1 以下の問に答えよ．

(1) G を群とし，$H_n\,(n \in \mathbb{N})$ を G の部分群とする．このとき，$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} H_n$ は G の部分群であることを示せ．

(2) $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ を実2次正方行列全体のなす環とする．

(a) $A \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ をひとつ選んで固定し，

$$R = \left\{ X \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}) \,\middle|\, AX = XA \right\}$$

とおく．このとき，R は $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ の部分環であることを示せ．

(b) (a) で $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とおく．このとき，R は可換環であることを示せ．

2 空間内の曲面が，パラメーター (u, v) を用いて，

$$\begin{cases} x = 3\dfrac{u-v}{u+v}, \\ y = 2\dfrac{uv+1}{u+v}, \qquad (u+v \neq 0) \\ z = \dfrac{uv-1}{u+v} \end{cases}$$

と表されている．パラメーター (u, v) で表される点を $\boldsymbol{p}(u, v)$ とするとき，以下の問に答えよ．

(1) 点 $\boldsymbol{p}(1, 0)$ での接平面の方程式を求めよ．

(2) 点 $\boldsymbol{p}(1, 0)$ でのガウス曲率と平均曲率を求めよ．

3 以下の各問に答えよ．

(1) (a) $z = 0$ を中心とする $\dfrac{1}{2z^3+1}$ のテイラー展開（マクローリン展開）を求めよ．

(b) $z = 0$ を中心とする $\dfrac{1}{z^{100}(2z^3+1)}$ のローラン級数展開を求めよ．

(c) $\displaystyle\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{1}{z^{100}(2z^3+1)}$ を求めよ．

(2) 以下の複素線積分の値を求めよ．ただし積分路の向きは正の向きとする．

(a) $\displaystyle\int_{|z-1|=2} \overline{z}^2 dz$　　(b) $\displaystyle\int_{|z+\frac{\pi}{2}|=1} \frac{dz}{\cos z}$　　(c) $\displaystyle\int_{|z-i|=2} \frac{dz}{(z^2+2z+3)^2}$

4 $\mathbb{R}$ を定義域とする関数項級数 f を

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$$

で定める．このとき，以下の問に答えよ．

(1) $\alpha > 0$ を実数の定数とするとき，無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ が収束するための α の条件を求めよ．

(2) f は $\mathbb{R}$ 上で連続であることを示せ．

(3) f は $\mathbb{R}$ 上で微分可能であることを示せ．

5 (X, d), (X', d') を距離空間，A を X の部分集合とし，$f : X \to X'$ を (X, d) から (X', d') への連続写像とする．このとき，以下の主張は成り立つか．常に成り立つ場合は証明し，必ずしも成り立たない場合は反例を挙げよ．

(1) A が高々可算集合ならば，A は (X, d) の閉集合である．

(2) A が (X, d) の閉集合ならば，f による A の像 $f(A)$ は (X', d') の閉集合である．

(3) A が (X, d) のコンパクト集合ならば，f による A の像 $f(A)$ は (X', d') のコンパクト集合である．

6 X, Y, Z を区間 $[0, 1]$ 上の一様分布に従う確率変数とし，独立であると仮定する．このとき，

$$S = \min\{X, Y, Z\}, \qquad T = \max\{X, Y, Z\}$$

とおく．以下の問に答えよ．

(1) T の分布関数 $P(T \leqq x)$ $(0 \leqq x \leqq 1)$，確率密度，および平均を求めよ．

(2) S の分布関数，確率密度，および平均を求めよ．