複素解析 I 演習 No.3 (2025 年度)

3-1. $z = x + yi$ $(x, y \in \boldsymbol{R})$ のとき，複素指数関数の定義式 $e^z = e^x \cos y + ie^x \sin y$ を用いて $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$ が成り立つことを確かめよ．

3-2. 次の複素線積分を計算せよ．

(1) $\displaystyle\int_{C_1} z\,dz$, C_1 は 0 を始点とし $1+2i$ を終点とする線分

(2) $\displaystyle\int_{C_2} z^2 dz$, C_2 は半円 $|z| = 2$, $\mathrm{Im} z \geq 0$, 向きは反時計回り

(3) $\displaystyle\int_{C_3} (z + \overline{z}) dz$, C_3 は $0, 2, 3+i$ をこの順に結ぶ折れ線

3-3. 0 を始点とし 2 を終点とする線分に沿った $f(z) = z^2$ の複素線積分を，次の二通りのパラメータ表示を用いて計算し，結果が等しいことを確かめよ．

(1) $z(t) = t, \quad 0 \leq t \leq 2$ (2) $z(t) = 2\sin t, \quad 0 \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$

※ この例からわかるように，パラメータ表示の取り替えは本質的に置換積分に相当する．

3-4. 1 を始点として -1 を終点とする曲線のうち，この 2 点を端点とする線分を C_4 とし，円 $|z| = 1$ の $\mathrm{Im}\, z \geq 0$ の部分を C_5 とする．曲線 C_4, C_5 に沿った $f(z) = \overline{z}^4$ の線積分を計算せよ．
※ このように，始点と終点が一致しても，線積分の値が経路の取り方に依存することがある．

3-5. 一般に，C^2-級[1]実 2 変数関数 $F(x, y)$ であって，**ラプラス方程式** $F_{xx} + F_{yy} = 0$ を満たすものを**調和関数**という．

$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ (u, v は実数値関数) が正則で C^2-級なら，u, v はどちらも調和関数である．これを示せ．(ヒント：コーシー・リーマンの方程式)

3-6. 逆に $u(x, y)$ が実数値調和関数なら，コーシー・リーマンの方程式を使うことにより，$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ が正則となるように実数値関数 $v(x, y)$ を決めることができる．

$u(x, y) = 3x^2 + 8xy - 3y^2$ のとき，

(1) u が調和関数であることを確かめよ．
(2) $f(z) = u + iv$ が正則となるような関数 v を求めよ．
(3) さらにこのとき，$f(z)$ を $z(= x + yi)$ の関数として表示せよ．

3-7. 複素変数の逆三角関数 $\arctan z$ を，$w = \arctan z \;\Leftrightarrow\; z = \tan w = \dfrac{\sin w}{\cos w}$ を満たすものとして定める．ちなみにこれは多価関数である．
(1) 前回の演習に出てきた複素変数のサイン，コサインの定義式を用いることで，

$$\arctan z = \frac{1}{2i} \log \frac{1 + iz}{1 - iz}$$

を導け．
(2) (1) の式を微分することにより，$(\arctan z)' = \dfrac{1}{1 + z^2}$ であることを確かめよ．

複素線積分に戻る．

3-8. C を xy-平面上の単純閉曲線[2]とする．但し，C の向きは正の向き，即ち C で囲まれた領域を左に見て進む向きとする．((1), (2) はベクトル解析の復習です．)
(1) C に沿った線積分 $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_C x\,dy - y\,dx$ の値は，C で囲まれた図形の面積に等しい．これを説明せよ．(ヒント：グリーンの定理)
(2) 曲線 C を $(x(t), y(t))$ $(a \leq t \leq b)$ とパラメータ表示したとき，(1) の線積分を $x(t)$, $y(t)$ を用いて書き下せ．
(3) xy-平面を複素平面と同一視し，曲線 C を $z(t) = x(t) + iy(t)$ $(a \leq t \leq b)$ と表す．このとき複素線積分 $\displaystyle\int_C \overline{z}\,dz$ を $x(t)$, $y(t)$ を用いて書き下せ．
(4) C が閉曲線であることを用いて，(3) の複素線積分の実部は 0 であることを導け．
(5) 単純閉曲線 C で囲まれた図形の面積は $\dfrac{1}{2i}\displaystyle\int_C \overline{z}\,dz$ に等しいことを示せ．

No.2 の略解は裏面に記載します．

[1] 2 階までの偏導関数が全て存在して連続なこと．2 階偏微分ができて，変なことが起きないことを保証するための条件．

[2] 始点と終点が一致し，自己交叉しない曲線

No.2 問題略解 (間違えている可能性は十分あるので，鵜呑みにしないこと)

2-1. (1) 正則でない． (2) 正則である． $f'(z) = 2y - 2xi = -2iz$.
2-2. (0) 略．そのまま定義式に当てはめれば良い．
(1) 略． $e^{x+yi} = e^x(\cos y + i\sin y)$ と $e^{u+vi} = e^u(\cos v + i\sin v)$ を掛けると $e^{x+u}\{\cos(y+v) + i\sin(y+v)\} = e^{(x+u)+(y+v)i}$ になることを確かめればよい．
(2) (2-2-1) の右辺の実部と虚部をそれぞれ u, v として確かめればよい．
(3) $f(z) = u(x,y)+iv(x,y)$ がコーシー・リーマンの方程式を満たすなら，$f'(z) = u_x(x,y)+iv_x(x,y)$ である．これを使う．
2-3. 略． $\cos z$, $\sin z$, e^z の定義式と $(e^{\pm iz})' = \pm ie^{\pm iz}$ を使ってこれらの等式を導く．
2-4. (1) $e^{\log z} = e^{\log|z|+i\arg z} = |z|\{\cos(\arg z) + i\sin(\arg z)\}$ だが，これは z の極形式に等しい．よって $e^{\log z} = z$.
(2) $\log z + \log w = (\log|z| + i\arg z) + (\log|w| + i\arg w) = \log|z||w| + i(\arg z + \arg w) = \log|zw| + i\arg(zw) = \log(zw)$.
2-5. (1) $\log 2 + (\pi/2)i$. (2) $\log 2 + (2\pi/3)i$. (3) $2\log 2 - (5\pi/6)i$.
2-6. (1) 定義に従って計算すればよい．結果は $e^{-\pi/2}$.
(2) $z = x + yi$ のとき $e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$ なので $|e^z| = e^x$, $\arg(e^z) = y$.
(3) 定義より $\log(e^x) = \log|e^z| + i\arg(e^z)$ である．この右辺に (2) の結果を使うと…
(4) べき関数の定義より，$(e^\alpha)^\beta = e^{\beta\log(e^\alpha)}$ である．この右辺に (3) の結果を使うと…
(5) これもべき関数の定義より $(z^\alpha)^\beta = (e^{\alpha\log z})^\beta$ である．この右辺に (4) の結果を使った上でべき関数の定義を再び使うとよい．
(6) (a) (1) より $(i^i)^i = (e^{-\pi/2})^i$. この右辺を (4) を使って変形する． (b) (5) の公式より $(i^i)^i = i^{i\times i}$. 結果はどちらも $-i$ になる．
2-7. $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ と置く．$|f(z)| = c$ より $|f(z)|^2 = u^2 + v^2 = c^2$. 両辺を x, y で偏微分し，コーシー・リーマンの方程式を使うと，$\begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を得る．仮定より $u^2 + v^2 = |f(z)|^2 \neq 0$ なので，この方程式の解は $u_x = u_y = 0$. よって $u(x,y)$ は定数関数．また，$v_x = -u_y = 0$, $v_y = u_x = 0$ より $v(x,y)$ も定数関数．以上により，$f(z) = u + iv$ は定数関数．
2-8. まず，$\cos(iy) = (e^{i\times iy} + e^{-i\times iy})/2 = (e^{-y} + e^y)/2 = \cosh y$, $\sin(iy) = (e^{i\times iy} - e^{-i\times iy})/2i = (e^{-y} - e^y)/2i = i(e^y - e^{-y})/2 = i\sinh y$ である．これと $\cos z = \cos(x+iy)$, $\sin z = \sin(x+iy)$, および加法定理 (問題 **2-3** (3), (4)) を使えばよい．