$\boxed{7}$ 以下では1次元方向に並んでいて、その方向にのみ動くことができる粒子列の運動を考える。各粒子は隣の粒子とばね定数 K、自然長 a のばねでつながっている。t は時刻である。

問1. 質量 M の粒子が N 個、間隔 a で並んでいる。ℓ 番目の粒子の1次元方向の位置を u_ℓ とする。この系の運動方程式を記し、$u_\ell = A\exp[i(q\ell a + \omega t)], \omega > 0$ とおくことにより、振動数 ω を波数 q の関数として求めよ。

問2. 質量 M_A の粒子Aと質量 M_B の粒子Bが交互に間隔 a で並んでいる。2種類の粒子の総数はともに N 個である。ℓ 番目の粒子Aの1次元方向の位置を u_ℓ、粒子Bの1次元方向の位置を v_ℓ とする。この系の運動方程式を記し、$u_\ell = A\exp[i(q\ell a + \omega t)], v_\ell = B\exp[i(q\ell a + \omega t)], \omega > 0$ とおいて、$A \neq 0, B \neq 0$ の解が存在する条件より振動数 ω と波数 q の関係の式を求め、それぞれの q に対してその関係式を満たす ω がいくつあるか示せ。さらに $q = 0$ とした時、それぞれの ω がとる値を求めよ。

8 真空の誘電率を ε_0、真空の透磁率 μ_0 として以下の問いに答えよ。

問1. x 軸に垂直で無限に広い平面 $(x=0)$ に一様な面電荷密度 σ で電荷が分布している。

(1) この面電荷がつくる電場を求めよ。

(2) 静電ポテンシャルの大きさを求めよ。ただし、$x=0$ を基準点とする。

問2. 単位長さ当たりの巻き数 n、長さ l、断面積 S のソレノイドコイルを考える。

(1) ソレノイドコイルに電流 I を流したときに、コイル内外に生じる磁束密度の大きさを、積分型のアンペールの法則を用いて求めよ。

(2) ソレノイドコイルの自己インダクタンスを求めよ。

問3. 自己インダクタンス L のコイルと電気容量 C のコンデンサーを直列につないだ回路を考える。時刻 $t=0$ でコンデンサーの両極板に電荷 $\pm Q$ を与えたところ、電流が流れ始めた。

(1) コンデンサーの電荷 $Q(t)$ および電流 $I(t)$ の時間変化を求めよ。

(2) コンデンサー内の電場のエネルギー $U_E(t)$ とコイル内の磁場のエネルギー $U_B(t)$ の時間変化を求めよ。

9 質量 m の粒子がバネ定数 $k = m\omega^2$ のバネによってつながれている調和振動子を考える。ハミルトニアンは、運動量演算子 $\hat{p}$ および位置演算子 $\hat{x}$ を用いて

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2 \tag{1}$$

で表される。ここで、消滅演算子 $\hat{a}$ および生成演算子 $\hat{a}^\dagger$ を

$$\begin{aligned} \hat{a} &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} + \frac{i}{m\omega}\hat{p}\right), \\ \hat{a}^\dagger &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(\hat{x} - \frac{i}{m\omega}\hat{p}\right) \end{aligned}$$

と定義する。すると、数演算子 $\hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ を用いて $\hat{\mathcal{H}} = \hbar\omega\left(\hat{N} + \frac{1}{2}\right)$ と表すことができる。数演算子 $\hat{N}$ の固有値を n と表し、固有値 n に対しての固有関数を $\varphi_n(x)$ とする。なお、$\varphi_n(x)$ はすべて規格化条件 $\int_{-\infty}^{\infty} dx|\varphi_n(x)|^2 = 1$ を満たすものとする。

1. 交換関係 $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ を示せ。なお、$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ を用いて良い。
2. 交換関係 $[\hat{N}, \hat{a}]$ を求めよ。
3. $\phi(x) = \hat{a}\varphi_n(x)$ とする。$\hat{N}\phi$ を求めよ。
4. このとき $\int_{-\infty}^{\infty} dx|\phi(x)|^2$ を計算せよ。ここではエルミート共役の性質より $\phi^*(x) = (\hat{a}\varphi_n(x))^* = \varphi_n^*(x)\,\hat{a}^\dagger$ となることを用いても良い。
5. $\hat{a}\varphi_n(x)$ を、$\hat{N}$ の固有関数を用いて表せ。理由も説明せよ。
6. $\hat{N}$ の固有値 n が負でない整数であることを示せ。ここでは式 (1) の $\hat{\mathcal{H}}$ が半正定値なのでその固有値が負にならないことを用いても良い。
7. 生成消滅演算子による第 2 量子化と、量子状態の粒子性について述べよ。

$\boxed{10}$ 体積が $V = L^3$ の立方体容器の中に、相互作用しない質量 m の気体分子が N 個 $(N \gg 1)$ 含まれている。この系の統計的性質をミクロカノニカル集団の手法を用いて考察しよう。以下の計算では、半径 R の d 次元球の体積 $V_d(R)$ が必要となるが、これについては d に依存する定数 C_d を用いた表式 $V_d(R) = C_d R^d$ を用いよ。

ある一つの気体分子の運動量を $\boldsymbol{p} = (p_x, p_y, p_z)$ とする。量子力学によると、許される運動量の値は離散的となる。周期境界条件の下では、各成分が整数のベクトル $\boldsymbol{n} = (n_x, n_y, n_z)$ を用いて次式のようになる。

$$\boldsymbol{p} = \frac{2\pi\hbar}{L}\boldsymbol{n} = \frac{2\pi\hbar}{L}(n_x, n_y, n_x)$$

問 1. N 個の粒子は互いに区別できないことに留意し、全エネルギーが E 以下の状態数 $\Omega(E)$ を求めよ。

問 2. 全エネルギーが E と $E + \Delta E$ の間にある状態数 $W(E)$ を求めよ。ただし、$E \gg \Delta E$ として、ΔE について一次までの近似をせよ。

問 3. 系の温度を求め、エネルギー等分配則 $E = \frac{3}{2}Nk_BT$ が成り立つことを示せ。

問 4. 系の圧力を求めよ。

二次元の系で同様の問題を考える。すなわち、面積が $A = L^2$ の正方形の領域中に、相互作用しない質量 m の気体分子が N 個 $(N \gg 1)$ 含まれている。

問 5. 上で考察した三次元の場合と同様の解析から、二次元の場合のエネルギー等分配則の関係式を求めよ。

11

1. 図 1 はある金属の熱伝導率 κ の低温域における温度依存性を示したもので，試料 A と試料 B は純度が異なるだけで主成分の元素は同じである。以下の a,b に解答せよ。
   a. 試料 A, 試料 B で純度が高いほうはどちらか。理由を添えて答えよ。
   b. 両試料とも熱伝導率にピークが現れ，低温側で熱伝導率が低下する。その機構を説明せよ。

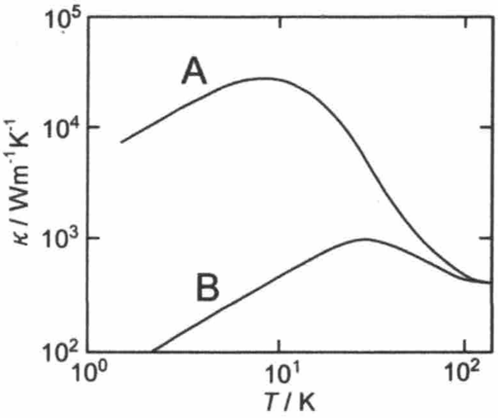

図 1

2. 図 2 は高純度の金属 C, D の極低温領域で調べられた比熱の温度依存性のデータをフィッティングした線で表したものである。金属 C, D は異なる元素であるが結晶構造，価数が同じで格子定数もほぼ同じである。縦軸との切片は電子比熱係数に相当し，金属 C, D についてそれぞれ γ_C, γ_D, 直線の傾きをそれぞれ α_C, α_D とする。また，金属 C の原子量は金属 D のそれより 1.7 倍大きい。以下の a,b に解答せよ。

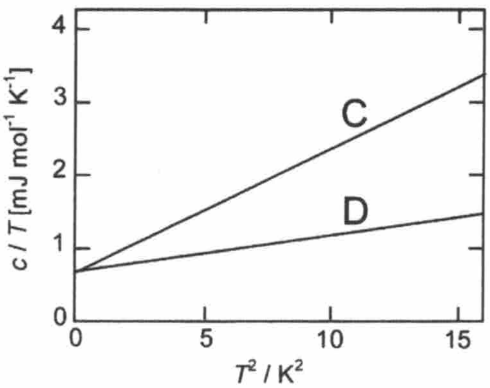

図 2

   a. 金属 C の比熱 c の温度依存性を γ_C, α_C, T を用いて表せ。
   b. γ_C と γ_D がほぼ同じ値であるのに対し，α_C と α_D は大きく異なる。その理由を説明せよ。

$\boxed{12}$ 高エネルギー宇宙線は地球の大気上空の原子と衝突し高エネルギーのミュー粒子を作る。このミュー粒子は高度 約 6 km から地上に到達することが知られている。ミュー粒子の静止系でのミュー粒子の平均寿命 $\tau = 2.2 \times 10^{-6}$ s で電子とニュートリノに崩壊する。ミュー粒子が光速 $c\ (= 3 \times 10^8\ \mathrm{m\ s^{-1}})$ で運動したとしても平均的な距離は $\tau \times c = 660$ m となり、ミュー粒子は地上では観測することができないことになる。以下の問いに答えよ。

問 1. ある慣性系 K (x, y, z, t) とそれに対して x 軸方向へ速度 v で運動している慣性系 K′ (x', y', z', t') においてローレンツ変換の式を書け。ただし、$\dfrac{v}{c} = \beta$、$\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ を用いて書け。

問 2. K′ 系の原点 O′ に固定されている時計で測った時間間隔を t'、また、K に固定されている時計で測った時間間隔を t とした時、t' は t を用いてどのように書けるか。また、この結果は何を意味するか述べよ。

問 3. 問 2 の結果を踏まえ、ミュー粒子の観測を再考し、ミュー粒子は問題なく 6 km という距離を移動でき、地上に到達できることを示せ。ただし、ミュー粒子の速度は $0.999c$、その時の $\sqrt{1-\beta^2} = 0.044$ とする。