

1

以下の問に答えよ.

- (1) 55^{2024} を 13 で割った余りを求めよ. また, 55^{2024} を 143 で割った余りを求めよ.
- (2) 巡回群の部分群は巡回群であることを示せ.
- (3) G を有限群とする. $|G|$ が素数ならば G は巡回群であることを示せ.

2

パラメータ t ($0 \leq t < 2\pi$) で表される空間曲線 ℓ :

$$\begin{cases} x &= (2 + \cos 3t) \cos 2t \\ y &= (2 + \cos 3t) \sin 2t \\ z &= -\sin 3t \end{cases}$$

と, ℓ 上の点 $P = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ について, 以下の問に答えよ.

- (1) 点 P を通り, 曲線 ℓ に接する直線の方程式を求めよ.
- (2) 点 P での曲線 ℓ の曲率を求めよ.

3

複素関数 $f(z) = \frac{1}{(z+i)(z-2i)^4}$ について, 以下の問に答えよ.

- (1) $f(z)$ の孤立特異点と, そこでの留数をすべて求めよ.
- (2) R を正の実数とする. 原点を中心とする半径 R の円のうち, 虚部が 0 以上の部分を曲線 C とする. このとき $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_C f(z) dz = 0$ であることを示せ.
- (3) 積分 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x+i)(x-2i)^4} dx$ の値を求めよ. ここで, x は実変数である.

4 関数 $u = u(t, x)$ に対する波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0 < x < \pi, t > 0)$$

を初期条件

$$u(0, x) = x(\pi - x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = 0 \quad (0 \leq x \leq \pi)$$

および境界条件

$$u(t, 0) = u(t, \pi) = 0 \quad (t \geq 0)$$

の下で解け.

5 以下の問に答えよ.

(1) i を虚数単位とし, $\mathbb{C}$ 上の 2 項関係 R を次で定める.

$$zRw \stackrel{\text{定義}}{\iff} \text{ある } \theta \in \mathbb{R} \text{ が存在して } z = (\cos \theta + i \sin \theta)w$$

このとき, R は $\mathbb{C}$ 上の同値関係であることを示せ. また, $1 + i$ の同値類を複素平面上に図示せよ.

(2) 関数 $d: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ を次で定める.

$$d(x, y) := \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} \quad (x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2)$$

このとき, d は $\mathbb{R}^2$ 上の距離関数であることを示せ. また, $\mathbb{R}^2$ の部分集合

$$A = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid d(0, x) < 1\}$$

を平面上に図示せよ.

6 p を $0 < p < 1$ をみたす定数とし, X を確率分布が

$$P(X = r) = (1 - p)^r p \quad (r = 0, 1, 2, \dots)$$

で与えられる確率変数とする. 以下の問に答えよ.

- (1) s を 0 以上の整数とするとき, $X \geq s$ となる確率 $P(X \geq s)$ を求めよ.
- (2) s, t を 0 以上の整数とするとき, 条件つき確率 $P(X \geq s + t \mid X \geq s)$ を求めよ.
- (3) λ を実数とするとき, X の積率母関数 $M(\lambda) = E[e^{\lambda X}]$ を求めよ. ただし, $E[Z]$ は確率変数 Z の平均 (期待値) を表す. また, 積率母関数が定義される λ の範囲も明記すること.
- (4) X の平均を求めよ.
- (5) X の分散を求めよ.