2025 年度
青山学院大学
大学院理工学研究科理工学専攻

博士前期課程（9月）入学試験

基礎科学コース

「専門科目」
問題冊子

受験番号：	氏名：

[注意事項]

1．志願したコースの問題冊子であることを確認すること。
2．本問題冊子は表紙を含めて全 10 枚である。
3．問題冊子に受験番号と氏名を必ず記入すること。
4．問題は $\boxed{1}$ から $\boxed{12}$ までの12個の問題が含まれている。
   $\boxed{1}$ から $\boxed{12}$ の内から**3問を選択**し、解答用紙に記入すること。
   なお、解答用紙は1問ごとに1枚を使い、必ず解答用紙左上の枠内に問題番号を記入すること。解答欄が足りない場合には、その解答用紙の裏面も解答欄として使用してもよい。その場合、「裏面に続く」と表面の最後に明記すること。
5．解答冊子、問題冊子とも必ず提出すること。

1 以下の問に答えよ．

(1) G, G' を群とし，$f : G \to G'$ を群準同型とする．

(a) H が G の部分群ならば，$f(H)$ は G' の部分群であることを示せ．

(b) f は全射であるとする．H が G の正規部分群ならば，$f(H)$ は G' の正規部分群であることを示せ．

(2) $\mathbb{F}_7^\times$ を考える．

(a) $\mathbb{F}_7^\times$ の各元の位数を求めよ．

(b) $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ とする．行列の積によって A が生成する群を G とする．$\mathbb{F}_7^\times$ から G への群同型を（ひとつ）つくれ．

2 空間内の曲面がパラメータ (u, v) を用いて

$$\begin{cases} x &= \cos u \cos v \\ y &= \cos u \sin v \\ z &= \log\left(\tan\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right) - \sin u \end{cases}$$

$(0 < u < \dfrac{\pi}{2}, -\pi \leq v < \pi)$ と表わされているとき，次の問に答えよ．

(1) パラメータ (u, v) で表わされる点での単位法線ベクトルを求めよ．

(2) $(u, v) = (\frac{\pi}{4}, 0)$ を満たす点における接平面の方程式を求めよ．

(3) パラメータ (u, v) で表わされる点でのガウス曲率 K と平均曲率 H を求めよ．

3

(1) x, y を実変数とし，$z = x + yi$ とする．$u(x,y) = x^3 - 6x^2y - 3xy^2 + 2y^3$ のとき，$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ が正則関数になるような実数値関数 $v(x,y)$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin\theta}{(3 + \cos\theta + i\sin\theta)^3} d\theta$ の値を求めよ．

4

$c > 0$ を定数とする．偏微分方程式の初期値問題

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = f(x,t,u), \\ &u(x,0) = u_0(x), \\ &x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

の解 $u(x,t)$ を次のそれぞれの場合に求めよ．

(1) $f(x,t,u) = 0$　　(2) $f(x,t,u) = u$　　(3) $f(x,t,u) = xu$

5 $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ とし，関数 $d : X \times X \to \mathbb{R}$ を次で定める．

$$d(x, y) := |x_1^3 - y_1^3| + |x_2 - y_2| \qquad (x = (x_1, x_2),\ y = (y_1, y_2) \in X)$$

$o = (0, 0)$ とするとき，以下の問に答えよ．

(1) d は X 上の距離関数であることを示せ．

(2) $A = \{x \in X \mid d(o, x) < 1\}$ の表す部分を平面上に図示せよ．

(3) 関数 $f : X \to \mathbb{R}$ を次で定義する．

$$f(x) := x_1^3 \qquad (x = (x_1, x_2) \in X)$$

このとき，f は距離空間 (X, d) 上の連続関数であることを示せ．

6 C, λ を正の定数とし，X を確率分布が次で与えられる非負実数値の確率変数とする：

$$P(a \leqq X \leqq b) = \int_a^b Ce^{-\lambda x} dx \qquad (0 \leqq a < b).$$

(1) C を λ によって表せ．

(2) $s \geqq 0$ に対して，$X \geqq s$ の確率 $P(X \geqq s)$ を求めよ．

(3) $s, t \geqq 0$ に対して，条件つき確率 $P(X \geqq s + t | X \geqq s)$ を求めよ．

(4) X の積率母関数 $M(u) = E[e^{uX}]$ を求めよ．ただし，$E[Z]$ は確率変数 Z の平均（期待値）を表す．また，積率母関数が定義される u の範囲も明記すること．

(5) X の平均および分散を求めよ．