列の構成

Langlands conjecture (solved)

Kostant & Langlands: L^2 コホモロジーによる一般化を予想

Theorem (Schmid [Sch71; Sch76])

rank $G_{\mathbb{R}}$ = rank $K_{\mathbb{R}}$ とする．

1. $G_{\mathbb{R}}/T_{\mathbb{R}}$ は複素多様体の構造を持ち，
2. 複素直線束 $L_\lambda \to G_{\mathbb{R}}/T_{\mathbb{R}}$ の $\exists q$ 次 L^2 コホモロジー上に離散系列表現を得る
3. q 以外の L^2 コホモロジーは消滅する．

- $X = G_{\mathbb{C}}/B_{\mathbb{C}}$ 上の $G_{\mathbb{R}}$ 軌道は有限個
- $G_{\mathbb{R}}/T_{\mathbb{R}}$ は開軌道と同型 $\Longrightarrow$ 複素多様体の構造を持つ ($\because$ X は複素多様体)
- その上に離散系列表現が構成される

- 松木対応: $G_{\mathbb{R}}$ 開軌道 $\leftrightarrow$ $K_{\mathbb{C}}$ 閉軌道
- $K_{\mathbb{C}}$ 閉軌道は境界がないので滑らか，$K_{\mathbb{C}}$ の旗多様体に同型
- $K_{\mathbb{C}}$ 閉軌道に対応する (twisted) $\mathscr{D}_X$ 加群の大域切断上に離散系列表現が実現される ([Hec+25, Th12.5])

Harish-Chandra 加群の KGB 分類 $\leftrightarrow K_{\mathbb{C}} \backslash G_{\mathbb{C}} / B_{\mathbb{C}}$

$G_{\mathbb{R}}$ の既約ユニタリ表現 $\overset{\text{微分表現}}{\rightsquigarrow}$ $(\mathfrak{g}, K_{\mathbb{C}})$ 加群: **Harish-Chandra 加群**（HC 加群）

HC 加群: ユニタリ表現を含む**認容表現** (admissible —) の無限小同型類を代表，
代数的に扱いやすい $\rightsquigarrow$ 実リー群の無限次元表現論で広く使われている

Theorem

自明な無限小指標を持つ既約 *HC* 加群

$\xrightarrow{BB \text{ 対応}}$ $K_{\mathbb{C}}$ 同変な既約 $\mathscr{D}_X$ 加群

$\xrightarrow{RH \text{ 対応}}$ 旗多様体上の $K_{\mathbb{C}}$ 軌道と局所系

- $X = G_{\mathbb{C}}/B_{\mathbb{C}}$ 上の $B_{\mathbb{C}}$ 同変な $\mathscr{D}_X$ 加群
  $\xrightarrow{\text{BB 対応}}$ 無限小指標が自明な最高ウェイト表現の圏（$(\mathfrak{g}, B_{\mathbb{C}})$ 加群の圏）
- $B_{\mathbb{C}}$ 軌道 (局所系は常に自明)
  $\xrightarrow{\text{RH 対応}}$ 既約な最高ウェイト表現
- $B_{\mathbb{C}}$ 軌道: $B_{\mathbb{C}} \backslash G_{\mathbb{C}} / B_{\mathbb{C}} \simeq W_G$: Weyl 群

軌道の有限性と余法束多様体（一般論）

X: 滑らかな $G_{\mathbb{C}}$ 多様体， T^*X: 余接束 (cotangent bundle)
$\exists \mu_X : T^*X \to \mathfrak{g}^*$: モーメント写像 ($G_{\mathbb{C}}$ 同変)

Definition

零ファイバー $\mathcal{Z}_X := \mu_X^{-1}(0)$ を余法束多様体 (conormal variety) と呼ぶ

次の定理がキーポイント である． $T^*_{\mathbb{O}}X$: 軌道 $\mathbb{O}$ の余法束

Theorem

$G_{\mathbb{C}}$ が X 上に有限軌道を持つ $\implies$ $\mathcal{Z}_X = \bigsqcup_{\mathbb{O}} T^*_{\mathbb{O}}X$ は等次元多様体
ここで $\mathbb{O} \in X/G_{\mathbb{C}}$ は $G_{\mathbb{C}}$ 軌道を動く

Corollary

$G_{\mathbb{C}}$ が X 上に有限軌道を持てば $X/G_{\mathbb{C}} \ni \mathbb{O} \longleftrightarrow \overline{T^*_{\mathbb{O}}X} \in \operatorname{Irr} \mathcal{Z}_X$ は全単射

$\implies$ $\operatorname{Irr} \mathcal{Z}_X$ は軌道を分類する

旗多様体上のモーメント写像

$X = G_{\mathbb{C}}/B_{\mathbb{C}} = \{\mathfrak{b} \mid \mathfrak{b}$ は Borel subalg$\}$: 旗多様体

- 余接束: $T^*X = \{(\mathfrak{b}, x) \mid \mathfrak{b} \in X,\ x \in \mathfrak{u}\}$ $\quad \mathfrak{u}$: 冪零根基 (nil-radical)
- モーメント写像: $\xi_X : T^*X \to \mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}$, $\quad \xi_X(\mathfrak{b}, x) = x$ 第 2 成分への射影
- $\operatorname{Im} \xi_X = \mathcal{N}_{\mathfrak{g}} = \{x \in \mathfrak{g} \mid x$ は冪零元 $\} \subset \mathfrak{g}$: 冪零多様体

$$\xi_X : T^*X \to \mathcal{N}_{\mathfrak{g}}$$

$G_{\mathbb{C}} = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ のとき

- 冪零軌道 $\mathcal{O} \longleftrightarrow n$ の分割 $\lambda \vdash n$: ヤング図形 (ジョルダン標準形)
- $x \in \mathcal{O}_\lambda \subset \mathcal{N}_{\mathfrak{g}}$: 冪零元
- $\mathrm{STab}(\lambda)$: $\lambda \vdash n$ を台に持つ標準盤全体

Theorem (Steinberg [Ste76])

$\operatorname{Irr} \xi_X^{-1}(x) \simeq \mathrm{STab}(\lambda)$: ξ_X のファイバーの既約成分と標準盤が対応する

Springer-Steinberg 理論 ($G_{\mathbb{C}} = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$: type A)

$\mathscr{B} := G_{\mathbb{C}}/B_{\mathbb{C}}$ (X から変更), $\mathfrak{X} = \mathscr{B} \times \mathscr{B}$: 二重旗多様体 ($G_{\mathbb{C}}$ の対角的作用)

$$\rightsquigarrow \mathfrak{X}/G_{\mathbb{C}} \simeq B_{\mathbb{C}}\backslash G_{\mathbb{C}}/B_{\mathbb{C}} = W_G$$

- **余法束多様体**:
  $\mathcal{Z}_{\mathfrak{X}} = T^*\mathscr{B} \times_{\mathcal{N}_{\mathfrak{g}}} T^*\mathscr{B} = \{(\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, x) \in G_{\mathbb{C}}/B_{\mathbb{C}} \times G_{\mathbb{C}}/B_{\mathbb{C}} \times \mathfrak{g} \mid x \in \mathfrak{u}_1 \cap \mathfrak{u}_2\}$
- $\varphi : \mathcal{Z}_{\mathfrak{X}} \to \mathcal{N}_{\mathfrak{g}}$ は $\varphi(\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, x) = x$ （第 3 成分への射影）となる．

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{Z}_{\mathfrak{X}} = T^*\mathscr{B} \times_{\mathcal{N}_{\mathfrak{g}}} T^*\mathscr{B} \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"] \arrow[dr, "\varphi"] & T^*\mathscr{B} \arrow[d, "\mu_{\mathscr{B}}"] \\
T^*\mathscr{B} \arrow[r, "\mu_{\mathscr{B}}"'] & \mathcal{N}_{\mathfrak{g}}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & T^*\mathscr{B} \times_{\mathcal{N}_{\mathfrak{g}}} T^*\mathscr{B} \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\varphi"] & \\
\mathscr{B} \times \mathscr{B} \supset \mathbb{O}_w & & \mathcal{N}_{\mathfrak{g}} \supset \mathcal{O}_\lambda
\end{tikzcd}$$

$$\Phi : W_G = S_n \simeq (\mathscr{B} \times \mathscr{B})/G \longrightarrow \mathcal{N}_{\mathfrak{g}}/G_{\mathbb{C}} \simeq \mathcal{P}(n) \qquad : \text{Steinberg 写像}$$

$$\Phi(\mathbb{O}_w) = \mathcal{O}_\lambda \overset{\text{def}}{\iff} \varphi\left(\overline{\pi^{-1}(\mathbb{O}_w)}\right) = \overline{\mathcal{O}_\lambda}$$

($w \in S_n$: 置換,　$\lambda \in \mathcal{P}(n)$: 分割 (Jordan 標準形))

Robinson-Schensted 対応

$\mathcal{Z}_{\mathfrak{X}}(w) = \overline{\pi^{-1}(\mathbb{O}_w)} = \overline{T_{\mathbb{O}_w}\mathfrak{X}}$: 余法束多様体 $\mathcal{Z}_{\mathfrak{X}}$ の既約成分

$\mathcal{Z}_{\mathfrak{X}} = \bigcup_{w \in S_n} \mathcal{Z}_{\mathfrak{X}}(w)$: 既約分解

Theorem (Steinberg (cf. [Ste88]))

$\forall w \in S_n$ に対して，余法束多様体の既約成分の Steinberg 写像による像は冪零軌道の閉包に一致する: $\varphi(\mathcal{Z}_{\mathfrak{X}}(w)) = \overline{\mathcal{O}_\lambda} \subset \mathcal{N} \quad (\exists! \lambda \in \mathcal{P}(n))$

$\Phi : S_n \ni w \mapsto \lambda \in \mathcal{P}(n)$ は Robinson-Schensted 対応 (RS 対応) で与えられる

$$\begin{tikzcd}
S_n \arrow[r, "\sim", "RScorr"'] \arrow[dr, "\Phi"'] & \coprod_{\lambda \in \mathcal{P}(n)} \{(T_1, T_2) \mid T_i \in \mathrm{STab}(\lambda)\} \arrow[d] & \ni (T_1, T_2) \arrow[d, mapsto] \\
& \mathcal{P}(n) & \ni \lambda = shape(T_i)
\end{tikzcd}$$

$\mathrm{STab}(\lambda)$: 台が λ の標準盤全体

多重旗多様体

以下，しばらく $G_{\mathbb{C}}, K_{\mathbb{C}}, B_{\mathbb{C}}$ などを G, K, B などと書く

Theorem (Magyar-Weyman-Zelevinsky, Matsuki)

1. G: 古典群，有限軌道を持つ 3 重旗多様体 $G/P_1 \times G/P_2 \times G/P_3$ の分類
2. 4 重旗多様体が有限軌道を持つことはない

Theorem (Finkelberg-Ginzburg-Travkin)

$G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ のとき，3 重旗多様体 $\mathfrak{X} = G/P_{(1,n-1)} \times G/B \times G/B$ に対する *Springer-Steinberg* 理論と *mirabolic Robinson-Schensted* 対応の発見

Naïve idea

3 重旗多様体 $\rightsquigarrow$ $(\mathbb{G}, \mathbb{K}) = (G \times G, \mathrm{diag}\, G)$: 対称対へ...

対称対の二重旗多様体

- (G, K): 対称対 (symmetric pair)
- $Q \subset K$, $P \subset G$: 放物型部分群 (parabolic subgrp)

Definition (N-Ochiai [NO11])

$\mathbb{X} = K/Q \times G/P$ (対角的 K 作用): (対称対の) 二重旗多様体 (double flag variety)
K 軌道が有限のとき，有限型という．

Example (type AIII)

$(G, K) = \big(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), \mathrm{GL}_p(\mathbb{C}) \times \mathrm{GL}_q(\mathbb{C})\big)$ $(n = p + q)$: AIII 型対称対

$P = P_{(r,s)} \subset G$ $(n = r + s)$, $\forall Q \subset K \implies \underline{\mathbb{X} = K/Q \times G/P \text{ は有限型}}$

$$P = P_{(r,s)} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid a \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{C}), d \in \mathrm{GL}_s(\mathbb{C}) \right\}$$

とくに $Q = B_K$: Borel 部分群 $\implies \mathbb{X} \simeq \mathscr{F}\ell(\mathbb{C}^p) \times \mathscr{F}\ell(\mathbb{C}^q) \times \mathrm{Gr}_r(\mathbb{C}^n)$
2 つの完全旗多様体と，グラスマン多様体の直積 $(K = \mathrm{GL}_p \times \mathrm{GL}_q$ 作用)

有限型の二重旗多様体

Theorem

1. G: 単純, $P = B_G$ or $Q = B_K$: Borel 部分群のとき有限型二重旗多様体 $\mathbb{X} = G/P \times K/Q$ の分類 (He-N-Ochiai-Y.Oshima [He+13])
2. (G, K): AIII 型対称対のとき有限型二重旗多様体 $\mathbb{X} = G/P \times K/Q$ の分類 (Homma [Hom21], Fresse-N [FN23b])

Corollary

球 K 作用を持つ旗多様体 $X = G/P$ (spherical K-variety G/P) の分類

Proof.

X が球 K 多様体 $\overset{\text{def}}{\iff}$ 開 B_K 軌道を持つ $\iff$ 有限個の B_K 軌道を持つ

$+ \quad \big(K/B_K \times G/P\big)/K \simeq B_K\backslash(G/P)$ $\square$

一般化された Springer-Steinberg 理論

- $\mathscr{B}_K = K/B_K$: K の完全旗多様体 $\mathscr{P}_G = G/P_G$: G の部分旗多様体
- $\mathbb{X} = \mathscr{B}_K \times \mathscr{P}_G$: 有限型二重旗多様体, $\mathcal{Z}_{\mathbb{X}} \subset T^*\mathbb{X}$: 余法束多様体
- $\theta \in \operatorname{Aut} \mathfrak{g}$: Cartan inv. $\leftrightarrow$ $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$: カルタン分解
- $\mathcal{N}^{\pm\theta} = \{x \in \mathcal{N}_{\mathfrak{g}} \mid \theta(x) = \pm x\}$: 冪零多様体,　$\mathcal{N}^{\theta} = \mathcal{N}_{\mathfrak{k}} \subset \mathfrak{k}$, $\mathcal{N}^{-\theta} = \mathcal{N}_{\mathfrak{s}} \subset \mathfrak{s}$

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{Z}_{\mathbb{X}} = T^*\mathscr{B}_K \times_{\mathcal{N}^{\pm\theta}} T^*\mathscr{P}_G \arrow[r, "p_2"] \arrow[dd, "p_1"] \arrow[ddr, "\varphi^{\pm\theta}"] & T^*\mathscr{P}_G \ni (\mathfrak{p}_1, y) \arrow[d, "\mu_{\mathscr{P}_G}"] \\
& \mathcal{N}_{\mathfrak{g}} \ni y \arrow[d, "p^{\pm\theta} = (\cdot)^{\pm\theta}"] \\
(\mathfrak{b}_1, x) \in T^*\mathscr{B}_K \arrow[r, "\mu_{\mathscr{B}_K}"'] & \mathcal{N}^{\pm\theta} \ni x = y^{\pm\theta}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& T^*\mathscr{B}_K \times_{\mathcal{N}} T^*\mathscr{P}_G \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\varphi^{\pm\theta}"] & \\
\mathbb{X} = \mathscr{B}_K \times \mathscr{P}_G & & \mathcal{N}^{\pm\theta}
\end{tikzcd}
$$

Definition (2 通りの Steinberg 写像 $\Phi^{\pm\theta}$)

$$\Phi^{\pm\theta}(\mathbb{O}) = \mathcal{O}_\Lambda \overset{\text{def}}{\iff} \varphi^{\pm\theta}\left(\overline{\pi^{-1}(\mathbb{O})}\right) = \overline{\mathcal{O}_\Lambda} \qquad (\mathbb{O} \in \mathbb{X}/K,\ \ \mathcal{O}_\Lambda\text{: 冪零 } K \text{ 軌道})$$

AIII 型二重旗多様体の色付き RS 対応 (colored —)

- $(G,K) = (\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), \mathrm{GL}_p(\mathbb{C}) \times \mathrm{GL}_q(\mathbb{C}))$: AIII 型， $P_G = P_{(r,n-r)}$: 極大放物型部分群

Theorem ($\mathbb{X}$ の K 軌道の分類: Fresse-N [FN23a])

有限型二重旗多様体 $\mathbb{X} = \mathscr{B}_K \times \mathscr{P}_G$ の K 軌道は部分置換行列の 2 つの非退化な組 $\omega = (\tau_1, \tau_2)$ $(\tau_1 \in \mathrm{M}_{p,r}, \tau_2 \in \mathrm{M}_{q,r})$ の S_r 共役類によって分類できる.

Fact (冪零 K 軌道の分類 cf. [CM93])

1. $\mathcal{N}^{\theta}/K \simeq \mathcal{P}(p) \times \mathcal{P}(q) \ni (\lambda, \mu)$: 2 つの分割の組
2. $\mathcal{N}^{-\theta}/K \simeq \mathcal{P}^{\pm}(n) \ni \Lambda$: 符号付きヤング図形 (signature (p,q))

Theorem (Fresse-N [FN23a, Th.2.9])

K 軌道 $\omega \in \mathfrak{T}_{(p,q;r)}/S_r$ に標準盤の組 (T_1, T_2) を対応させる全単射:

$$\mathbb{X}/K \simeq \mathfrak{T}_{(p,q;r)}/S_r \xrightarrow{\simeq} \bigsqcup_{(\lambda,\mu)\in\mathcal{P}(p)\times\mathcal{P}(q)} \mathcal{T}_{\lambda,\mu} \quad : \quad \text{Colored-RS 対応}$$

$\mathcal{T}_{\lambda,\mu}$ は次の 1 ,2 を満たす 5 つ組 $(T_1, T_2; \lambda', \mu'; \nu)$ の全体である.

1. $(T_1, T_2) \in \mathrm{STab}(\lambda) \times \mathrm{STab}(\mu)$ は台がそれぞれ λ, μ の標準盤の組,
2. $\nu \Subset \lambda' \Subset \lambda$, $\nu \Subset \mu' \Subset \mu$ であって $|\lambda'| + |\mu'| = |\nu| + r$ を満たす.

実二重旗多様体

実数体上の二重旗多様体の本格的な理論は始まったばかりである．

arXiv:2506.12663 [math.RT]/ Kyo Nishiyama, Taito Tauchi,
Orbit structures on real double flag varieties for symmetric pairs

Example (AIII 型対称対 $(G_{\mathbb{C}}, K_{\mathbb{C}}) = (\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{C}), \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))$)

複素共役写像： $\gamma(g) = J_n^{-1}(g^*)^{-1}J_n, \qquad J_n = \sqrt{-1}\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1}_n \\ -\mathbf{1}_n & 0 \end{pmatrix}$

γ に関する実形 $\rightsquigarrow$

- 実対称対 $(G_{\mathbb{R}}, H_{\mathbb{R}}) \simeq (\mathrm{U}(n,n), \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))$
- $P_{\mathbb{R}} = \mathrm{U}(n,n) \cap P_{(n,n)}$， $Q_{\mathbb{R}} \simeq B_n(\mathbb{C})$

実二重旗多様体: $\mathfrak{X}_{\mathbb{R}} = G_{\mathbb{R}}/P_{\mathbb{R}} \times H_{\mathbb{R}}/Q_{\mathbb{R}} \simeq \mathrm{HLGr}_n(\mathbb{C}^{2n}) \times \mathscr{F}\ell(\mathbb{C}^n)$

- $\mathrm{HLGr}_n(\mathbb{C}^{2n}) = \{W \in \mathrm{Gr}_n(\mathbb{C}^{2n}) \mid W$ は $\mathbb{C}^{(n|n)}$ の極大等方的部分空間$\}$: エルミート・ラグランジュ多様体
- $\mathscr{F}\ell(\mathbb{C}^n)$: 完全旗多様体
- $\mathbb{C}^{(n|n)}$ は符号が (n,n) の不定値エルミート内積空間

実二重旗多様体上の $H_{\mathbb{R}}$ 軌道の有限性と分類

Lemma

複素二重旗多様体 $\mathfrak{X}_{\mathbb{C}}$ が有限型 $\Longrightarrow$ 対応する実形 $\mathfrak{X}_{\mathbb{R}}$ はやはり有限型

AIII 型の実二重旗多様体で得られている結果 (N-Tauchi [NT25])

- $H_{\mathbb{R}}$ 軌道の分類 (3 種類の異なる分類):
  1. 符号付き部分置換とそれに付随した組合せ論的なグラフ
  2. ガロアコホモロジー
  3. 階数の低い複素旗多様体上の KGB 分類に帰着
     $\rightsquigarrow$ 大島・松木の clan による軌道の分類
- 開軌道に付随した退化主系列の間の intertwining 作用素 （積分核作用素）

退化主系列表現 → 主系列表現: $\pi_\alpha = \operatorname{Ind}_{P_{\mathbb{R}}}^{G_{\mathbb{R}}} \chi_\alpha \xrightarrow{H_{\mathbb{R}}\ \text{同変}} \eta_\beta = \operatorname{Ind}_{Q_{\mathbb{R}}}^{H_{\mathbb{R}}} \xi_\beta$

(χ_α は $P_{\mathbb{R}}$ の，ξ_β は $Q_{\mathbb{R}}$ の一次元指標)

Thank you for your attention!!

ご静聴ありがとうございました

End of Talk

References I

[CNT12] Dan Ciubotaru, Kyo Nishiyama, and Peter E. Trapa. "Regular orbits of symmetric subgroups on partial flag varieties". In: *Representation theory, complex analysis, and integral geometry*. Birkhäuser, 2012, pp. 61–86.

[CM93] David H. Collingwood and William M. McGovern. *Nilpotent orbits in semisimple Lie algebras*. Van Nostrand Reinhold Mathematics Series. New York: Van Nostrand Reinhold Co., 1993, pp. xiv+186.

[FN23a] Lucas Fresse and Kyo Nishiyama. "On generalized Steinberg theory for type AIII". In: *Algebr. Comb.* 6.1 (2023), pp. 165–195.

[FN23b] Lucas Fresse and Kyo Nishiyama. *Overview on the theory of double flag varieties for symmetric pairs*. 2023.

[He+13] Xuhua He et al. "On orbits in double flag varieties for symmetric pairs". In: *Transform. Groups* 18.4 (2013), pp. 1091–1136.

References II

[Hec+25] Henryk Hecht et al. "Localization and standard modules for real semisimple Lie groups II: irreducibility and classification". In: *Pure Appl. Math. Q.* 21.2 (2025), pp. 697–811.

[Hom21] Hiroki Homma. "Double Flag Varieties and Representations of Quivers". In: arXiv: 2103.14509 (2021).

[NO11] Kyo Nishiyama and Hiroyuki Ochiai. "Double flag varieties for a symmetric pair and finiteness of orbits". In: *J. Lie Theory* 21.1 (2011), pp. 79–99.

[NT25] Kyo Nishiyama and Taito Tauchi. *Orbit structures on real double flag varieties for symmetric pairs*. 2025.

[Sch71] Wilfried Schmid. "On a conjecture of Langlands". In: *Ann. of Math. (2)* 93 (1971), pp. 1–42.

[Sch76] Wilfried Schmid. "L^2-cohomology and the discrete series". In: *Ann. of Math. (2)* 103.2 (1976), pp. 375–394.

References III

[Ste76] Robert Steinberg. "On the desingularization of the unipotent variety". In: *Invent. Math.* 36 (1976), pp. 209–224.

[Ste88] Robert Steinberg. "An occurrence of the Robinson-Schensted correspondence". In: *J. Algebra* 113.2 (1988), pp. 523–528.

[堀田良 19] 堀田良之. 対称空間今昔譚. 数学書房, 2019.