

2024年度 実力試験

専門問題

2025 年 1 月 14 日 (火)
14:15 ~ 15:45 (90 分)

解答上の注意

- 問題は全部で 10 題ある。そのうち 3 題 を選択して答えよ。
但し、次の A, B から、それぞれ、1 題以上を選択すること。
A . 解析学 II + 解析学 IIB, 解析学 III, 応用初等代数 + 代数学 I, 集合と位相, 複素解析 I, 確率統計 (以上 6 題)
B . 幾何学 I + 幾何学 II, 代数学 II, 解析学 IV, 微分方程式 II + フーリエ解析 (以上 4 題)
- 各問題ごとに別々の解答用紙を使用し、選択した問題番号を所定の欄に明記すること。問題番号が正しく記入されていない答案は採点しない。
- すべての解答用紙に学生番号と氏名を記入し、解答用紙はすべて提出すること。
- 解答欄が不足する場合は裏面を使ってよい。但しその旨を表面に明記すること。
- 試験開始から 30 分経過した後は、解答用紙を提出の上、退出を認める。

1 (A. 解析学 II + 解析学 IIB)

(1) $|x| < 1$ とする. 級数 $\sum_{n=1}^{\infty} (\sin nt) x^n$ は t に関して $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ 上で一様収束すること
を示せ. 一様収束した関数を $f(t, x)$ と書く.

(2) $g(x) = \int_0^{\pi} f(t, x) dt$ を x のべき級数として表せ.

(3) 関数 $g(x)$ を求めよ. (初等関数, つまり三角関数, 指数・対数関数などを用いて簡潔な形
に表せ.)

2 (A. 解析学 III)

ベクトル値関数

$$\mathbf{r}(\theta, \varphi) = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta), \quad (\theta, \varphi) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times [0, 2\pi)$$

が定める xyz -空間上の曲面 $S : (x, y, z) = \mathbf{r}(\theta, \varphi)$ とスカラー場

$$f(x, y, z) = \frac{x^2 y^2}{2}$$

について, 以下の問に答えよ.

(1) 曲面 S の概形を図示せよ.

(2) 曲面 S の表面積を求めよ.

(3) $\Delta f = \nabla \cdot \nabla f$ を求めよ. ただし, ∇ はナブラ記号 $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$ を表す.

(4) 曲面 S 上の面積分 $\iint_S \Delta f \, dS$ を求めよ.

3 (A. 応用初等代数+代数学 I)

以下の問に答えよ.

(1) $55^{2024} \pmod{55}$ と $55^{2024} \pmod{14}$ を求めよ. また, 55^{2024} を 770 で割った余りを求めよ.

(2) 8 次対称群 S_8 の元 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 7 & 4 & 8 & 2 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ を巡回置換分解し,

σ の位数を求めよ. また, σ^5 を求めよ.

(3) $f: G \rightarrow G'$ を群準同型写像とする. このとき,

$$\operatorname{Im} f := \{f(g) \mid g \in G\}$$

は G' の部分群であることを示せ.

4 (A. 集合と位相)

$\mathbb{R}$ 上の関数

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

に対して, $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を次のように定める.

$$d(x, x') := |f(x) - f(x')| \quad (x, x' \in \mathbb{R})$$

$A := \{x \in \mathbb{R} \mid d(0, x) < 1\}$, $B := \{x \in \mathbb{R} \mid |x| < 1\}$ とおくとき, 以下の問に答えよ.

(1) f は単射であることを示せ.

(2) d は $\mathbb{R}$ 上の距離関数であることを示せ.

(3) A の表す部分を数直線上に図示せよ.

(4) 距離空間 $(\mathbb{R}, d)$ において, 点 0 は B の内点かどうか調べよ.

5 (A. 複素解析 I)

$f(z) = \frac{1}{z^3 + 8i}$ とする.

(1) $f(z)$ の孤立特異点をすべて求めよ.

(2) 原点を中心とする半径 R の円のうち, 虚部が 0 以上の部分を C_1 とするとき,

$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_1} f(z) dz$ の値を求めよ. ただし, C_1 は始点を $(R, 0)$ とし, 終点を $(-R, 0)$ とする.

(3) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^3 + 8i} dx$ の値を求めよ.

6 (A. 確率統計)

(1) p を $0 < p < 1$ を満たす定数, n を自然数とし, X を二項分布に従う, つまり, $r = 0, 1, \dots, n$ に対し $X = r$ の確率 $P(X = r)$ が

$$P(X = r) = {}_n C_r p^r (1 - p)^{n-r}, \quad r = 0, 1, \dots, n$$

で与えられる確率変数とする.

二項定理 $(x + y)^n = \sum_{r=0}^n {}_n C_r x^r y^{n-r}$ を用いて次の問に答えよ.

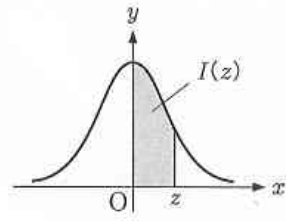
(i) X の積率母関数 $M(t) = E[e^{tX}]$ を求めよ. ただし, $E[Y]$ は確率変数 Y の期待値を表す.

(ii) X の期待値が np , 分散が $np(1 - p)$ であることを示せ.

(2) サイコロを 500 回投げたときの 6 の出る回数を S とするとき, $80 \leq S \leq 90$ の確率 $P(80 \leq S \leq 90)$ を, ド・モワブル-ラプラスの定理を用い, 次の正規分布表を利用して求めよ.

付表 2 正規分布表 I

$$z \rightarrow I(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2517	.2549
0.7	.2580	.2611	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767

7 (B. 幾何学 I + 幾何学 II)

空間において、実数パラメータ u, v により表される曲面 Σ を

$$\begin{cases} x &= u + 2v \\ y &= 3v \\ z &= -\frac{1}{4}u^2 - uv \end{cases}$$

により与えるとき、 Σ 上の点 $P = (2, 3, 0)$ について、次の問に答えよ.

- (1) 点 P におけるガウス曲率 K と平均曲率 H を求めよ
- (2) 点 P における接平面の方程式を求めよ.
- (3) 点 P を通る直線で、 Σ に含まれるものをすべてあげよ (直線の方程式を求めること).

8 (B. 代数学 II)

- (1) 整数環 $\mathbb{Z}$ のイデアル $I_1 = 6\mathbb{Z}$, $I_2 = 9\mathbb{Z}$ について、以下のイデアルを単項イデアルの形で表せ. この問題については結果のみ答えればよい.

$$(i) \quad I_1 \cap I_2 \qquad (ii) \quad I_1 + I_2 \qquad (iii) \quad I_1 I_2$$

- (2) ガウス整数環 $\mathbb{Z}[i]$ において、 $\alpha = 19 + 8i$ と $\beta = 11 + 10i$ の最大公約元 γ を求めよ. また $\alpha x + \beta y = \gamma$ となるような $x, y \in \mathbb{Z}[i]$ の組を 1 つ求めよ.
- (3) ガウス整数環 $\mathbb{Z}[i]$ における 53 の素元分解を求め、それを用いて $53^2 = a^2 + b^2$ を満たす整数の組 (a, b) (ただし $a > b > 0$) を求めよ.

9 (B. 解析学 IV)

以下の問に答えよ。ただし、 $\mathbb{R}$ 上の連続関数がルベーク可測であることは認めてよい。

- (1) ルベーク積分における単調収束定理を利用して、次の極限値を求めよ。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} |x| \exp \left(-|x|^2 - \frac{|x|^3}{n} \right) dx$$

(単調収束定理の内容と、定理が適用できる理由を述べること。)

- (2) ルベーク積分におけるルベークの収束定理を利用して、次の極限値を求めよ。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 + e^{-(x-n)^2}}{1 + x^2} dx$$

(ルベークの収束定理の内容と、定理が適用できる理由を述べること。)

10 (B. 微分方程式 II + フーリエ解析)

C^1 級関数 $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ に関する 1 階双曲型偏微分方程式のコーシー問題

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial t}(t, x) - \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) &= 0, & -\infty < t < \infty, & \quad -\infty < x < \infty \\ f(0, x) &= f_0(x), & -\infty < x < \infty\end{aligned}$$

を考える．ここに， $f_0: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ は連続的微分可能で周期 2π の周期関数とする．この問題に対する次の 3 通りの解析について，下の各問に答えよ．

解析 A

問題の形から，関数 f が解ならば，各 $t \in \mathbb{R}$ に対して 1 変数関数 $x \mapsto f(t, x)$ は周期 2π の周期関数と考えられる．そのフーリエ展開

$$f(t, x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi_n(t) e^{inx}, \quad -\infty < x < \infty \quad (\text{A0})$$

を関数 f の表現形式とみなして，各変数について形式的に項別微分すると，次の式が得られる：

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t, x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi'_n(t) e^{inx}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} in \phi_n(t) e^{inx}$$

これらは等しいので，フーリエ展開の一意性により，各 n に対して次の等式が成り立たなければならない：

$$\phi'_n(t) = in \phi_n(t) \quad (\text{A1})$$

さらに，初期関数 f_0 のフーリエ展開を

$$f_0(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \quad -\infty < x < \infty \quad (\text{A2})$$

と表せば，フーリエ展開の一意性により，各 n に対して次の等式が成り立たなければならない：

$$\phi_n(0) = c_n \quad (\text{A3})$$

こうして得られた常微分方程式の初期値問題 (A1), (A3) を解けば，

$$\phi_n(t) = c_n e^{int}$$

となる．これを (A0) に代入することにより

$$f(t, x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in(t+x)}, \quad -\infty < x < \infty \quad (\text{A4})$$

を得る．これを初期関数 f_0 のフーリエ展開 (A2)

$$f(t, x) = f_0(t + x), \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad (\text{A5})$$

と書けることがわかる．

解析 B

関数 f として，次の形のものを考える：

$$f(t, x) = f_0(t + x), \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad (\text{B0})$$

これを各変数について偏微分した結果は

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t, x) = f'_0(t + x) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x)$$

となることより，次の等式が成り立つことがわかる：

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t, x) - \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) = 0$$

さらに，式 (B0) において， $t = 0$ とおけば，

$$f(0, x) = f_0(x), \quad -\infty < x < \infty$$

となるので，式 (B0) によって定義された関数 f は所与のコーシー問題の解である．

解析 C

関数 f を所与のコーシー問題の解とする．任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し，1 変数関数 $t \mapsto f(t, x - t)$ を t について微分すると，

$$(f(t, x - t))' = \frac{\partial f}{\partial t}(t, x - t) - \frac{\partial f}{\partial x}(t, x - t) = 0$$

となる．これは， $f(t, x - t)$ が t によらないことを意味し，したがって

$$f(t, x - t) = f(0, x - 0) = f_0(x), \quad -\infty < t < \infty$$

これより，関数 f は

$$f(t, x) = f_0(t + x), \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

の形に表されることがわかる．

問 1 所与のコーシー問題に関して，解析 A から言えることは下の主張のどれか？（複数選択可．選択の理由も述べること．）

問 2 所与のコーシー問題に関して，解析 B から言えることは下の主張のどれか？（複数選択可．選択の理由も述べること．）

問 3 所与のコーシー問題に関して，解析 C から言えることは下の主張のどれか？（複数選択可．選択の理由も述べること．）

選択肢

P1 解が存在する．

P2 解は存在しないか，存在すれば唯一つである．

P3 解は存在して，唯一つである．

P4 関数： $(t, x) \mapsto f_0(t + x)$ は解である．

P5 解があれば，それは関数： $(t, x) \mapsto f_0(t + x)$ である．

P6 解は関数： $(t, x) \mapsto f_0(t + x)$ と予想される．