

# 2024年度 実力試験

## 基礎問題

2025年1月14日(火)

13:00～14:00(60分)

### 解答上の注意

- 問題は全部で3題ある。全ての問題に解答すること。
- 各問題ごとに別々の解答用紙を使用し、解答した問題番号を所定の欄に明記すること。問題番号が正しく記入されていない答案は採点しない。
- すべての解答用紙に学生番号と氏名を記入し、解答用紙は3枚とも提出すること。
- 解答欄が不足する場合は裏面を使ってよい。但しその旨を表面に明記すること。
- 途中退出は不可とする。



1

実対称行列  $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$  の直交行列による対角化を考える。以下の問に答えよ。

- (1)  $A$  の固有値を求めよ。
- (2)  $A$  の固有値それぞれについて、対応する固有空間の基底を求めよ。
- (3)  $A$  の固有ベクトルからなる  $\mathbb{R}^3$  の基底が (2) の結果から得られる。  $\mathbb{R}^3$  のこの基底にグラム・シュミットの直交化法を適用することにより、  $\mathbb{R}^3$  の正規直交基底を構成せよ。
- (4)  $A$  を直交行列により対角化せよ。なお、  $P^{-1}AP$  が対角行列になるような直交行列  $P$  も求めること。

**2**

(I) 次の関数の極限值を求めよ.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 2x} \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 2^x}{x} \quad (3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Arcsin} x - x}{x^3}$$

(II) 次の累次積分の値を求めよ.

$$\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^1 e^{y/x} dx$$

(III) 2変数関数

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - x - y$$

の閉円板  $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$  における最大・最小を求めよ.

**3**

(1) 次の  $x$  を独立変数,  $u$  を従属変数とする微分方程式

$$u''(x) - u'(x) - 6u(x) = 0$$

の一般解を求めよ.

(2) 次の  $x$  を独立変数,  $u$  を従属変数とする微分方程式

$$u''(x) - u'(x) - 6u(x) = \sin x$$

の一般解を求めよ.