2026/01/19

複素解析 I 演習 No.7 (2025 年度)

7-1. 留数の計算により，定積分 $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{1}{2i-\sin\theta}d\theta$ の値を求めよ．

7-2. 以下の手順に従って，定積分 $\displaystyle I:=\int_0^{\infty}\frac{1}{x^4+1}dx$ の値を求める．

$R>0$ を十分大きな実数とする．単純閉曲線 $C=C_1+C_2+C_3$ を以下のように定める：
C_1 は原点を始点として R を終点とする線分,
C_2 は R を始点とし，円 $|z|=R$ に沿って iR に至る曲線,
C_3 は iR を始点として原点を終点とする線分.

$j=1,2,3$ に対して $\displaystyle I_j:=\int_{C_j}\frac{1}{z^4+1}dz$ とする．

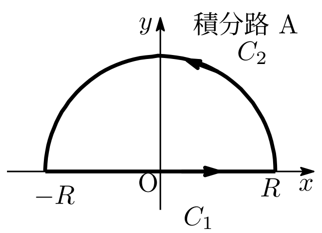
(1) $\dfrac{1}{z^4+1}$ の孤立特異点を全て求めよ．また単純閉曲線 C と孤立特異点を図示せよ．
(2) $j=1,2,3$ とする．曲線 C_j をパラメータ表示し，I_j をそのパラメータに関する積分で表せ．
(3) $\displaystyle\lim_{R\to\infty}I_1$，$\displaystyle\lim_{R\to\infty}I_3$ を I を用いて表せ．
(4) 積分の評価を行うことにより，$\displaystyle\lim_{R\to\infty}I_2=0$ であることを確かめよ．
(5) 留数定理を用いて $\displaystyle\int_C\frac{1}{z^4+1}dz$ の値を求めよ．
(6) I の値を求めよ．

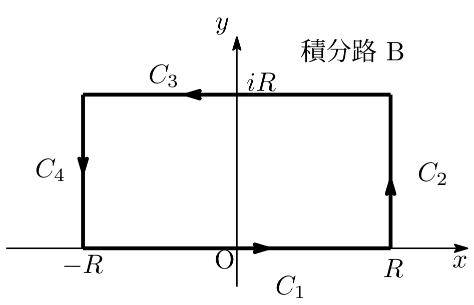
ここから先の問題を解く際に，7-2 の各小問のような考察が必要なら，指示されていなくてもそれを自ら行うこと．

7-3. 指示された積分路に沿った線積分を考えることで，以下の定積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{1}{(x^2+1)^4}dx$ 積分路 A　(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iax}}{x^4+1}dx$ $(a>0)$ 積分路 A

(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x-ai}dx$ $(a>0)$ 積分路 B　(4) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x^2+1)^2(x^2+2)}dx$ 積分路 A





7-4. 留数の計算により以下の定積分の値を求めよ．(積分路も自分で考える．) 但し，n は自然数, a は $0<a<n$ を満たす実数である．

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\sin\theta}{\sqrt{5}+\sin\theta}d\theta$　(2) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x}{x^6+1}dx$　(3) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x^{a-1}}{x^n+1}dx$

前回の略解は裏面に掲載しました．

No.6 問題略解 (間違えている可能性は十分あるので，鵜呑みにしないこと)

6-1. (1) 孤立特異点は $z=0,2$. $z=0$ における留数は $-\dfrac{1}{2}$, $z=2$ における留数は $\dfrac{1}{2}$.
(2) 孤立特異点は $z=-1\pm\sqrt{2}i$. $z=-1\pm\sqrt{2}i$ における留数は $\dfrac{2\pm\sqrt{2}i}{4}$.
(3) 孤立特異点は $z=\pm 1$. 共に 3 位の極，留数は $\pm\dfrac{3}{16}$.
(4) 孤立特異点は $z=0,1$. 共に極で位数はそれぞれ 2, 3. $z=0$ における留数は -4, $z=1$ における留数は 4.

6-2. $f(z)$ の孤立特異点は $\pm i$ であり，共に 1 位の極，留数はそれぞれ $\pm e^{\mp 1}/2i$.
(1) $|z+i|<1$ に含まれる $f(z)$ の孤立特異点は $-i$ のみなので，答は $-\pi e$.
(2) 二つの極は共に $|z-2|<3$ に含まれるので，答は $\pi e^{-1}-\pi e$.
(3) 二つの極は共に $|z-1+2i|<1$ に含まれないので，答は 0.

6-3. (1) $z^2+2z=z(z+2)$ により，被積分関数の孤立特異点は $z=0,-2$ であり共に 1 位の極である．これらのうち $|z|<1$ に含まれるのは $z=0$ のみ．答は πi.
(2) 被積分関数の孤立特異点は $z=-2$ だけであり，これは $|z+1|<2$ に含まれる 3 位の極．答は $-12\pi i$.
(3) 被積分関数の孤立特異点は $z=0$ であり，これは $|z-i|<2$ に含まれる 4 位の極である．また，$z=0$ を除いて被積分関数は $|z-i|\leq 2$ で正則である．答は $\dfrac{\pi i}{72\sqrt{3}}$.
(4) 被積分関数の孤立特異点は $z=\pm i/\sqrt{3}$, $z=\pm\sqrt{2}i$，これらのうち $|z|<1$ に含まれるのは $z=\pm i/\sqrt{3}$，共に 1 位の極である．答は $-\dfrac{2\pi i}{15}$.
(5) 被積分関数の孤立特異点は $z=0,-2$ であり，これらは共に $|z+1|<2$ に含まれ，0 は 2 位の極，2 は 1 位の極である．答は $-\pi^2$.

6-4. (1) $\sin\pi z=(e^{i\pi z}-e^{-i\pi z})/2i=0$ となるのは $e^{2i\pi z}=1$ となるとき，即ち $z=n$ ($n\in\boldsymbol{Z}$) となるとき．よって孤立特異点は $z=n$ ($n\in\boldsymbol{Z}$) である． ここで $n\in\boldsymbol{Z}$ に対して
$\sin\pi z=\sin\{\pi(z-n)+n\pi\}=(-1)^n\sin\pi(z-n)=(-1)^n\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\{\pi(z-n)\}^k$ なので，
$\dfrac{1}{\sin\pi z}=\dfrac{1}{(-1)^n\left(\pi(z-n)-\frac{1}{3!}\pi^3(z-n)^3+\cdots\right)}=\dfrac{(-1)^n}{\pi}\dfrac{1}{z-n}\dfrac{1}{1-\frac{1}{3!}\pi^2(z-n)^2+\cdots}$ により，
$z=n$ は $1/\sin\pi z$ の 1 位の極であり，留数は $(-1)^n/\pi$ である．
(2) $\cos z$ は全平面で正則なので，$\cos\dfrac{1}{z}$ は $z\neq 0$ なら z で正則である．一方，$\cos z=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n}$ の収束半径は無限大なので，$z\cos\dfrac{1}{z}=z\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{-2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{-2n+1}$ が $0<|z|$ で成り立つ．よって $z=0$ は真性特異点であり，ここでの留数は $-\dfrac{1}{2}$.

6-5. (1) 例えば $w_n=\alpha+2\pi n$ $(n=0,1,2,\dots)$ とすればよい．これが与えられた条件を満たすことは自分で確かめてみましょう．
(2) 例えば $z_n=\dfrac{1}{\alpha+2\pi n}$ とすればよい．与えられた条件を満たすことの説明は自分でできるでしょう．なお α の値によっては分母が 0 になってしまいますが，その場合は例えば m を $|\alpha|$ より大きな正整数として $z_n=\dfrac{1}{\alpha+2\pi(n+m)}$ とする，といった工夫で避けられます．
(3) 複素変数のコサインの定義式 $\cos z=\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$ を用いて $\cos\alpha=\beta$ を α について解くとよいでしょう．

6-6. (1) $\dfrac{f'(z)}{f(z)}=\dfrac{k(z-\alpha)^{k-1}g(z)+(z-\alpha)^k g'(z)}{(z-\alpha)^k g(z)}=\dfrac{k}{z-\alpha}+\dfrac{g'(z)}{g(z)}$.
(2) $g(\alpha)\neq 0$ により $g'(z)/g(z)$ は $z=\alpha$ で正則である．よって (1) により，求める留数は $1/(z-\alpha)$ の係数の k.
(3) このときは (1), (2) の議論を $\alpha\to\beta$, $k\to-\ell$ と置き換えて適用すればよいので，求める留数の値は $-\ell$.
(4) これは (1), (2) の議論を $\alpha\to\gamma$, $k\to 0$ と置き換えて適用すればよい．このとき $f'(z)/f(z)=g'(z)/g(z)$, $g(\gamma)\neq 0$ なので，これは $z=\gamma$ で正則である．
(5) (2), (3), (4) と留数定理により
$\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_C\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\sum_{p=1}^{m}\operatorname*{Res}_{z=\alpha_p}\frac{f'(z)}{f(z)}+\sum_{q=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=\beta_q}\frac{f'(z)}{f(z)}=\sum_{p=1}^{m}k_p-\sum_{q=1}^{n}\ell_q$ が成り立つ．