2025/12/8

複素解析 I 演習 No.5 (2025 度)

5-1. 以下の関数の原点を中心とするべき級数展開 (マクローリン展開) を書け．但し，$\log(1+z)$, $(1+z)^\alpha$ は主値，即ち $z=0$ でそれぞれ 0, 1 となる分枝とする．なお，この問題に関しては答だけ書けば十分．

(1) e^z　(2) $\sin z$　(3) $\cos z$

(4) $\log(1+z)$　(5) $\dfrac{1}{1+z}$　(6) $(1+z)^\alpha$

5-2. 問題 **5-1**(1),(3),(4) で答えたべき級数の収束半径を求めよ．求めた過程を書くこと．

5-3. 以下の関数の，与えられた点を中心とするべき級数展開を求めよ．

(1) $\dfrac{1}{1-2z^2}$, $z=0$　(2) $z^2\cos(z^3)$, $z=0$　(3) $\dfrac{1}{z}$, $z=1$

5-4. 以下の極限を求めよ．ロピタルの公式を使うときは不定形の極限であることを確認してから計算すること．但し n は正の整数である．

(1) $\displaystyle\lim_{z\to e^{2\pi i/n}} \frac{z-e^{2\pi i/n}}{z^n-1}$　(2) $\displaystyle\lim_{z\to 0} \frac{e^{2z}-1-2\sin z}{z^2}$

5-5. 以下の関数の孤立特異点を全て挙げ，それらが極，真性特異点，除去可能特異点のどれであるかを，理由がわかるように答えよ．さらに極の場合，極の位数を答えよ．

(1) $\dfrac{z^2-3z+4}{z^4}$　(2) $\dfrac{1}{z^2-9}$　(3) $\dfrac{e^z-1}{z}$　(4) $\cos\dfrac{1}{z}$

5-6. $f(z)=\dfrac{z^3+2z^2-2z+1}{z(z-1)^3}$ とする．

(1) $f(z)$ を部分分数分解せよ．

(2) $f(z)$ の極とその位数を答えよ．

(3) $z=1$ を中心とする $f(z)$ のローラン展開を求めよ．

(4) $z=1$ における $f(z)$ の主要部を答えよ．

5-7. この問題では，$\arctan z$ は $z=0$ で 0 となるような分枝を指すものとする．

(1) 0 を中心とする $\dfrac{1}{1+z^2}$ のべき級数展開を答えよ．

(2) (1) の結果と $(\arctan z)' = \dfrac{1}{1+z^2}$ (問題 **3-7** (2)) を用いて，0 を中心とする $\arctan z$ のべき級数展開を求めよ．

(3) $\arctan z = \dfrac{1}{2i}\log\dfrac{1+iz}{1-iz}$ (問題 **3-7** (1)) と $\log(1+z)$ の主値のべき級数展開を用いて，0 を中心とする $\arctan z$ のべき級数展開を求めよ．

5-8. 2 階常微分方程式 $z(1-z)\dfrac{d^2w}{dz^2}+\{\gamma-(\alpha+\beta+1)z\}\dfrac{dw}{dz}-\alpha\beta w=0$ を考える．但し，γ は 0 以下の整数でないとする．

(1) この方程式の解で $w=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $a_0=1$, という形のものを求めよ．(ヒント：このべき級数を方程式に代入して係数比較することにより，a_n, $n=0,1,2,\ldots$ が満たす漸化式をまず求める．)

(2) (1) で求めたべき級数の収束半径を求めよ．

前回の略解は裏面に掲載します．

No.4 問題略解 (間違えている可能性は十分あるので，鵜呑みにしないこと)

4-1. (1) $18\pi i$. (2) $8\pi i/3$. (3) 0.

4-2. 単純閉曲線は (2), (3), 単純ではない閉曲線は (4)．また，(2) は正の向き，(3) は負の向き．(1) は始点と終点が一致しないので，閉曲線でない．(2) は 1 を始点として反時計回りにちょうど 1 周しているので単純閉曲線．(3) は $-2+3i$ を始点とし，時計回りにちょうど 1 周しており，(4) は 2 周しているので単純でない．

4-3. (2) $z=0$ は (2) の曲線が囲む円の外にあるので 0.
(3) の曲線は $z=0$ の周りを負の向きに 1 周しているので，$(-1)\times 2\pi i\times e^0=-2\pi i$.
(4) の曲線は $z=0$ の周りを正の向きに 2 周しているので，$2\times 2\pi i\times e^0=4\pi i$.

4-4. (1) $z=0$ は C の内部にあるので $2\pi i$.
(2) C のパラメータ表示を使うと，
$\displaystyle\int_C \frac{dz}{z}=\int_0^{2\pi}\frac{(a\cos t+ib\sin t)'}{a\cos t+ib\sin t}dt=\cdots=\int_0^{2\pi}\frac{(b^2-a^2)\sin t\cos t+iab}{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t}dt$ だが，(1) によりこれは $2\pi i$ に等しいので，虚部を比較すると $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{1}{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t}dt=\frac{2\pi}{ab}$.

4-5. (1) $|\alpha|<1$ のとき $\dfrac{2\pi i}{\alpha^2-1}$, $|\alpha|>1$ のとき $\dfrac{2\pi i}{1-\alpha^2}$.
(2) $|\alpha|<1$ のとき $\dfrac{2\pi}{1-\alpha^2}$, $|\alpha|>1$ のとき $\dfrac{2\pi}{\alpha^2-1}$.

4-6. コーシーの積分公式により $\displaystyle f(\alpha)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-\alpha|=r}\frac{f(z)}{z-\alpha}dz$ が成り立つ． ここで積分路を $z(t)=\alpha+re^{it}$, $0\le t\le 2\pi$ とパラメータ表示すると $\displaystyle f(\alpha)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(\alpha+re^{it})}{(\alpha+re^{it})-\alpha}(\alpha+re^{it})'dt=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(\alpha+re^{it})}{re^{it}}ire^{it}dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\alpha+re^{it})dt$ となる．

4-7. $\displaystyle f^{(n)}(w)=\frac{d^n}{dw^n}\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-\alpha|=r}\frac{f(z)}{z-w}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-\alpha|=r}f(z)\frac{d^n}{dw^n}\frac{1}{z-w}dz$ である． ここで $\displaystyle\frac{d^n}{dw^n}\frac{1}{z-w}=\frac{d^n}{dw^n}(z-w)^{-1}=\cdots=n!(z-w)^{-n-1}$ であるので，$\displaystyle f^{(n)}(w)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{|z-\alpha|=r}\frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}}dz$ である．

4-8. (1) 積分路を線分 $z(t)=-t$, $-a\le t\le a$, に変更すれば
$\displaystyle\int_C e^z dz=\int_{-a}^{a}e^{-t}(-1)dt=[e^{-t}]_{-a}^{a}=e^{-a}-e^{a}$.
(2) C を $z(\theta)=ae^{i\theta}$, $0\le\theta\le\pi$, とパラメータ表示すると，
$\displaystyle\int_C e^z dz=\int_0^{\pi}e^{ae^{i\theta}}(ae^{i\theta})'d\theta=\int_0^{\pi}e^{a\cos\theta+ia\sin\theta}iae^{i\theta}d\theta=ia\int_0^{\pi}e^{a\cos\theta}e^{i(\theta+a\sin\theta)}d\theta$
$\displaystyle=ia\int_0^{\pi}e^{a\cos\theta}\{\cos(\theta+a\sin\theta)+i\sin(\theta+a\sin\theta)\}d\theta$ である．これが $e^{-a}-e^{a}$ に等しいので，両辺の実部と虚部を比較すると，$\displaystyle\int_0^{\pi}e^{a\cos\theta}\cos(\theta+a\sin\theta)d\theta=0$, $\displaystyle\int_0^{\pi}e^{a\cos\theta}\sin(\theta+a\sin\theta)d\theta=\frac{e^a-e^{-a}}{a}$.