**7** 質量 $m_1$ の惑星 E、質量 $m_2$ の衛星 M と、質量 $m_3$ が十分小さいもう一つの衛星 S を考える。$m_1 > m_2$ とし、E,M,S は質点と見なせ、他の恒星、惑星などからの影響は無視できるとし、万有引力定数を $G$ とする。以下の問に答えよ。

問 1. E と M の重心 G の周りの等速円運動を考える。EM 間の距離 $a$ と $\omega$ の関係式および E,M それぞれの重心からの距離 $\ell_1, \ell_2$ を求めよ。

問 2. S は常に E と M を結ぶ線分上で M からの距離 $ax$ が一定の位置 L にある。L は線分 GE 上と線分 GM 上のどちらにあるか、その理由とともに記せ。さらに $ax$ の満たす式を求めよ。

問 3. $\delta = m_2/(m_1 + m_2)$ とおく。$\delta \to 0$ での $x$ の極限値 $x_0$、および $\delta = 0$ 近傍で $x = x_0 + c\delta^p$ とおいたときの実定数 $c, p$ を求めよ。

8 真空の誘電率を $\varepsilon_0$、真空の透磁率 $\mu_0$ として以下の問いに答えよ。

問 1. 半径 $a$ の球内に一様な密度 $\rho$ で電荷が分布している。

(1) 球の内外の電場を積分形のガウスの法則を用いて求めよ。

(2) 球の内外の静電ポテンシャルを求めよ。ただし、無限遠を基準点とする。

問 2. 無限に広い $xy$ 平面上を面電流密度 $i$ の電流が $y$ 軸の正方向に流れている。

(1) 磁場の向きと大きさを積分型のアンペールの法則を用いて求めよ。

(2) ベクトル・ポテンシャルの向きと大きさを求めよ。ただし、$z=0$ を基準点とする。

問 3. 極板の面積が $S$ で極板間の間隔が $d$ の平行板コンデンサーを考える。

(1) コンデンサーの電気容量 $C$ を求めよ。

(2) 両極板に交流電圧 $V=V_0\sin\omega t$ をかけたときに、コンデンサー内に生じる変位電流の大きさを求めよ。

$\boxed{9}$ 質量 $m$ の粒子が，区間 $0 \leq x \leq L$ に閉じ込められている。このとき，位置エネルギーは井戸型ポテンシャル

$$V(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq L \\ \infty & \text{それ以外} \end{cases}$$

で与えられるものとする。運動量演算子を $\hat{p} = \dfrac{\hbar}{i}\dfrac{\partial}{\partial x}$ とする。以下の問に答えよ。

問 1. シュレディンガー方程式と境界条件を具体的に示せ。

問 2. エネルギー準位 $E_n$ と波動関数 $\varphi_n(x)$ をすべて求めよ。ここで $n = 1, 2, 3, \ldots$ で、$E_n$ はエネルギーの低い順に並ぶものとする。

これ以降，基底状態 ($n = 1$ のもっともエネルギーの低い状態) についてのみ考えることにする。

問 3. この状態が、運動量の自乗 $\hat{p}^2$ および運動エネルギーの固有状態であることを具体的に計算して示せ。

問 4. 運動量の期待値 $\langle \hat{p} \rangle$ を計算し、運動量の不確定性 $\Delta p = \sqrt{\langle \hat{p}^2 \rangle - \langle \hat{p} \rangle^2}$ の値を求めよ。

問 5. 粒子は区間 $0 \leq x \leq L$ に分布して存在するので、位置の不確定性について $\Delta x \propto L$ が成り立つ。この基底状態について、不確定性原理を述べよ。

問 6. 同じ位置エネルギー $V(x)$ について、古典力学に従う粒子の最低エネルギー状態は $E = 0$ となる。問 4〜5 の結果をもとに、量子力学においては $E > 0$ となることを説明せよ。

$\boxed{10}$ 固体中の電子の単純化したモデルとして、理想フェルミ気体を考える。体積が $V$ の立方体容器の中に、相互作用しない質量 $m$、スピン $S = 1/2$ のフェルミ粒子が $N$ 個含まれ、温度 $T$ の熱浴に接しいる。$\mu$ を化学ポテンシャルとすると、エネルギー準位 $\epsilon$ にある粒子の数（占有数）の分布は、次のフェルミ分布関数により与えられる。

$$f(\epsilon) = \frac{1}{e^{(\epsilon-\mu)/k_BT} + 1}$$

プランク定数を $h(= 2\pi\hbar)$、ボルツマン定数を $k_B$ とする。

問 1. 絶対零度 $T = 0$ と有限温度 $T \neq 0$ のそれぞれの場合について、ファルミ分布関数の概形を示せ。横軸を $\epsilon$ として、関数形の特徴がわかるように適宜必要な値（物理量）を書き込むこと。特に、$T = 0$ での化学ポテンシャルがフェルミエネルギー $\epsilon_F$ であることに留意すること。

エネルギーの期待値 $\langle E\rangle$ は次の式により計算される。

$$\langle E\rangle = \int_0^\infty \epsilon D(\epsilon) f(\epsilon) d\epsilon$$

ここで、$D(\epsilon)$ は次式で与えられる一粒子状態密度である。

$$D(\epsilon) = \frac{\sqrt{2}Vm^{3/2}}{\pi^2\hbar^3}\epsilon^{1/2}$$

問 2. 絶対零度 $T = 0$ におけるエネルギーの期待値を計算し、$V, m, \hbar, \epsilon_F$ を用いて表せ。

問 3. フェルミエネルギーの表式 $\epsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{3\pi^2 N}{V}\right)^{2/3}$ を用いて、[問 2] の結果を書き直し、$\langle E\rangle = \frac{3}{5}N\epsilon_F$ となることを示せ。

有限温度の場合を考える。$k_BT \ll \epsilon_F$ の低温では、エネルギーの期待値は次の式で近似される。

$$\langle E\rangle = \frac{3}{5}N\epsilon_F + \frac{\pi^2}{4}N\frac{(k_BT)^2}{\epsilon_F}$$

問 4. 熱容量を計算せよ。

問 5. [問 4] の結果について、古典理想気体の熱容量と比較し、どのようなことが言えるか考察せよ。

# 11

1. 以下の a, b に解答せよ。
   a. 質量$m$[kg]，運動量$p$[kg m/s]の自由電子の運動エネルギー$E$[J]は，$E = p^2/2m$ である。電子波の波数ベクトルを$k$[m$^{-1}$]としたとき、$E$が$k^2$に比例することを示せ。
   b. 結晶中の電子波には結晶格子による影響が現れる。格子間隔が$a$[m]の1次元格子の場合の、$E - k$曲線を$-2\pi/a \leq k \leq 2\pi/a$の範囲で描き、その特徴を説明せよ。

2. 電子が半径$r$の円軌道上を回転運動し，内部に磁束密度$B$の磁束を閉じこめている場合を考える。電気素量を$e$，円周率を$\pi$とする。以下のことを参考に、設問 a-b に答えよ。
   ・電子波の波長$\lambda$は，プランク定数を$h$として，$\lambda = h/|p|$の関係にある。
   ・軌道上のベクトルポテンシャル$A$の軌道に沿った成分は，$A = rB/2$で，電子の運動量$p$は，$p = -eA = -erB/2$である。
   ・円軌道上の電子波が定常波になっている条件は$n$を整数として，$2\pi r/n = \lambda$である。
   ・円軌道内の全磁束$\Phi$は、$\Phi = \pi r^2 B$である。
   a. $\Phi$を$n, h, e$を用いて表せ。
   b. $n = 1$のとき，$\Phi$は最小となり磁束量子と呼ばれる。しかし超伝導体内の磁束量子の$\Phi$はその半分である。その理由を述べよ。

**12** 放射性元素の原子は別の元素へと一定の確率で崩壊し、その過程において放射線を放出する。以下の問に答えよ。

時刻 $t$ での未崩壊の原子数を $N(t)$ とし、単位時間当たりにこの原子が崩壊する確率を $\lambda$ とする。

問 1. $N(t)$ の時間変化 $\dfrac{dN}{dt}$ を $\lambda$ を用いた微分方程式として示せ。また、$t=0$ での未崩壊の原子数を $N_0$ とした時、$N(t)$ の式を求めよ。

問 2. $N(t)$ が $N_0$ の半分になるまでの時間を半減期とよぶ。半減期を $T$ として $T$ と $\lambda$ との間に成り立つ関係を導け。

問 3. 放射性元素の半減期を実測から求めたい。今、放射性元素が放出する放射線の個数を計数できる放射線検出器があるとすると、どのような測定をし、その測定によって得られた測定データから何を決めたら半減期が求まるか具体的に述べよ。

次に、ウラン $^{235}_{92}\mathrm{U}$ について考える。

問 4. 核分裂の一例として

$$^{235}_{92}\mathrm{U} + ^{1}_{0}\mathrm{n} \longrightarrow ^{141}_{56}\mathrm{B}a + ^{92}_{36}\mathrm{K}r + 3\,^{1}_{0}\mathrm{n}$$

を考える。1 個の $^{235}_{92}\mathrm{U}$ 原子核が上式により核分裂したとき、放出されるエネルギーは何 MeV か。ただし、各原子の質量は $^{235}_{92}\mathrm{U} = 235.0439\,\mathrm{u}$、$^{141}_{56}\mathrm{B}a = 140.9139\,\mathrm{u}$、$^{92}_{36}\mathrm{K}r = 91.8973\,\mathrm{u}$、$^{1}_{0}\mathrm{n} = 1.0087\,\mathrm{u}$ である。ここで、u は原子質量単位であり、$1\,\mathrm{u} = 1.66054 \times 10^{-27}$ kg、光速 $\mathrm{c} = 2.9979 \times 10^{8}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$、$1\,\mathrm{eV} = 1.6002 \times 10^{-19}\,\mathrm{J}$ である。また、1 u の質量に相当する静止エネルギーは 932.6 MeV である。

問 5. $^{235}_{92}\mathrm{U}$ は $\alpha$ 崩壊や $\beta^-$ 崩壊を繰り返して最終的に原子番号 82 の安定な鉛になる。ウランが鉛になった場合、質量数は 206, 207, 208 のうちどれか。また、その場合 $\alpha$ 崩壊および、$\beta^-$ 崩壊を何回行ったか。