2025/11/17

複素解析 I 演習 No.4 (2024 年度)

4-1. コーシーの積分定理/公式を使って，次の複素線積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_{|z-1|=3} \frac{2z^2+1}{z-2}dz$ (2) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{z^2+4}{z(z+3)}dz$ (3) $\displaystyle\int_{x^2+\frac{y^2}{4}=1} \frac{1}{z^2+2z+5}dz$

4-2. 次の曲線のうち，単純閉曲線であるものと，単純でない閉曲線であるものはどれか．また，単純閉曲線であるものの向きは，正 (反時計回り) か負 (時計回り) かを答えよ．図 (始点・終点・曲線) を描くなどして，答の根拠がわかるように答案を書くこと．

(1) $z(t)=e^{it},\ (-\frac{\pi}{2}\le t\le\pi)$ (2) $z(t)=2-e^{it},\ (0\le t\le 2\pi)$

(3) $z(t)=-2+3e^{-it},\ (-\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{3\pi}{2})$ (4) $z(t)=1+2e^{it},\ (-\pi\le t\le 3\pi)$

4-3. 問題 **4-2** (2), (3), (4) の曲線に沿った $f(z)=\dfrac{e^z}{z}$ の線積分の値を求めよ．

4-4. a,b を正の実数とし，楕円 $z(t)=a\cos t+ib\sin t\ (0\le t\le 2\pi)$ を C とする．
(1) 線積分 $\displaystyle\int_C \frac{dz}{z}$ の値を求めよ．
(2) $\mathrm{Im}\displaystyle\int_C \frac{dz}{z}$ を考えることにより，$\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{1}{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t}dt$ の値を求めよ．

4-5. α を $|\alpha|\neq 1$ を満たす複素定数とする．また 0 を中心とする半径 1 の円を C とする．
(1) 線積分 $\displaystyle\int_C \frac{dz}{\alpha z^2-(\alpha^2+1)z+\alpha}$ の値を求めよ．$|\alpha|$ の値による場合分けが必要となる．
(2) 積分路 C を $z=e^{it}\ (0\le t\le 2\pi)$ とパラメータ表示することにより，$\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{dt}{1-2\alpha\cos t+\alpha^2}$ の値を求めよ．

4-6. (平均値の性質)
$f(z)$ を領域 D で正則な関数とする．$r>0$ を閉円板 $|z-\alpha|\le r$ が D に含まれるように取る．このとき点 $\alpha\in D$ での f の値は $f(\alpha)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}f(\alpha+re^{it})dt$ で与えられることを，コーシーの積分公式から導け．

4-7. n を正の整数，$\alpha\in\boldsymbol{C}$ を定点とし，点 w は開円板 $|z-\alpha|<r$ に含まれるとする．$f(z)$ が閉円板 $|z-\alpha|\le r$ を含む領域で正則なとき，コーシーの積分公式 $f(w)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{|z-\alpha|=r}\frac{f(z)}{z-w}dz$ の両辺を w で微分することにより，$f^{(n)}(w)=\dfrac{n!}{2\pi i}\displaystyle\int_{|z-\alpha|=r}\frac{f(z)}{(z-w)^{n+1}}dz$ を導け．なお今の場合，線積分と微分の順序交換をしてよい．

4-8. a を正の実数とする．円 $|z|=a$ の $\mathrm{Im}\,z\ge 0$ の部分に，始点を a, 終点を $-a$ とする向きを付けた曲線を C とする．
(1) 積分路を適当に変更することにより，$\displaystyle\int_C e^z dz$ の値を求めよ．
(2) 二つの定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi}e^{a\cos\theta}\cos(\theta+a\sin\theta)d\theta,\ \int_0^{\pi}e^{a\cos\theta}\sin(\theta+a\sin\theta)d\theta$ の値を求めよ．

No.3 問題略解 (間違えている可能性は十分あるので，鵜呑みにしないこと)

3-1. $\overline{e^z}=\overline{e^x\cos y+ie^x\sin y}=e^x\cos y-ie^x\sin y=e^x\cos(-y)+ie^x\sin(-y)=e^{x-yi}=e^{\overline{z}}$.
3-2. (1) $(-3+4i)/2$. (2) $-16/3$. (3) $9+5i$.
3-3. どちらも 8/3 になる．
3-4. $\int_{C_4}=-2/5$. $\int_{C_5}=2/3$.
3-5. $f(z)=u+iv$ は正則なので，u,v はコーシー・リーマンの方程式 $u_x=v_y,\ u_y=-v_x$ を満たす．よって $u_{xx}=(u_x)_x=(v_y)_x=v_{yx}=v_{xy}=(v_x)_y=(-u_y)_y=-u_{yy}$ により $u_{xx}+u_{yy}=0$ が成り立つ．同様に，$v_{xx}=(v_x)_x=(-u_y)_x=-u_{yx}=-u_{xy}=-(u_x)_y=-(v_y)_y=-v_{yy}$ により $v_{xx}+v_{yy}=0$ が成り立つ．以上により u,v 共に調和関数である．
3-6. (1) 略．$u_{xx}+u_{yy}=0$ が成り立つことを確かめればよい．
(2) コーシー・リーマンの方程式により $v_x=-u_y=-8x+6y,\ v_y=u_x=6x+8y$. 一つ目を x で積分すると $v=-4x^2+6xy+\varphi(y)$ という形に書ける．よって $v_y=6x+8y=6x+\varphi'(y)$ により $\varphi(y)=4y^2+C$ (C は定数). 以上により $v=-4x^2+6xy+4y^2+C$.
(3) $(3-4i)z^2+iC$.
3-7. (1) $z=\sin w/\cos w=(e^{iw}-e^{-iw})/2i\div(e^{iw}+e^{-iw})/2=-i(e^{2iw}-1)/(e^{2iw}+1)$ を e^{2iw} について解くと $e^{2iw}=(1+iz)/(1-iz)$. これの対数を取ればよい． (2) 略.「普通に」微分する．
3-8. (1) 単純閉曲線 C で囲まれた集合を D とすると，グリーンの定理より $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_C x\,dy-y\,dx=\dfrac{1}{2}\iint_D\left\{\frac{\partial}{\partial x}x-\frac{\partial}{\partial y}(-y)\right\}dxdy=\iint_D dxdy$ となるが，これは D の面積に等しい．
(2) $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_C x\,dy-y\,dx=\frac{1}{2}\int_a^b\begin{pmatrix}-y(t)\\x(t)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x'(t)\\y'(t)\end{pmatrix}dt=\frac{1}{2}\int_a^b\{x(t)y'(t)-x'(t)y(t)\}dt$.
(3) $\displaystyle\int_C\overline{z}\,dz=\int_a^b\{x(t)-iy(t)\}\{x'(t)+iy'(t)\}dt=\int_a^b\{x(t)x'(t)+y(t)y'(t)+i(x(t)y'(t)-x'(t)y(t))\}dt$.
(4) C は閉曲線なので $x(a)=x(b),\ y(a)=y(b)$ が成り立つ．よって (5) の複素線積分の実部は $\displaystyle\int_a^b\{x(t)x'(t)+y(t)y'(t)\}dt=\left[\frac{1}{2}\{x(t)^2+y(t)^2\}\right]_a^b=\frac{1}{2}\{x(b)^2+y(b)^2-x(a)^2-y(a)^2\}=0$ である．
(5) (1)〜(4) により $\dfrac{1}{2i}\displaystyle\int_C\overline{z}\,dz\underset{(3),(4)}{=}\frac{1}{2}\int_a^b\{x(t)y'(t)-x'(t)y(t)\}dt\underset{(2)}{=}\frac{1}{2}\int_C x\,dy-y\,dx\underset{(1)}{=}$ (D の面積) である．