K 理論的 Schubert calculus の 15 年

池田 岳 Okayama University of Sciences

青山学院大学での談話会

Aug. 30, 2017

Schubert calculus

Grassmann 多様体 $Gr(d,\mathbb{C}) = \{V \mid V \subset \mathbb{C}^n,\ \dim(V) = d\}$
$d(n-d)$ 次元，非特異射影的代数多様体.

Schubert 多様体

ヤング図形：$\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_d)$: $n - d \geq \lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_d \geq 0$.
旗：$F^\bullet : \mathbb{C}^n \supset F^1 \supset F^2 \supset \cdots \supset F^n = \{\mathbf{0}\}$, $F^i/F^{i+1} \cong \mathbb{C}$

$$\Omega_\lambda(F^\bullet) = \{V \in Gr(d,\mathbb{C}^n) \mid \dim(V \cap F^{\lambda_i+d-i}) \geq i\ (1 \leq i \leq d)\}$$

既約で余次元 $|\lambda| := \sum_{i=1}^d \lambda_i$ の閉部分多様体
$A^*(Gr(d,\mathbb{C}^n))$: Chow 環（あるいはコホモロジー環）
$\sigma_\lambda := [\Omega_\lambda(F^\bullet)] \in A^{|\lambda|}(Gr(d,\mathbb{C}^n))$: Schubert 類（$F^\bullet$ によらない）
構造定数 $c^\nu_{\lambda\mu} \in \mathbb{N}$

$$\sigma_\lambda \sigma_\mu = \sum_\nu c^\nu_{\lambda\mu} \sigma_\nu$$

ν は $|\lambda| + |\mu| = |\nu|$ をみたす.

Grassmann 多様体 $Gr(d,\mathbb{C}) = \{V \mid V \subset \mathbb{C}^n,\ \dim(V) = d\}$
$d(n-d)$ 次元，非特異射影的代数多様体.

Schubert 多様体

ヤング図形：$\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_d)$: $n-d \geq \lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_d \geq 0$.
旗：$F^\bullet : \mathbb{C}^n \supset F^1 \supset F^2 \supset \cdots \supset F^n = \{\mathbf{0}\}$, $F^i/F^{i+1} \cong \mathbb{C}$

$$\Omega_\lambda(F^\bullet) = \{V \in Gr(d,\mathbb{C}^n) \mid \dim(V \cap F^{\lambda_i+d-i}) \geq i\ (1 \leq i \leq d)\}$$

既約で余次元 $|\lambda| := \sum_{i=1}^{d} \lambda_i$ の閉部分多様体
$A^*(Gr(d,\mathbb{C}^n))$: Chow 環（あるいはコホモロジー環）
$\sigma_\lambda := [\Omega_\lambda(F^\bullet)] \in A^{|\lambda|}(Gr(d,\mathbb{C}^n))$: Schubert 類（$F^\bullet$ によらない）
構造定数 $c_{\lambda\mu}^{\nu} \in \mathbb{N}$

$$\sigma_\lambda\sigma_\mu = \sum_\nu c_{\lambda\mu}^{\nu}\sigma_\nu$$

ν は $|\lambda| + |\mu| = |\nu|$ をみたす.

Schubert calculus

Grassmann 多様体 $Gr(d,\mathbb{C}) = \{V \mid V \subset \mathbb{C}^n,\ \dim(V) = d\}$
$d(n-d)$ 次元，非特異射影的代数多様体.

Schubert 多様体

ヤング図形：$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_d)$: $n-d \geq \lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_d \geq 0$.
旗：$F^\bullet : \mathbb{C}^n \supset F^1 \supset F^2 \supset \cdots \supset F^n = \{\mathbf{0}\}$, $F^i/F^{i+1} \cong \mathbb{C}$

$$\Omega_\lambda(F^\bullet) = \{V \in Gr(d,\mathbb{C}^n) \mid \dim(V \cap F^{\lambda_i+d-i}) \geq i\ (1 \leq i \leq d)\}$$

既約で余次元 $|\lambda| := \sum_{i=1}^d \lambda_i$ の閉部分多様体
$A^*(Gr(d,\mathbb{C}^n))$: Chow 環（あるいはコホモロジー環）
$\sigma_\lambda := [\Omega_\lambda(F^\bullet)] \in A^{|\lambda|}(Gr(d,\mathbb{C}^n))$: Schubert 類（$F^\bullet$ によらない）
構造定数 $c_{\lambda\mu}^\nu \in \mathbb{N}$

$$\sigma_\lambda\sigma_\mu = \sum_\nu c_{\lambda\mu}^\nu \sigma_\nu$$

ν は $|\lambda| + |\mu| = |\nu|$ をみたす.

$c^{\nu}_{\lambda\mu}$ の幾何学的意味

$E^\bullet$ と $F^\bullet$ が $E^i \cap F^{n-i} = \{\mathbf{0}\}$ となるように選ぶ.
$\Omega_\lambda(F^\bullet) \cap \Omega_\mu(E^\bullet) \neq \varnothing \iff \lambda \subset \mu^\vee$.
ここで $\mu^\vee = (n-d-\mu_d, \ldots, n-d-\mu_1)$.
Richardson 多様体（$\lambda \subset \mu^\vee$ とする．特に $|\lambda| + |\mu| \leq d(n-d)$）：

$$Z_{\lambda,\mu} = \Omega_\lambda(F^\bullet) \cap \Omega_\mu(E^\bullet)$$

既約で余次元 $|\lambda| + |\mu|$ の閉部分多様体
$M^\bullet$ を十分一般の旗とすると

$$c^{\nu}_{\lambda\mu} = \#\left(Z_{\lambda,\mu} \cap \Omega_{\nu^\vee}(M^\bullet)\right)$$

数え上げ幾何学

例１：4 本の直線 $\ell_1, \ldots, \ell_4 \subset \mathbb{P}^3$ と交わる直線 ℓ は何本あるか？

$Gr(2, \mathbb{C}^4) =$（$\mathbb{P}^3$ 内の直線 ℓ 全体）

$F^\bullet : p_0 \in \ell_0 \subset e_0 \subset \mathbb{P}^3$.

$\Omega_{1,0}(F^\bullet) : \ell \cap \ell_0 \neq \varnothing$

$\Omega_{1,1}(F^\bullet) : \ell \subset e_0$

$\Omega_{2,0}(F^\bullet) : p_0 \in \ell$

$\Omega_{2,1}(F^\bullet) = \Omega_{(1,1)}(F^\bullet) \cap \Omega_{(2,0)}(F^\bullet)$

$\Omega_{2,2}(F^\bullet) = \{\ell_0\}$

$\sigma_1^4 = \sigma_1^2 \cdot \sigma_1^2 = (\sigma_2 + \sigma_{1,1})^2 = \sigma_2^2 + 2\sigma_2\sigma_{1,1} + \sigma_{1,1}^2 = 2\sigma_{2,2}$.

例２：$\mathbb{P}^3$ 内の 3 次曲面の上に直線は何本あるか？

Clebsch の曲面: $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 + x_5^3 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0$

数え上げ幾何学

例１：4 本の直線 $\ell_1, \ldots, \ell_4 \subset \mathbb{P}^3$ と交わる直線 ℓ は何本あるか？
$Gr(2, \mathbb{C}^4) =$（$\mathbb{P}^3$ 内の直線 ℓ 全体）
$F^\bullet : p_0 \in \ell_0 \subset e_0 \subset \mathbb{P}^3.$
$\Omega_{1,0}(F^\bullet) : \ell \cap \ell_0 \neq \varnothing$
$\Omega_{1,1}(F^\bullet) : \ell \subset e_0$
$\Omega_{2,0}(F^\bullet) : p_0 \in \ell$
$\Omega_{2,1}(F^\bullet) = \Omega_{(1,1)}(F^\bullet) \cap \Omega_{(2,0)}(F^\bullet)$
$\Omega_{2,2}(F^\bullet) = \{\ell_0\}$
$\sigma_1^4 = \sigma_1^2 \cdot \sigma_1^2 = (\sigma_2 + \sigma_{1,1})^2 = \sigma_2^2 + 2\sigma_2\sigma_{1,1} + \sigma_{1,1}^2 = 2\sigma_{2,2}.$

例２：$\mathbb{P}^3$ 内の 3 次曲面の上に直線は何本あるか？
Clebsch の曲面: $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 + x_5^3 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0$

数え上げ幾何学

例１：4 本の直線 $\ell_1, \dots, \ell_4 \subset \mathbb{P}^3$ と交わる直線 ℓ は何本あるか？
$Gr(2, \mathbb{C}^4) =$（$\mathbb{P}^3$ 内の直線 ℓ 全体）
$F^\bullet : p_0 \in \ell_0 \subset e_0 \subset \mathbb{P}^3$.
$\Omega_{1,0}(F^\bullet) : \ell \cap \ell_0 \neq \varnothing$
$\Omega_{1,1}(F^\bullet) : \ell \subset e_0$
$\Omega_{2,0}(F^\bullet) : p_0 \in \ell$
$\Omega_{2,1}(F^\bullet) = \Omega_{(1,1)}(F^\bullet) \cap \Omega_{(2,0)}(F^\bullet)$
$\Omega_{2,2}(F^\bullet) = \{\ell_0\}$
$\sigma_1^4 = \sigma_1^2 \cdot \sigma_1^2 = (\sigma_2 + \sigma_{1,1})^2 = \sigma_2^2 + 2\sigma_2\sigma_{1,1} + \sigma_{1,1}^2 = 2\sigma_{2,2}$.

例２：$\mathbb{P}^3$ 内の 3 次曲面の上に直線は何本あるか？
Clebsch の曲面: $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 + x_5^3 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0$

Schur 関数と Schubert 類

$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ に対して $A_\alpha(z) = \det(z_i^{\alpha_j})_{1 \le i,j \le d}$ とする.
$\delta = (d-1, d-2, \dots, 1, 0)$ とすると $A_\delta(z) = \prod_{1 \le i < j \le d}(z_i - z_j)$.

Schur 関数

$\lambda = (\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_d)$. $z = (z_1, \dots, z_d)$ に関する対称多項式

$$s_\lambda(z) = \frac{A_{\lambda+\delta}(z)}{A_\delta(z)}.$$

環準同型 $\pi_{d,n} : \mathbb{Z}[z_1, \dots, z_d]^{S_d} = \bigoplus_\lambda \mathbb{Z} s_\lambda(z) \twoheadrightarrow A^*(Gr(d, \mathbb{C}^n))$

$$s_\lambda(z) \mapsto \begin{cases} \sigma_\lambda & (\lambda_1 \le n-d) \\ 0 & (\lambda_1 > n-d) \end{cases}$$

$c^\nu_{\lambda\mu}$ は $s_\lambda(z)$ を使って計算できる.
Littlewood–Richardson 規則

Schur 関数と Schubert 類

$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ に対して $A_\alpha(z) = \det(z_i^{\alpha_j})_{1 \le i,j \le d}$ とする.
$\delta = (d-1, d-2, \ldots, 1, 0)$ とすると $A_\delta(z) = \prod_{1 \le i < j \le d}(z_i - z_j)$.

Schur 関数

$\lambda = (\lambda_1 \ge \cdots \ge \lambda_d)$. $z = (z_1, \ldots, z_d)$ に関する対称多項式

$$s_\lambda(z) = \frac{A_{\lambda+\delta}(z)}{A_\delta(z)}.$$

環準同型 $\pi_{d,n} : \mathbb{Z}[z_1, \ldots, z_d]^{S_d} = \bigoplus_\lambda \mathbb{Z} s_\lambda(z) \twoheadrightarrow A^*(Gr(d, \mathbb{C}^n))$

$$s_\lambda(z) \mapsto \begin{cases} \sigma_\lambda & (\lambda_1 \le n-d) \\ 0 & (\lambda_1 > n-d) \end{cases}$$

$c_{\lambda\mu}^\nu$ は $s_\lambda(z)$ を使って計算できる.

Littlewood–Richardson 規則

Schur 関数と Schubert 類

$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ に対して $A_\alpha(z) = \det(z_i^{\alpha_j})_{1 \le i,j \le d}$ とする.
$\delta = (d-1, d-2, \dots, 1, 0)$ とすると $A_\delta(z) = \prod_{1 \le i < j \le d}(z_i - z_j)$.

Schur 関数

$\lambda = (\lambda_1 \ge \cdots \ge \lambda_d)$. $z = (z_1, \dots, z_d)$ に関する対称多項式

$$s_\lambda(z) = \frac{A_{\lambda+\delta}(z)}{A_\delta(z)}.$$

環準同型 $\pi_{d,n} : \mathbb{Z}[z_1, \dots, z_d]^{S_d} = \bigoplus_\lambda \mathbb{Z} s_\lambda(z) \twoheadrightarrow A^*(Gr(d, \mathbb{C}^n))$

$$s_\lambda(z) \mapsto \begin{cases} \sigma_\lambda & (\lambda_1 \le n-d) \\ 0 & (\lambda_1 > n-d) \end{cases}$$

$c^\nu_{\lambda\mu}$ は $s_\lambda(z)$ を使って計算できる.
Littlewood–Richardson 規則

K 理論とは何か？

- $\mathcal{A}$: Exact category
  $A, B \in Ob(\mathcal{A})$ に対して $\mathrm{Hom}(A, B)$: 加法群
  完全列が定義できる.
- $K^0(\mathcal{A})$: $\mathcal{A}$ の Grothendieck 群
  $[A]$ $(A \in Ob(\mathcal{A}))$ で生成される自由アーベル群を割って作る.
  $0 \to A_1 \to A_2 \to A_3 \to 0$ を完全列とするとき

$$[A_1] - [A_2] + [A_3] = 0$$

K 理論とは何か？

- $\mathcal{A}$: Exact category
  $A, B \in Ob(\mathcal{A})$ に対して $\mathrm{Hom}(A, B)$: 加法群
  完全列が定義できる.
- $K^0(\mathcal{A})$: $\mathcal{A}$ の Grothendieck 群
  $[A]$ $(A \in Ob(\mathcal{A}))$ で生成される自由アーベル群を割って作る.
  $0 \to A_1 \to A_2 \to A_3 \to 0$ を完全列とするとき

$$[A_1] - [A_2] + [A_3] = 0$$

K 理論の例

- $K^0(Vect(\mathbb{C})^{fin}) = \mathbb{Z} \cdot [\mathbb{C}] \cong \mathbb{Z}$
  $V \cong \mathbb{C}^n$ ならば $[V] = n \cdot [\mathbb{C}]$.
- G :有限群, V: G の（$\mathbb{C}$ 上の）有限次元表現.
  $\mathrm{Hom}(V_1, V_2)$ は G 加群の準同型.
  $V_1, \ldots, V_m$: 既約表現（の同値類の代表）
  $K^0(Rep(G)) = \bigoplus_{i=1}^m \mathbb{Z}[V_i] \cong \mathbb{Z}^m$

これらは積の構造も持つ: $\otimes$

K 理論の例

- $K^0(Vect(\mathbb{C})^{fin}) = \mathbb{Z}\cdot[\mathbb{C}] \cong \mathbb{Z}$
  $V \cong \mathbb{C}^n$ ならば $[V] = n\cdot[\mathbb{C}]$.
- G :有限群，V: G の（$\mathbb{C}$ 上の）有限次元表現.
  $\mathrm{Hom}(V_1, V_2)$ は G 加群の準同型.
  $V_1, \ldots, V_m$: 既約表現（の同値類の代表）
  $K^0(Rep(G)) = \bigoplus_{i=1}^{m} \mathbb{Z}[V_i] \cong \mathbb{Z}^m$

これらは積の構造も持つ: $\otimes$

K 理論の例

- $K^0(Vect(\mathbb{C})^{fin}) = \mathbb{Z} \cdot [\mathbb{C}] \cong \mathbb{Z}$
  $V \cong \mathbb{C}^n$ ならば $[V] = n \cdot [\mathbb{C}]$.
- G :有限群， V: G の（$\mathbb{C}$ 上の）有限次元表現.
  $\mathrm{Hom}(V_1, V_2)$ は G 加群の準同型.
  $V_1, \ldots, V_m$: 既約表現（の同値類の代表）
  $K^0(Rep(G)) = \bigoplus_{i=1}^m \mathbb{Z}[V_i] \cong \mathbb{Z}^m$

これらは積の構造も持つ: $\otimes$

代数多様体の K 理論

X 代数多様体 $/\mathbb{C}$

- X 上の局所自由層のなす圏 $\mathit{Vect}(X)$.
- X 上の連接層のなす圏 $\mathit{Coh}(X)$.

X がアフィン多様体 $\mathrm{Spec}(A)$（A は $\mathbb{C}$ 上有限生成の「被約な」可換環）のときは $\mathit{Coh}(X)$ は有限生成 A 加群の圏と同値.

X が非特異のときは $\mathcal{F} \in \mathit{Coh}(X)$ に対して完全列（$\mathcal{V}^i$ は局所自由層）

$$0 \to \mathcal{V}^r \to \cdots \to \mathcal{V}^1 \to \mathcal{V}^0 \to \mathcal{F} \to 0$$

があるので $\sum_{i=0}^{r}(-1)^i[\mathcal{V}^i] \in K^0(\mathit{Vect}(X))$ が定まる.
$K^0(\mathit{Coh}(X))$ と $K^0(\mathit{Vect}(X))$ を同一視できる.
$K^0(\mathit{Vect}(X))$ の積を $K^0(\mathit{Coh}(X))$ に移植して環の構造を持たせる.
以下，単に $K^0(X)$ と書く.

代数多様体の K 理論

X 代数多様体 $/\mathbb{C}$

- X 上の局所自由層のなす圏 $Vect(X)$.
- X 上の連接層のなす圏 $Coh(X)$.

X がアフィン多様体 $\mathrm{Spec}(A)$ （A は $\mathbb{C}$ 上有限生成の「被約な」可換環）のときは $Coh(X)$ は有限生成 A 加群の圏と同値.

X が非特異のときは $\mathcal{F} \in Coh(X)$ に対して完全列（$\mathcal{V}^i$ は局所自由層）

$$0 \to \mathcal{V}^r \to \cdots \to \mathcal{V}^1 \to \mathcal{V}^0 \to \mathcal{F} \to 0$$

があるので $\sum_{i=0}^r (-1)^i [\mathcal{V}^i] \in K^0(Vect(X))$ が定まる.
$K^0(Coh(X))$ と $K^0(Vect(X))$ を同一視できる.
$K^0(Vect(X))$ の積を $K^0(Coh(X))$ に移植して環の構造を持たせる.
以下，単に $K^0(X)$ と書く.

代数多様体の K 理論

X 代数多様体 $/\mathbb{C}$

- X 上の局所自由層のなす圏 $\mathit{Vect}(X)$.
- X 上の連接層のなす圏 $\mathit{Coh}(X)$.

X がアフィン多様体 $\mathrm{Spec}(A)$ （A は $\mathbb{C}$ 上有限生成の「被約な」可換環）のときは $\mathit{Coh}(X)$ は有限生成 A 加群の圏と同値.

X が非特異のときは $\mathcal{F} \in \mathit{Coh}(X)$ に対して完全列（$\mathcal{V}^i$ は局所自由層）

$$0 \to \mathcal{V}^r \to \cdots \to \mathcal{V}^1 \to \mathcal{V}^0 \to \mathcal{F} \to 0$$

があるので $\sum_{i=0}^{r}(-1)^i[\mathcal{V}^i] \in K^0(\mathit{Vect}(X))$ が定まる.
$K^0(\mathit{Coh}(X))$ と $K^0(\mathit{Vect}(X))$ を同一視できる.
$K^0(\mathit{Vect}(X))$ の積を $K^0(\mathit{Coh}(X))$ に移植して環の構造を持たせる.
以下，単に $K^0(X)$ と書く.

K 理論的シューベルト・カルキュラス

$K^0(Gr(d,\mathbb{C}^n))$ は $[\mathcal{O}_\lambda] := [\mathcal{O}_{\Omega_\lambda}]$ を基底とする自由アーベル群.

$$[\mathcal{O}_\lambda] \cdot [\mathcal{O}_\mu] = \sum_\nu (-1)^{|\mu|+|\nu|-|\lambda|} c^\nu_{\lambda\mu} [\mathcal{O}_\nu].$$

$|\lambda| + |\mu| = |\nu|$ のときは $A^*(Gr(d,\mathbb{C}^n))$ の構造定数と一致する.
$|\lambda| + |\mu| < |\nu|$ のときも $c^\nu_{\lambda\mu} \neq 0$ になりうる.
$c^\nu_{\lambda\mu}$ が非負であることはわかっている.

Sheaf Euler characteristic : $\chi_X : K^0(Coh(X)) \to \mathbb{Z}$.
$[\mathcal{F}] \mapsto \sum_{i=0}^d (-1)^i \dim H^i(X, \mathcal{F})$

Buch 2002 の公式

$$\chi_{Gr(d,\mathbb{C}^n)}([\mathcal{O}_\lambda] \cdot [\mathcal{O}_\mu] \cdot [\mathcal{O}_\nu]) = \sum_{\sigma \subset \nu^\vee} (-1)^{|\lambda|+|\mu|-|\sigma|} c^\sigma_{\lambda\mu}$$

K 理論的シューベルト・カルキュラス

$K^0(Gr(d,\mathbb{C}^n))$ は $[\mathcal{O}_\lambda] := [\mathcal{O}_{\Omega_\lambda}]$ を基底とする自由アーベル群.

$$[\mathcal{O}_\lambda]\cdot[\mathcal{O}_\mu] = \sum_\nu (-1)^{|\mu|+|\nu|-|\lambda|} c_{\lambda\mu}^{\nu}[\mathcal{O}_\nu].$$

$|\lambda|+|\mu|=|\nu|$ のときは $A^*(Gr(d,\mathbb{C}^n))$ の構造定数と一致する.
$|\lambda|+|\mu|<|\nu|$ のときも $c_{\lambda\mu}^{\nu}\neq 0$ になりうる.
$c_{\lambda\mu}^{\nu}$ が非負であることはわかっている.

Sheaf Euler characteristic : $\chi_X : K^0(Coh(X))\to\mathbb{Z}$.
$[\mathcal{F}]\mapsto\sum_{i=0}^{d}(-1)^i \dim H^i(X,\mathcal{F})$

Buch 2002 の公式

$$\chi_{Gr(d,\mathbb{C}^n)}([\mathcal{O}_\lambda]\cdot[\mathcal{O}_\mu]\cdot[\mathcal{O}_\nu]) = \sum_{\sigma\subset\nu^\vee}(-1)^{|\lambda|+|\mu|-|\sigma|}c_{\lambda\mu}^{\sigma}$$

Grothendieck 多項式

Grothendieck 多項式（Lascoux–Schützenberger 1990）の一つの表示：

$$G_\lambda(z) = \frac{\det((1-z_i)^{j-1} z_i^{\lambda_j+d-j})_{1\le i,j\le d}}{\det(z_i^{d-j})_{1\le i,j\le d}}.$$

Lenart 2000: $G_\lambda(z)$ の Pieri 規則

Lascoux–Schützenberger, Buch

$\pi_{d,n} : \mathbb{Z}[z_1,\ldots,z_d] = \bigoplus_\lambda \mathbb{Z}G_\lambda(z) \twoheadrightarrow K^0(Gr(d,\mathbb{C}^n))$

$$G_\lambda(z) \mapsto \begin{cases} [\mathcal{O}_\lambda] & (\lambda_1 \le n-d) \\ 0 & (\lambda_1 > n-d) \end{cases}$$

Buch (2002)

(1) $G_\lambda(z)$ は Set-Valued (semistandard) Tableaux (SVT) にわたる和.

(2) $c^\nu_{\lambda\mu} = \#\{\mu$ 上のλ-good SVT であって content が $\nu - \lambda\}$.

Grothendieck 多項式

Grothendieck 多項式（Lascoux–Schützenberger 1990）の一つの表示：

$$G_\lambda(z) = \frac{\det((1-z_i)^{j-1} z_i^{\lambda_j+d-j})_{1\le i,j\le d}}{\det(z_i^{d-j})_{1\le i,j\le d}}.$$

Lenart 2000: $G_\lambda(z)$ の Pieri 規則

Lascoux–Schützenberger, Buch

$\pi_{d,n} : \mathbb{Z}[z_1,\ldots,z_d] = \bigoplus_\lambda \mathbb{Z}G_\lambda(z) \twoheadrightarrow K^0(Gr(d,\mathbb{C}^n))$

$$G_\lambda(z) \mapsto \begin{cases} [\mathcal{O}_\lambda] & (\lambda_1 \le n-d) \\ 0 & (\lambda_1 > n-d) \end{cases}$$

Buch (2002)

(1) $G_\lambda(z)$ は Set-Valued (semistandard) Tableaux (SVT) にわたる和.

(2) $c^\nu_{\lambda\mu} = \#\{\mu$ 上のλ-good SVT であって content が $\nu-\lambda\}$.

Grothendieck 多項式

Grothendieck 多項式（Lascoux–Schützenberger 1990）の一つの表示：

$$G_\lambda(z) = \frac{\det((1-z_i)^{j-1} z_i^{\lambda_j+d-j})_{1\le i,j\le d}}{\det(z_i^{d-j})_{1\le i,j\le d}}.$$

Lenart 2000: $G_\lambda(z)$ の Pieri 規則
Lascoux–Schützenberger, Buch
$\pi_{d,n} : \mathbb{Z}[z_1,\ldots,z_d] = \bigoplus_\lambda \mathbb{Z}G_\lambda(z) \twoheadrightarrow K^0(Gr(d,\mathbb{C}^n))$
$G_\lambda(z) \mapsto \begin{cases} [\mathcal{O}_\lambda] & (\lambda_1 \le n-d) \\ 0 & (\lambda_1 > n-d) \end{cases}$

Buch (2002)

(1) $G_\lambda(z)$ は Set-Valued (semistandard) Tableaux (SVT) にわたる和.
(2) $c^\nu_{\lambda\mu} = \#\{\mu$ 上のλ-good SVT であって content が $\nu-\lambda\}$.

GROTHENDIECK 多項式

Grothendieck 多項式（Lascoux–Schützenberger 1990）の一つの表示：

$$G_\lambda(z) = \frac{\det((1-z_i)^{j-1} z_i^{\lambda_j+d-j})_{1\le i,j\le d}}{\det(z_i^{d-j})_{1\le i,j\le d}}.$$

Lenart 2000: $G_\lambda(z)$ の Pieri 規則
Lascoux–Schützenberger, Buch
$\pi_{d,n} : \mathbb{Z}[z_1,\dots,z_d] = \bigoplus_\lambda \mathbb{Z}G_\lambda(z) \twoheadrightarrow K^0(Gr(d,\mathbb{C}^n))$

$$G_\lambda(z) \mapsto \begin{cases} [\mathcal{O}_\lambda] & (\lambda_1 \le n-d) \\ 0 & (\lambda_1 > n-d) \end{cases}$$

BUCH (2002)

(1) $G_\lambda(z)$ は Set-Valued (semistandard) Tableaux (SVT) にわたる和.
(2) $c^\nu_{\lambda\mu} = \#\{\mu$ 上のλ-good SVT であって content が $\nu-\lambda\}$.

Grothendieck 多項式

Grothendieck 多項式（Lascoux–Schützenberger 1990）の一つの表示：

$$G_\lambda(z) = \frac{\det((1-z_i)^{j-1} z_i^{\lambda_j+d-j})_{1\le i,j\le d}}{\det(z_i^{d-j})_{1\le i,j\le d}}.$$

Lenart 2000: $G_\lambda(z)$ の Pieri 規則

Lascoux–Schützenberger, Buch

$\pi_{d,n} : \mathbb{Z}[z_1,\dots,z_d] = \bigoplus_\lambda \mathbb{Z}G_\lambda(z) \twoheadrightarrow K^0(Gr(d,\mathbb{C}^n))$

$G_\lambda(z) \mapsto \begin{cases} [\mathcal{O}_\lambda] & (\lambda_1 \le n-d) \\ 0 & (\lambda_1 > n-d) \end{cases}$

Buch (2002)

(1) $G_\lambda(z)$ は Set-Valued (semistandard) Tableaux (SVT) にわたる和.

(2) $c_{\lambda\mu}^{\nu} = \#\{\mu$ 上のλ-good SVT であって content が $\nu-\lambda\}$.

SVT と Buch の規則

Set-Valued Tableau on $\mu = (3,2) \rightsquigarrow$ word $w = w_1 \cdots w_N$

$$T = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 12 & 23 & 34 \\ \hline 3 & 45 \\ \cline{1-2} \end{array} \rightsquigarrow w = 433254213,\ content(w) = (1,2,3,2,1)$$

$z^T = z_1 z_2^2 z_3^3 z_4^2 z_5$. Then $G_\lambda(z) = \sum_{T \text{ on } \mu} (-1)^{|T|-|\lambda|} z^T$.

The above T is λ-good ($\lambda = (5,3,1)$).

i.e., $\lambda + content(w_1 \cdots w_j)$ is a Young diagram for $1 \leq i \leq N$.
$\nu = \lambda + content(w) = (6,5,4,2,1)$.

注：Buch の規則の短い証明 (I.–Shimazaki 2011, MRL)

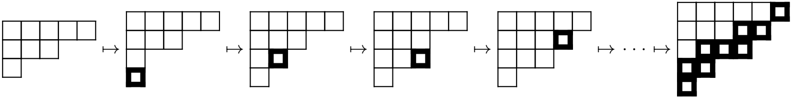
SVT と Buch の規則

Set-Valued Tableau on $\mu = (3,2) \rightsquigarrow$ word $w = w_1 \cdots w_N$

$$T = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 12 & 23 & 34 \\ \hline 3 & 45 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-2}\end{array} \rightsquigarrow w = 433254213,\ \mathit{content}(w) = (1,2,3,2,1)$$

$z^T = z_1 z_2^2 z_3^3 z_4^2 z_5$. Then $G_\lambda(z) = \sum_{T \text{ on } \mu} (-1)^{|T|-|\lambda|} z^T$.

The above T is λ-good ($\lambda = (5,3,1)$).



i.e., $\lambda + \mathit{content}(w_1 \cdots w_j)$ is a Young diagram for $1 \le i \le N$.
$\nu = \lambda + \mathit{content}(w) = (6,5,4,2,1)$.

注：Buch の規則の短い証明 (I.–Shimazaki 2011, MRL)

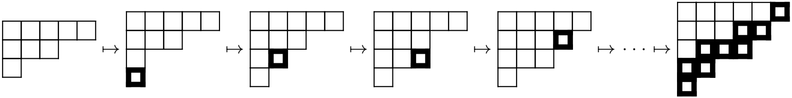
SVT と Buch の規則

Set-Valued Tableau on $\mu = (3, 2) \rightsquigarrow$ word $w = w_1 \cdots w_N$

$$T = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 12 & 23 & 34 \\ \hline 3 & 45 & \\ \cline{1-2}\end{array} \rightsquigarrow w = 433254213,\ content(w) = (1, 2, 3, 2, 1)$$

$z^T = z_1 z_2^2 z_3^3 z_4^2 z_5$. Then $G_\lambda(z) = \sum_{T \text{ on } \mu} (-1)^{|T| - |\lambda|} z^T$.

The above T is λ-good ($\lambda = (5, 3, 1)$).



i.e., $\lambda + content(w_1 \cdots w_j)$ is a Young diagram for $1 \leq i \leq N$.
$\nu = \lambda + content(w) = (6, 5, 4, 2, 1)$.

注：Buch の規則の短い証明 (I.–Shimazaki 2011, MRL)

GIAMBELLI 型の行列式公式

$A^*(Gr(d,\mathbb{C}^n))$ の場合は $\sigma_\lambda = \det(\sigma_{\lambda_i+j-i})_{1\le i,j\le d}$ (Giambelli 1902)

HUDSON–I.–MATSUMURA–NARUSE (2017)

$$G_\lambda(z) = \det\left(\sum_{k=0}^{\infty}\binom{i-j}{k}(-1)^k G_{\lambda_i+j-i+k}(z)\right)_{1\le i,j\le d}$$

ただし $G_{-j}(z) = 1$ $(j \ge 0)$.

注：$G_\lambda(z)$ を $[\mathcal{O}_\lambda]$ で置き換えても成り立つ．実際は幾何を使って証明.

量子 K 理論 $QK^0(Gr(d,\mathbb{C}^n))$ なんかもまだまだやることはあるが...

Giambelli 型の行列式公式

$A^*(Gr(d,\mathbb{C}^n))$ の場合は $\sigma_\lambda = \det(\sigma_{\lambda_i+j-i})_{1\le i,j\le d}$ (Giambelli 1902)

Hudson–I.–Matsumura–Naruse (2017)

$$G_\lambda(z) = \det\left(\sum_{k=0}^{\infty}\binom{i-j}{k}(-1)^k G_{\lambda_i+j-i+k}(z)\right)_{1\le i,j\le d}$$

ただし $G_{-j}(z)=1$ $(j\ge 0)$.

注：$G_\lambda(z)$ を $[\mathcal{O}_\lambda]$ で置き換えても成り立つ．実際は幾何を使って証明.

量子 K 理論 $QK^0(Gr(d,\mathbb{C}^n))$ なんかもまだまだやることはあるが. . .

Giambelli 型の行列式公式

$A^*(Gr(d,\mathbb{C}^n))$ の場合は $\sigma_\lambda = \det(\sigma_{\lambda_i+j-i})_{1\le i,j\le d}$ (Giambelli 1902)

Hudson–I.–Matsumura–Naruse (2017)

$$G_\lambda(z) = \det\left(\sum_{k=0}^{\infty}\binom{i-j}{k}(-1)^k G_{\lambda_i+j-i+k}(z)\right)_{1\le i,j\le d}$$

ただし $G_{-j}(z)=1$ $(j\ge 0)$.

注：$G_\lambda(z)$ を $[\mathcal{O}_\lambda]$ で置き換えても成り立つ．実際は幾何を使って証明.

量子 K 理論 $QK^0(Gr(d,\mathbb{C}^n))$ なんかもまだまだやることはあるが...

$K^0(OG(n))$ の Schubert calculus

$OG(n) := \{V \in Gr(n, \mathbb{C}^{2n+1}) \mid \sum_{-n\le i\le n} u_i v_{-i} = 0 \ (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V)\}$
$n(n+1)/2$ 次元の非特異射影多様体.
各 strict partition $\lambda = (n \ge \lambda_1 > \cdots > \lambda_\ell > 0)$ に対して
Schubert 多様体が定まる.

- $K^0(OG(n)) = \bigoplus_\lambda \mathbb{Z}[\mathcal{O}_\lambda]$ に対する $c^\nu_{\lambda\mu}$ の予想 (Thomas–Yong 2009)
- Pieri 規則の証明 (Buch–Ravikumar 2012)
- Thomas–Yong 予想の解決 (Clifford–Thomas-Yong 2014)
- $[\mathcal{O}_\lambda]$ を表現する対称多項式 $GP_\lambda(x)$ (I.–Naruse 2013)
- $c^\nu_{\lambda\mu}$ の別な記述（Pechenik–Yong 2017）
- $c^\nu_{\lambda\mu}$ のさらに別な予想，Pieri 規則の証明（Cho–I.–Nakasuji 2017）

$LG(n)$ (Lagrangian Grassmannian) の場合は，予想も立てられていない！
Pieri 規則は知られている (Buch–Ravikumar 2012)
別証明（I.–Numata–Naruse 2011）

$K^0(OG(n))$ の Schubert calculus

$OG(n) := \{V \in Gr(n, \mathbb{C}^{2n+1}) \mid \sum_{-n \le i \le n} u_i v_{-i} = 0 \ (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V)\}$
$n(n+1)/2$ 次元の非特異射影多様体.
各 strict partition $\lambda = (n \ge \lambda_1 > \cdots > \lambda_\ell > 0)$ に対して
Schubert 多様体が定まる.

- $K^0(OG(n)) = \bigoplus_\lambda \mathbb{Z}[\mathcal{O}_\lambda]$ に対する $c^\nu_{\lambda\mu}$ の予想 (Thomas–Yong 2009)
- Pieri 規則の証明 (Buch–Ravikumar 2012)
- Thomas–Yong 予想の解決 (Clifford–Thomas-Yong 2014)
- $[\mathcal{O}_\lambda]$ を表現する対称多項式 $GP_\lambda(x)$ (I.–Naruse 2013)
- $c^\nu_{\lambda\mu}$ の別な記述（Pechenik–Yong 2017）
- $c^\nu_{\lambda\mu}$ のさらに別な予想，Pieri 規則の証明（Cho–I.–Nakasuji 2017）

$LG(n)$ (Lagrangian Grassmannian) の場合は，予想も立てられていない！
Pieri 規則は知られている (Buch–Ravikumar 2012)
別証明（I.–Numata–Naruse 2011）

$K^0(OG(n))$ の Schubert calculus

$OG(n) := \{V \in Gr(n, \mathbb{C}^{2n+1}) \mid \sum_{-n \le i \le n} u_i v_{-i} = 0 \ (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V)\}$
$n(n+1)/2$ 次元の非特異射影多様体.
各 strict partition $\lambda = (n \ge \lambda_1 > \cdots > \lambda_\ell > 0)$ に対して
Schubert 多様体が定まる.

- $K^0(OG(n)) = \bigoplus_\lambda \mathbb{Z}[\mathcal{O}_\lambda]$ に対する $c_{\lambda\mu}^\nu$ の予想 (Thomas–Yong 2009)
- Pieri 規則の証明 (Buch–Ravikumar 2012)
- Thomas–Yong 予想の解決 (Clifford–Thomas-Yong 2014)
- $[\mathcal{O}_\lambda]$ を表現する対称多項式 $GP_\lambda(x)$ (I.–Naruse 2013)
- $c_{\lambda\mu}^\nu$ の別な記述（Pechenik–Yong 2017）
- $c_{\lambda\mu}^\nu$ のさらに別な予想，Pieri 規則の証明（Cho–I.–Nakasuji 2017）

$LG(n)$ (Lagrangian Grassmannian) の場合は，予想も立てられていない！
Pieri 規則は知られている (Buch–Ravikumar 2012)
別証明（I.–Numata–Naruse 2011）

$K^0(OG(n))$ の Schubert calculus

$OG(n) := \{V \in Gr(n, \mathbb{C}^{2n+1}) \mid \sum_{-n \le i \le n} u_i v_{-i} = 0 \ (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V)\}$
$n(n+1)/2$ 次元の非特異射影多様体.
各 strict partition $\lambda = (n \ge \lambda_1 > \cdots > \lambda_\ell > 0)$ に対して
Schubert 多様体が定まる.

- $K^0(OG(n)) = \bigoplus_\lambda \mathbb{Z}[\mathcal{O}_\lambda]$ に対する $c^\nu_{\lambda\mu}$ の予想 (Thomas–Yong 2009)
- Pieri 規則の証明 (Buch–Ravikumar 2012)
- Thomas–Yong 予想の解決 (Clifford–Thomas-Yong 2014)
- $[\mathcal{O}_\lambda]$ を表現する対称多項式 $GP_\lambda(x)$ (I.–Naruse 2013)
- $c^\nu_{\lambda\mu}$ の別な記述（Pechenik–Yong 2017）
- $c^\nu_{\lambda\mu}$ のさらに別な予想，Pieri 規則の証明（Cho–I.–Nakasuji 2017）

$LG(n)$ (Lagrangian Grassmannian) の場合は，予想も立てられていない！
Pieri 規則は知られている (Buch–Ravikumar 2012)
別証明（I.–Numata–Naruse 2011）

$K^0(OG(n))$ の Schubert calculus

$OG(n) := \{V \in Gr(n, \mathbb{C}^{2n+1}) \mid \sum_{-n \le i \le n} u_i v_{-i} = 0\ (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V)\}$
$n(n+1)/2$ 次元の非特異射影多様体.
各 strict partition $\lambda = (n \ge \lambda_1 > \cdots > \lambda_\ell > 0)$ に対して
Schubert 多様体が定まる.

- $K^0(OG(n)) = \bigoplus_\lambda \mathbb{Z}[\mathcal{O}_\lambda]$ に対する $c_{\lambda\mu}^{\nu}$ の予想 (Thomas–Yong 2009)
- Pieri 規則の証明 (Buch–Ravikumar 2012)
- Thomas–Yong 予想の解決 (Clifford–Thomas-Yong 2014)
- $[\mathcal{O}_\lambda]$ を表現する対称多項式 $GP_\lambda(x)$ (I.–Naruse 2013)
- $c_{\lambda\mu}^{\nu}$ の別な記述（Pechenik–Yong 2017）
- $c_{\lambda\mu}^{\nu}$ のさらに別な予想，Pieri 規則の証明（Cho–I.–Nakasuji 2017）

$LG(n)$ (Lagrangian Grassmannian) の場合は，予想も立てられていない！
Pieri 規則は知られている (Buch–Ravikumar 2012)
別証明（I.–Numata–Naruse 2011）

$K^0(OG(n))$ の Schubert calculus

$OG(n) := \{V \in Gr(n, \mathbb{C}^{2n+1}) \mid \sum_{-n\leq i\leq n} u_i v_{-i} = 0 \ (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V)\}$
$n(n+1)/2$ 次元の非特異射影多様体.
各 strict partition $\lambda = (n \geq \lambda_1 > \cdots > \lambda_\ell > 0)$ に対して
Schubert 多様体が定まる.

- $K^0(OG(n)) = \bigoplus_\lambda \mathbb{Z}[\mathcal{O}_\lambda]$ に対する $c^\nu_{\lambda\mu}$ の予想 (Thomas–Yong 2009)
- Pieri 規則の証明 (Buch–Ravikumar 2012)
- Thomas–Yong 予想の解決 (Clifford–Thomas-Yong 2014)
- $[\mathcal{O}_\lambda]$ を表現する対称多項式 $GP_\lambda(x)$ (I.–Naruse 2013)
- $c^\nu_{\lambda\mu}$ の別な記述（Pechenik–Yong 2017）
- $c^\nu_{\lambda\mu}$ のさらに別な予想，Pieri 規則の証明（Cho–I.–Nakasuji 2017）

$LG(n)$ (Lagrangian Grassmannian) の場合は，予想も立てられていない！
Pieri 規則は知られている (Buch–Ravikumar 2012)
別証明（I.–Numata–Naruse 2011）

$K^0(OG(n))$ の Schubert calculus

$OG(n) := \{V \in Gr(n, \mathbb{C}^{2n+1}) \mid \sum_{-n \le i \le n} u_i v_{-i} = 0 \ (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V)\}$
$n(n+1)/2$ 次元の非特異射影多様体.
各 strict partition $\lambda = (n \ge \lambda_1 > \cdots > \lambda_\ell > 0)$ に対して
Schubert 多様体が定まる.

- $K^0(OG(n)) = \bigoplus_\lambda \mathbb{Z}[\mathcal{O}_\lambda]$ に対する $c^\nu_{\lambda\mu}$ の予想 (Thomas–Yong 2009)
- Pieri 規則の証明 (Buch–Ravikumar 2012)
- Thomas–Yong 予想の解決 (Clifford–Thomas-Yong 2014)
- $[\mathcal{O}_\lambda]$ を表現する対称多項式 $GP_\lambda(x)$ (I.–Naruse 2013)
- $c^\nu_{\lambda\mu}$ の別な記述（Pechenik–Yong 2017）
- $c^\nu_{\lambda\mu}$ のさらに別な予想，Pieri 規則の証明（Cho–I.–Nakasuji 2017）

$LG(n)$ (Lagrangian Grassmannian) の場合は，予想も立てられていない！
Pieri 規則は知られている (Buch–Ravikumar 2012)
別証明（I.–Numata–Naruse 2011）

$K^0(OG(n))$ の Schubert calculus

$OG(n) := \{V \in Gr(n, \mathbb{C}^{2n+1}) \mid \sum_{-n \le i \le n} u_i v_{-i} = 0\ (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V)\}$
$n(n+1)/2$ 次元の非特異射影多様体.
各 strict partition $\lambda = (n \ge \lambda_1 > \cdots > \lambda_\ell > 0)$ に対して
Schubert 多様体が定まる.

- $K^0(OG(n)) = \bigoplus_\lambda \mathbb{Z}[\mathcal{O}_\lambda]$ に対する $c^\nu_{\lambda\mu}$ の予想 (Thomas–Yong 2009)
- Pieri 規則の証明 (Buch–Ravikumar 2012)
- Thomas–Yong 予想の解決 (Clifford–Thomas-Yong 2014)
- $[\mathcal{O}_\lambda]$ を表現する対称多項式 $GP_\lambda(x)$ (I.–Naruse 2013)
- $c^\nu_{\lambda\mu}$ の別な記述（Pechenik–Yong 2017）
- $c^\nu_{\lambda\mu}$ のさらに別な予想，Pieri 規則の証明（Cho–I.–Nakasuji 2017）

$LG(n)$ (Lagrangian Grassmannian) の場合は，予想も立てられていない！
Pieri 規則は知られている (Buch–Ravikumar 2012)
別証明（I.–Numata–Naruse 2011）

$K^0(OG(n))$ の Pieri 規則

Cho–I.–Nakasuji (2017)

$K(OG(n))$ に関する $c^{\nu}_{\lambda,m}$ は $\{1,\dots,n\}$ に関する set-valued word $X_1\cdots X_m$ であって以下をみたすものの個数と一致する：

- $X_1<\cdots<X_i$, $X_{i+1}\geq\cdots\geq X_m$ となる i がある.
- 各 X_j の数字を大きい順に並べたものを繋げてできる word を $w=w_1\cdots w_N$ とするとき任意の $1\leq j\leq N$ に対して $\lambda+content(w_1\cdots w_j)$ が strict partition になっている.
- content $w=\nu-\lambda$.

例：$\lambda=(6,4,1,0)$, $\nu=(7,6,3,1)$ とすると，$\nu-\lambda=(1,2,2,1)$．条件をみたす set-valued words は

$$21|3|4|3|2,\ 1|32|4|3|2,\ 1|2|3|4|32,\ 1|2|3|43|2,\ 31|4|3|2|2,\ 1|3|4|32|2,\ 1|3|43|2|2$$

なので $c^{\nu}_{\lambda,5}=7$.