

2025 年度
青山学院大学
大学院理工学研究科理工学専攻
博士前期課程(9月)入学試験

各コース共通問題
「数 学」
問題冊子

受験番号：

氏名：

[注意事項]

1. 問題冊子は表紙を除いて2ページあり、問題は全部で6題ある。6題中3題を選択して解答せよ。
2. 解答冊子は表紙と3枚の解答用紙でできている。問題冊子表紙、解答冊子表紙およびすべての解答用紙に受験番号・氏名を忘れずに記入すること。
3. 問題1題ごとに解答用紙1枚を使い、必ず解答用紙左上の枠内に問題番号を記入すること。問題番号の記入がない場合、また2つ以上の番号の記入があった場合には、解答は無効とする。
4. 解答欄が足りない場合には、当該解答用紙の裏面も解答欄として使用してよい。その場合、「裏面に続く」と表面の最後に明記すること。
5. 解答冊子、問題冊子とも必ず提出すること。

1

次の連立 1 次方程式を解け.

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 6x_4 = 5 \\ 4x_1 - 5x_2 + 9x_3 - x_4 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 1 \\ -2x_1 + 3x_2 - 5x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

2

次の行列に関する以下の問に答えよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{2} & -1 \end{pmatrix}$$

- (1) 行列 A の固有値をすべて求めよ.
- (2) 行列 A と相似な対角行列があればすべて求めよ. ない場合はその理由を述べよ.
ただし, 行列 A と B が相似であるとは, $B = P^{-1}AP$ であるような正則行列 P が存在するときとする.
- (3) 自然数 n に対して, 行列 A^{3n} を求めよ.

3

2 変数関数

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

について, 次の問に答えよ.

- (1) f の停留点をすべて求めよ.
- (2) f の極値について論ぜよ.

4

(1) $f(x) = \frac{1}{x^3 + x^2 + x + 1}$ とする.

(a) 不定積分 $\int f(x) dx$ を求めよ.

(b) 広義積分 $\int_1^\infty f(x) dx$ の値を求めよ.

(2) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 9 \leq x^2 + y^2 \leq 16, y \geq |x|\}$ とする.

重積分 $\iint_D \frac{1}{x^2 + y^2 - 1} dx dy$ の値を求めよ.

5

(1) 次の関数の $x = 0$ におけるテイラー展開（マクローリン展開ということもある）を書け. (既知の公式を利用してもよいが, 使用した公式を明示的に書くこと.)

(i) $\log(1 + 3x)$

(ii) $\frac{1}{(x - 3)^2}$

(2) 次の関数 $f(x)$ に対して n 階微分 $f^{(n)}(x)$ ($n \geq 1$) を求め, n 階微分係数 $f^{(n)}(0)$ を計算せよ.

$$f(x) = (2x + 1)^{1/2} - (2x + 1)^{-1/2}$$

(3) 小問 (2) の関数 $f(x)$ の $x = 0$ におけるテイラー展開を x^3 の項まで求めよ. ただし 4 次以上の剰余項の具体的な形は求めず, $\varepsilon(x)$ と表してよい.

6

$a = a(x)$ を $(0, \frac{\pi}{2})$ 上で定義された連続関数とする. x を独立変数, y を従属変数とする微分方程式

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - ay = 0 \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right) \quad (*)$$

の 1 つの解が $y = \tan x$ であるとき, 以下の問に答えよ.

(1) $a = a(x)$ を求めよ.

(2) $y = C(x) \tan x$ が微分方程式 (*) の解であるとき, $C'(x) (\tan x)^2$ は定数であることを示せ. ただし, $C(x)$ は 2 階微分可能な関数であり, 定数関数ではないものとする.

(3) (*) の一般解を求めよ. 必要ならば, $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\frac{1}{\tan x} + C$ (C は積分定数) を用いても良い.