2025/12/22

複素解析 I 演習 No.6 (2025 年度)

6-1. 以下の関数の孤立特異点を求めよ．また，各孤立特異点における留数を求めよ．

(1) $\dfrac{1}{z^2-2z}$ (2) $\dfrac{z}{z^2+2z+3}$ (3) $\dfrac{1}{(z^2-1)^3}$ (4) $\dfrac{z-2}{z^3(z-1)^2}$

6-2. $f(z)=\dfrac{e^{iz}}{z^2+1}$ とする．留数定理を用いて，以下の単純閉曲線に沿った $f(z)$ の複素線積分の値を求めよ．

(1) $|z+i|=1$ (2) $|z-2|=3$ (3) $|z-1+2i|=1$

6-3. 留数定理を用いて，以下の複素線積分の値を求めよ．但し $\sqrt{z+3}$ は $z=0$ で $\sqrt{3}$ となる分枝である．

(1) $\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{\cos z}{z^2+2z}dz$ (2) $\displaystyle\int_{|z+1|=2}\frac{z^3}{(z+2)^3}dz$ (3) $\displaystyle\int_{|z-i|=2}\frac{\sqrt{z+3}}{z^4}dz$

(4) $\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{z^3}{(3z^2+1)(z^2+2)}dz$ (5) $\displaystyle\int_{|z+1|=2}\frac{e^{i\pi z}}{z^2(z+2)}dz$

6-4. 以下の関数の孤立特異点を求めよ．また，各孤立特異点における留数を求めよ．

(1) $\dfrac{1}{\sin\pi z}$ (2) $z\cos\dfrac{1}{z}$

6-5. $f(z)=\cos\dfrac{1}{z}$ とする．$f(z)$ の孤立特異点 $z=0$ は真性特異点である（前回問題 **5-5**(4)）．真性特異点の近くで $f(z)$ は複雑に振る舞うことを見てみよう．α を複素数の定数とする．

(1) 複素数列 $w_1,w_2,\dots,w_n,\dots$ であって $\lim_{n\to\infty}w_n=\infty$ かつ $\lim_{n\to\infty}\cos w_n=\cos\alpha$ を満たすものを求めよ．その数列が与えられた条件を満たすことがわかるように答えること．

(2) 0 に収束する複素数列 $z_1,z_2,\dots,z_n,\dots$ であって $\lim_{n\to\infty}f(z_n)=\cos\alpha$ を満たすものを求めよ．これもその数列が与えられた条件を満たすことがわかるように答えること．

(3) 任意の $\beta\in\boldsymbol{C}$ に対して $\cos\alpha=\beta$ を満たす $\alpha\in\boldsymbol{C}$ が存在することを示せ．

※ この結果により，真性特異点 0 に収束する数列 $\{z_n\}$ をうまく取れば，数列 $\{f(z_n)\}$ を任意の複素数 β に収束させられることがわかった．

6-6. (偏角の原理)
$f(z)$ は領域 D において，極を除いて正則とする．(D のほぼすべての点で正則だが，正則でない点は極になっている，ということ．) $\alpha\in D$ が $f(z)$ の k 位の零点なら，

$$f(z)=(z-\alpha)^k g(z),\qquad g(z)\text{ は } z=\alpha \text{ で正則かつ } g(\alpha)\neq 0 \tag{$*$}$$

と表示できる．また $\alpha\in D$ が $f(z)$ の ℓ 位の極なら，$f(z)$ は $(*)$ において k を $-\ell$ で置き換えた形の表示を持つ．

(1) $(*)$ の関数 $f(z)$ に対し，$\dfrac{f'(z)}{f(z)}=\dfrac{k}{z-\alpha}+\dfrac{g'(z)}{g(z)}$ が成り立つことを確かめよ．

(2) $\alpha\in D$ が $f(z)$ の k 位の零点のとき，$\operatorname*{Res}_{z=\alpha}\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ の値を求めよ．

(3) $\beta\in D$ が $f(z)$ の ℓ 位の極のとき，$\operatorname*{Res}_{z=\beta}\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ の値を求めよ．

(4) $\gamma\in D$ が $f(z)$ の零点でも極でもないなら，$\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ は γ で正則であることを示せ．

(5) 領域 D に含まれる単純閉曲線 C を，$f(z)$ の零点も極も C 上に乗らないようにとる．C で囲まれた領域に含まれる $f(z)$ の零点の全体は $\alpha_1,\dots,\alpha_m$ であり，それぞれの位数は $k_1,\dots,k_m$ であるとする．また，C で囲まれた領域に含まれる $f(z)$ の極の全体は $\beta_1,\dots,\beta_n$ であり，それぞれの位数は $\ell_1,\dots,\ell_n$ であるとする．このとき

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\sum_{p=1}^{m}k_p-\sum_{q=1}^{n}\ell_q$$

が成り立つことを示せ．

No.5 問題略解 (間違えている可能性は十分あるので，鵜呑みにしないこと)

5-1. (1) $e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}z^n$. (2) $\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1}$. (3) $\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n}$. (4) $\log(1+z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}z^n$. (5) $\frac{1}{1+z}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nz^n$. (6) $(1+z)^\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}z^n$. **5-2.** (1) ∞. (3) ∞. (4) 1. **5-3.** (1) $\sum_{n=0}^{\infty}2^nz^{2n}$. (2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{6n+2}$. (3) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n$. **5-4.** (1) $\dfrac{1}{ne^{\frac{2(n-1)}{n}\pi i}}$ あるいは $\dfrac{e^{\frac{2\pi i}{n}}}{n}$. (2) 2. **5-5.** (1) 孤立特異点は 0, 極で位数は 4. (2) 孤立特異点は ±3, 共に極で位数はどちらも 1. (3) 孤立特異点は 0. 除去可能特異点である． (4) 孤立特異点は 0, 真性特異点である． **5-6.** (1) $-\frac{1}{z}+\frac{2}{z-1}+\frac{3}{(z-1)^2}+\frac{2}{(z-1)^3}$. (2) (1) の結果より，極は $z=0,1$. 極 $z=0$ の位数は 1, 極 $z=1$ の位数は 3. (3) $\frac{2}{(z-1)^3}+\frac{3}{(z-1)^2}+\frac{2}{z-1}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(z-1)^n$. (4) $\frac{2}{(z-1)^3}+\frac{3}{(z-1)^2}+\frac{2}{z-1}$. **5-7.** (1) $\frac{1}{1+z^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nz^{2n}$. (2) (1) の結果を項別積分し，$\arctan 0=0$ を使うと $\arctan z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}z^{2n+1}$. (3) $\arctan z=\frac{1}{2i}\log\frac{1+iz}{1-iz}=\frac{1}{2i}\{\log(1+iz)-\log(1-iz)\}$ の右辺を log のべき級数展開を使って計算すると $\arctan z=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2m+1}z^{2m+1}$. **5-8.** (1) このべき級数を代入すると，$\{a_n\}$ に関する漸化式 $(n+1)(n+\gamma)a_{n+1}=(n+\alpha)(n+\beta)a_n$，$(n=0,1,2,\dots)$ を得る．これを解くと $a_n=\frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)}\frac{\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\beta)}\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma+n)}\frac{1}{n!}$ となるので ($\Gamma(s)$ はガンマ関数)，$w=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\gamma+n)}\frac{z^n}{n!}$ である． (2) α または β が 0 以下の整数のときは，$n\geq-\alpha+1$ または $n\geq-\beta+1$ ならば a_n は全て 0 なので，収束半径は ∞. α,β 共に 0 以下の整数でないときは収束半径は 1 である．