複素解析 I 演習 No.7 問題略解

(間違えている可能性は十分あるので，鵜呑みにしないこと)

この略解では，積分の評価・留数の計算等において，式変形を適宜省略している．試験などで解答を書く際には必要な計算・説明を書くこと．

7-1. $z=e^{i\theta}$ とおくと，

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{2i-\sin\theta}d\theta=\cdots=-2\int_{|z|=1}\frac{dz}{z^2+4z-1}=-2\cdot 2\pi i\operatorname*{Res}_{z=-2+\sqrt{5}}\frac{1}{z^2+4z-1}=\cdots=-\frac{2\pi i}{\sqrt{5}}.$$

7-2. (1) $z=e^{\pi i/4},e^{3\pi i/4},e^{5\pi i/4},e^{7\pi i/4}$. 図は略.

(2) $C_1: z(x)=x,\ (0\le x\le R),\ \ I_1=\displaystyle\int_0^R\frac{dx}{x^4+1}$.

$C_2: z(\theta)=Re^{i\theta},\ (0\le\theta\le\frac{\pi}{2}),\ \ I_2=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{Rie^{i\theta}}{(Re^{i\theta})^4+1}d\theta$.

$C_3: z(x)=ix,\ (x$ は R から $0),\ \ I_3=-i\displaystyle\int_0^R\frac{dx}{x^4+1}$.

(2) $\displaystyle\lim_{R\to\infty}I_1=\int_0^\infty\frac{dx}{x^4+1}=I,\ \ \lim_{R\to\infty}I_3=-i\int_0^\infty\frac{dx}{x^4+1}=-iI.$

(3) $\displaystyle|I_2|\le\int_0^{\pi/2}\left|\frac{Rie^{i\theta}}{(Re^{i\theta})^4+1}\right|d\theta\le\int_0^{\pi/2}\frac{R}{R^4-1}d\theta=\frac{\pi}{2}\frac{R}{R^4-1}\underset{R\to\infty}{\longrightarrow}0$ により $\displaystyle\lim_{R\to\infty}I_2=0.$

(4) $\displaystyle\int_C\frac{dz}{z^4+1}=2\pi i\operatorname*{Res}_{z=e^{\pi i/4}}\frac{1}{z^4+1}=\cdots=\frac{(1-i)\pi}{2\sqrt{2}}.$

(5) $\displaystyle(1-i)I=\frac{(1-i)\pi}{2\sqrt{2}}\Leftrightarrow I=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$

7-3. 積分路 A の曲線は $C_1: z(x)=x,\ (-R\le x\le R),\ C_2: z(\theta)=Re^{i\theta},\ (0\le\theta\le\pi)$ と表される.

(1) この積分を I とする. $\displaystyle\int_{C_1}\frac{dz}{(z^2+1)^4}=\cdots\underset{R\to\infty}{\longrightarrow}2I,$

$$\left|\int_{C_2}\frac{dz}{(z^2+1)^4}\right|\le\int_0^\pi\left|\frac{Rie^{i\theta}}{\{(Re^{i\theta})^2+1\}^4}\right|d\theta\le\int_0^\pi\frac{R}{(R^2-1)^4}d\theta=\frac{\pi R}{(R^2-1)^4}\underset{R\to\infty}{\longrightarrow}0.$$

よって $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{C_1+C_2}\frac{dz}{(z^2+1)^4}=2I.$

一方，

$$\int_{C_1+C_2}\frac{dz}{(z^2+1)^4}=2\pi i\operatorname*{Res}_{z=i}\frac{1}{(z^2+1)^4}=\cdots=\frac{5}{16}\pi.$$ 以上により $I=\dfrac{5}{32}\pi.$

(2) この積分を I とする. (1) と同様にして，まず $\displaystyle\int_{C_1}\frac{e^{iaz}}{z^4+1}dz=\int_{-R}^R\frac{e^{iax}}{x^4+1}dx\underset{R\to\infty}{\longrightarrow}I.$

次に $\displaystyle\left|\int_{C_2}\frac{e^{iaz}}{z^4+1}dz\right|\le\int_0^\pi\left|\frac{e^{iaR(\cos\theta+i\sin\theta)}Rie^{i\theta}}{(Re^{i\theta})^4+1}\right|d\theta\le\int_0^\pi\frac{Re^{-aR\sin\theta}}{R^4-1}d\theta.$

ここで $a>0,\ R>0$ と $0\le\theta\le\pi$ により $\sin\theta\ge0$ であることから $-aR\sin\theta\le0$ であるので，$e^{-aR\sin\theta}\le e^0=1$. よって $\displaystyle\left|\int_{C_2}\frac{e^{iaz}}{z^4+1}dz\right|\le\int_0^\pi\frac{R}{R^4-1}d\theta=\frac{\pi R}{R^4-1}\underset{R\to\infty}{\longrightarrow}0.$

$\displaystyle\therefore\lim_{R\to\infty}\int_{C_1+C_2}\frac{e^{iaz}}{z^4+1}dz=I.$ 一方，

$$\int_{C_1+C_2}\frac{e^{iaz}}{z^4+1}dz=2\pi i\left(\operatorname*{Res}_{z=e^{\pi i/4}}\frac{e^{iaz}}{z^4+1}+\operatorname*{Res}_{z=e^{3\pi i/4}}\frac{e^{iaz}}{z^4+1}\right)=\frac{\pi}{\sqrt{2}}e^{-a/\sqrt{2}}\left(\sin\frac{a}{\sqrt{2}}+\cos\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$$ となり，これが I に等しい.

(3) $R>0$ は十分に大きいとする．積分路 B をパラメータ表示すると

$C_1: z(x)=x,\ (-R\le x\le R),\quad C_2: z(t)=R+it,\ (0\le t\le R),$

$C_3: z(t)=t+iR,\ (t$ は R から $-R),\quad C_4: z(t)=-R+it,\ (t$ は R から $0).$

それぞれの積分路に沿った $f(z):=\dfrac{e^{iz}}{z-ai}$ の線積分を評価する.

$$\int_{C_1}f(z)\,dz=\int_{-R}^R\frac{e^{ix}}{x-ai}dx\underset{R\to\infty}{\longrightarrow}\int_{-\infty}^\infty\frac{e^{ix}}{x-ai}dx.$$

$$\left|\int_{C_2}f(z)\,dz\right|\le\int_0^R\left|\frac{ie^{-t}e^{iR}}{R+it-ai}\right|dt\le\int_0^R\frac{e^{-t}}{R}dt=\frac{1}{R}(1-e^{-R})\underset{R\to\infty}{\longrightarrow}0.$$

$$\left|\int_{C_3}f(z)\,dz\right|\le\int_{-R}^R\left|\frac{e^{-R}e^{it}}{t+(R-a)i}\right|dt\le\int_{-R}^R\frac{e^{-R}}{R-a}dt=\frac{2Re^{-R}}{R-a}\underset{R\to\infty}{\longrightarrow}0.$$

$$\left|\int_{C_4}f(z)\,dz\right|\le\int_0^R\left|\frac{ie^{-t}e^{-iR}}{-R+it-ai}\right|dt\le\int_0^R\frac{e^{-t}}{R}dt=\frac{1}{R}(1-e^{-R})\underset{R\to\infty}{\longrightarrow}0.$$

以上により，$\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{C_1+C_2+C_3+C_4}f(z)\,dz=\int_{-\infty}^\infty\frac{e^{ix}}{x-ai}dx.$

ここで $a>0$ により，$C_1+C_2+C_3+C_4$ で囲まれた領域に含まれる $f(z)$ の孤立特異点は $z=ai$ のみであり，1 位の極であるから，$\displaystyle\int_{C_1+C_2+C_3+C_4}f(z)\,dz=2\pi i\operatorname*{Res}_{z=ai}\frac{e^{iz}}{z-ai}=2\pi ie^{-a}$ であり，これが求める積分の値である.

(4) $f(z)=\dfrac{1}{(z^2+1)^2(z^2+2)}$ とする．$R>0$ を十分大きな数として，積分路 A を使うと，

$$\int_{C_1}f(z)\,dz\underset{R\to\infty}{\longrightarrow}\int_{-\infty}^\infty\frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+2)}.$$

$$\left|\int_{C_2}f(z)\,dz\right|\le\int_0^\pi\left|\frac{Rie^{i\theta}}{((Re^{i\theta})^2+1)^2((Re^{i\theta})^2+2)}\right|d\theta\le\int_0^\pi\frac{R}{(R^2-1)^2(R^2-2)}d\theta$$
$$=\frac{\pi R}{(R^2-1)^2(R^2-2)}\underset{R\to\infty}{\longrightarrow}0.$$

$$\therefore\lim_{R\to\infty}\int_{C_1+C_2}f(z)\,dz=\int_{-\infty}^\infty\frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+2)}.$$

一方，C_1+C_2 で囲まれた領域に含まれる $f(z)$ の孤立特異点は $z=i$ と $z=\sqrt{2}i$ であり，これらは共に極，位数はそれぞれ 2, 1 であるので，

$$\int_{C_1+C_2}f(z)\,dz=2\pi i\left(\operatorname*{Res}_{z=i}\frac{1}{(z^2+1)^2(z^2+2)}+\operatorname*{Res}_{z=\sqrt{2}i}\frac{1}{(z^2+1)^2(z^2+2)}\right)=\cdots=\frac{\sqrt{2}-1}{2}\pi$$

であり，これが求める積分の値に等しい.

7-4. (1) $z=e^{i\theta}$ とおくと，$\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\sin\theta}{\sqrt{5}+\sin\theta}d\theta=\frac{1}{i}\int_{|z|=1}\frac{z^2-1}{z(z^2+2\sqrt{5}iz-1)}dz$

$$=\frac{2\pi i}{i}\left(\operatorname*{Res}_{z=0}\frac{z^2-1}{z(z^2+2\sqrt{5}iz-1)}+\operatorname*{Res}_{z=(2-\sqrt{5})i}\frac{z^2-1}{z(z^2+2\sqrt{5}iz-1)}\right)=\cdots=(2-\sqrt{5})\pi.$$

(2) $f(z) = \dfrac{z}{z^6+1}$ とし，積分路として $C_1 : 0 \to R$ の線分，C_2 : 円 $|z| = R$ に沿って R から $Re^{\pi i/3}$, $C_3 : Re^{\pi i/3} \to 0$ の線分，を採用する．

$\displaystyle\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_0^R \frac{x}{x^6+1}dx \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^\infty \frac{x}{x^6+1}dx.$

$\displaystyle\int_{C_3} f(z)\,dz = \int_R^0 \frac{e^{\pi i/3}x}{x^6+1}d(e^{\pi i/3}x) \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} -e^{2\pi i/3}\int_0^\infty \frac{x}{x^6+1}dx.$

$\displaystyle\left|\int_{C_2} f(z)\,dz\right| \le \int_0^{\pi/3}\left|\frac{Re^{i\theta}\cdot Rie^{i\theta}}{(Re^{i\theta})^6+1}\right|d\theta \le \int_0^{\pi/3}\frac{R^2}{R^6-1}d\theta = \frac{\pi R^3}{3(R^6-1)} \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0$ により

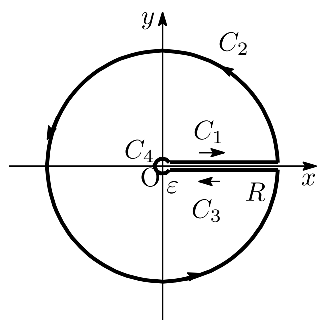
$\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{C_1+C_2+C_3} f(z)\,dz = (1-e^{2\pi i/3})\int_0^\infty \frac{x^2}{x^6+1}dx.$

一方，$C_1+C_2+C_3$ で囲まれた領域に含まれる $f(z)$ の孤立特異点は $z = e^{\pi i/6}$ であり，この点における $f(z)$ の留数は

$$\operatorname*{Res}_{z=e^{\pi i/6}} \frac{z}{z^6+1} = \lim_{z\to e^{\pi i/6}} \frac{(z-e^{\pi i/6})z}{z^6+1} = \cdots = \frac{1}{6e^{2\pi i/3}}.$$

$$\therefore \int_0^\infty \frac{x^2}{x^6+1}dx = \frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}\int_{C_1+C_2+C_3} f(z)\,dz = \frac{2\pi i}{1-e^{2\pi i/3}}\operatorname*{Res}_{z=e^{\pi i/6}}\frac{z}{z^6+1} = \cdots = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

(3) $f(z) = \dfrac{z^{a-1}}{z^n+1}$ とし，$R>0$ を十分大きな数，$\varepsilon>0$ を十分小さな数として，右図のような積分路 $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$ を考える．



このとき各曲線のパラメータ表示は

$C_1 : z(x) = x$, $(\varepsilon \le x \le R)$

$C_2 : z(\theta) = Re^{i\theta}$, $(0 \le \theta \le 2\pi)$

$C_3 : z(x) = xe^{2\pi i}$, (x は R から ε),

$C_4 : z(\theta) = \varepsilon e^{i\theta}$, ($\theta$ は 2π から 0)

となる．

$\displaystyle\therefore \int_{C_1} f(z)\,dz = \int_\varepsilon^R \frac{x^{a-1}}{x^n+1}dx \underset{R\to\infty,\varepsilon\to+0}{\longrightarrow} \int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{x^n+1}dx.$

$\displaystyle\left|\int_{C_2} f(z)\,dz\right| \le \int_0^{2\pi}\left|\frac{R^{a-1}e^{i(a-1)\theta}\cdot Rie^{i\theta}}{(Re^{i\theta})^n+1}\right|d\theta \le \int_0^{2\pi}\frac{R^a}{R^n-1}d\theta = \frac{2\pi R^a}{R^n-1} \underset{R\to\infty,\varepsilon\to+0}{\longrightarrow} 0$

($\because a < n$).

$\displaystyle\int_{C_3} f(z)\,dz = \int_R^\varepsilon \frac{(xe^{2\pi i})^{a-1}}{(xe^{2\pi i})^n+1}dx = -e^{2(a-1)\pi i}\int_\varepsilon^R \frac{x^{a-1}}{x^n+1}dx \underset{R\to\infty,\varepsilon\to+0}{\longrightarrow} -e^{2a\pi i}\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{x^n+1}dx$

($\because e^{-2\pi i} = 1$).

$\displaystyle\left|\int_{C_4} f(z)\,dz\right| \le \int_0^{2\pi}\left|-\frac{\varepsilon^{a-1}e^{i(a-1)\theta}\cdot \varepsilon ie^{i\theta}}{(\varepsilon e^{i\theta})^n+1}\right|d\theta \le \int_0^{2\pi}\frac{\varepsilon^a}{1-\varepsilon^n}d\theta = \frac{2\pi\varepsilon^a}{1-\varepsilon^n} \underset{R\to\infty,\varepsilon\to+0}{\longrightarrow} 0$ ($\because a > 0$).

以上により $\displaystyle\lim_{R\to\infty,\varepsilon\to+0}\int_C f(z)\,dz = (1-e^{2(a-1)\pi i})\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{x^n+1}dx.$

一方，C で囲まれた領域に含まれる $f(z)$ の孤立特異点は $z = e^{\pi i/n}, e^{3\pi i/n}, \dots, e^{(2n-1)\pi i/n}$ でありこれらは全て 1 位の極である．$e^{(2k+1)\pi i/n}$ における $f(z)$ の留数は

$$\operatorname*{Res}_{z=e^{(2k+1)\pi i/n}} f(z) = \lim_{z\to e^{(2k+1)\pi i/n}} \frac{z^{a-1}(z-e^{(2k+1)\pi i/n})}{z^n+1} = \cdots = \frac{e^{(a-n)(2k+1)\pi i/n}}{n} = -\frac{e^{(2k+1)a\pi i/n}}{n}$$

($\because e^{-(2k+1)\pi i} = -1$)．よって

$$\begin{aligned}(1-e^{2a\pi i})\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{x^n+1}dx &= \lim_{R\to\infty,\varepsilon\to+0}\int_C f(z)\,dz = 2\pi i\sum_{k=0}^{n-1}\operatorname*{Res}_{z=e^{(2k+1)\pi i/n}} f(z)\\ &= 2\pi i\sum_{k=0}^{n-1}(-1)\frac{1}{n}e^{(2k+1)a\pi i/n} = -\frac{2\pi i}{n}e^{a\pi i/n}\frac{1-e^{n\cdot 2a\pi i/n}}{1-e^{2a\pi i/n}}\end{aligned}$$

(等比数列の和の公式を使った) なので，

$$I = \frac{1}{1-e^{2a\pi i}} \times (-1)\frac{2\pi i}{n}e^{a\pi i/n}\frac{1-e^{2a\pi i}}{1-e^{2a\pi i/n}} = (-1)\frac{2\pi i}{n}\frac{1}{e^{-a\pi i/n}-e^{a\pi i/n}} = \frac{\pi}{n\sin(a\pi/n)}.$$

別解． 一周しないで

$C_1 : z(x) = x$, $(\varepsilon \le x \le R)$　　$C_2 : z(\theta) = Re^{i\theta}$, $(0 \le \theta \le 2\pi/n)$

$C_3 : z(x) = xe^{2\pi i/n}$, ($x$ は R から ε),　　$C_4 : z(\theta) = \varepsilon e^{i\theta}$, ($\theta$ は $2\pi/n$ から 0)

としても良い．(こちらの方が楽でしょう．)

このとき C_2 と C_4 に沿った線積分は，$R\to\infty$, $\varepsilon\to+0$ としたとき 0 になり（やり方は一周するときと全く同様，積分範囲が違うだけ），

$$\lim_{R\to\infty,\varepsilon\to+0}\int_C f(z)\,dz = (1-e^{2a\pi i/n})\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{x^n+1}dx$$

となる．

C で囲まれた領域に含まれる $f(z)$ の孤立特異点は $z = e^{\pi i/n}$ だけなので，留数定理により

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{x^n+1}dx = \frac{1}{1-e^{2a\pi i/n}} \times 2\pi i \times (-\frac{1}{n})e^{a\pi i/n} = \frac{\pi}{n}\frac{2i}{e^{a\pi i/n}-e^{-a\pi i/n}} = \frac{\pi}{n\sin(a\pi/n)}$$

となる．