2025/10/13

複素解析 I 演習 No.2 (2025 年度)

※ 問題を解く際，既に示した公式/事実は，その後の問題で使ってよい．
※ 実変数の関数を扱う際には，微分法の基本公式や指数/対数/ 三角関数の性質など，よく知られた事実を自由に使ってよい．
※ 正則関数に対して，和・差・積・商の微分法や合成関数の微分法の公式は実関数の場合と同様に成り立つことを授業で説明した (はずな) ので，これらは自由に使って構わない．
※ 以下の問題において，$z = x + yi$ $(x, y \in \boldsymbol{R})$ とする．

2-1. コーシー・リーマンの方程式を使うことで，以下の複素関数が正則か否かを判定せよ．また，正則なら $f'(z)$ を求め変数 z の関数として表せ．

(1) $f(z) = x^2 + 2xy + (2xy + y^2)i$　　(2) $f(z) = 2xy - ix^2 + iy^2$

2-2. 複素変数の指数関数を

$$e^z = e^{x+yi} = e^x e^{yi} = e^x(\cos y + i \sin y) \tag{2-2-1}$$

で定める．以下を確かめよ．
(0) $e^{0+0i} = 1$
(1) これは指数法則 $e^{z+w} = e^z e^w$ $(z, w \in \boldsymbol{C})$ を満たす．
(2) (2-2-1) の右辺はコーシー・リーマンの方程式を満たす．
(3) $(e^z)' = e^z$ が成り立つ．
(4) $\dfrac{1}{e^z} = e^{-z}$ が成り立つことを確かめよ．ヒント：(1), (0) を使うと簡単．

2-3. 複素変数の余弦/正弦関数を

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \tag{2-3-1}$$

で定める．以下の等式が成り立つことを確かめよ．(実三角関数の公式をそのまま使わず，(2-3-1) と **2-2** の結果から導け．)

(1) $\cos 0 = 1, \quad \sin 0 = 0$　　(2) $(\cos z)' = -\sin z, \quad (\sin z)' = \cos z$
(3) $\cos(z + w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$　　(4) $\sin(z + w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w$

2-4. 複素変数の対数関数を

$$\log z = \log |z| + i \arg z \tag{2-4-1}$$

で定める．複素数の極形式や絶対値・偏角に関する事実は既知として，以下の等式が成り立つことを確かめよ．

(1) $e^{\log z} = z$　　(2) $\log(zw) = \log z + \log w$

2-5. $\arg z$ に 2π の整数倍を加えてもよいので，$\arg z$ は z に対して一つに定まらない．そこで $\log z$ の値が一つに定まるように，$\log z$ の定義において $\arg z$ の範囲を $-\pi < \arg z \leq \pi$ としたものを対数関数の**主値**といい，ここでは $\mathrm{Log}\, z$ で表す．
以下の複素数を $a + bi$ $(a, b \in \boldsymbol{R})$ の形に表せ．

(1) $\mathrm{Log}(2i)$　　(2) $\mathrm{Log}(-1 + \sqrt{3}i)$　　(3) $\mathrm{Log}\{2i(-1 + \sqrt{3}i)\}$

2-6. 複素数 α に対し，複素変数のべき関数 z^α を

$$z^\alpha = e^{\alpha \log z} \qquad (z \neq 0) \tag{2-6-1}$$

で定める．複素変数の対数関数が多価関数であることから，これも一般には多価関数である．以下の問題では，α, β は複素数の定数とする．
(1) i の偏角 $\arg i$ を $-\pi < \theta \leq \pi$ の範囲で取ることとして，i^i の値を求めよ．
(2) 複素指数関数の定義式 (2-2-1) の状況の下で，$|e^z|$ と $\arg(e^z)$ を答えよ．
(3) 複素変数の対数関数の定義式 (2-4-1) に従うと（偏角を適切に取ることで）$\log e^z = z$ が成り立つ．これを (2) の結果を用いて確かめよ．
(4) 定義式 (2-6-1) に従って計算することで，$(e^\alpha)^\beta = e^{\alpha\beta}$ が成り立つことを確かめよ．(3) の結果を使ってよい．ヒント：(2-6-1) の z, α をそれぞれ e^α, β とするとよい．
(5) 定義式 (2-6-1) に従って計算することで，$(z^\alpha)^\beta = z^{\alpha\beta}$ が成り立つことを確かめよ．(4) の結果を使ってよい．
(6) $(i^i)^i$ を次の二通りの方法で計算し，結果が一致することを確かめよ．
　(a) (1) の結果を使い，(4) の公式を使って計算する．
　(b) (5) の公式を使って直接計算する．

2-7. 正則関数 $f(z)$ が $|f(z)| = c$ (c は 0 でない定数) を満たすなら，$f(z)$ 自身も (局所的に) 定数関数であることを示せ．
ヒント：$f = u + iv$ と置いて，$|f(z)|^2 = c^2$ の両辺を x, y で偏微分する．こうして得られた方程式を，コーシー・リーマンの方程式を用いて変形することで u_x, u_y, v_x, v_y が全て 0 であることを導く．

2-8. $z = x + yi$ $(x, y \in \boldsymbol{R})$ のとき，次が成り立つことを示せ．

(1) $\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y, \qquad |\cos z|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y$
(2) $\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y, \qquad |\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y$

No.1 の略解は裏面に載せます．

No.1 問題略解 (間違えている可能性は十分あるので，鵜呑みにしないこと)

1-1. (1) $5-2i$. (2) $9-7i$. (3) $\dfrac{3}{13}+\dfrac{2}{13}i$. (4) $-\dfrac{4}{5}+\dfrac{7}{5}i$.

1-2. (1) $\alpha=2\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right)$, $\beta=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$. (2) $\alpha^{100}=-2^{99}-2^{99}\sqrt{3}\,i$.
(3) $\cos\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, $\sin\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

1-3. 図は省略．(1) 原点を中心とする半径 3 の円．(2) $1+i$ を中心とする半径 1 の円．(3) i を中心とする半径 2 の円の内部.

1-4. (1) $|z+w|\le|z|+|w|<4+3=7$. (2) $|z+w|\ge|z|-|w|>8-3=5$.
(3) $|3z-w|\le|3z|+|-w|=3|z|+|w|\le 3\cdot 3+2=11$.
(4) $|z+3i|\ge|z|-|3i|>7-3=4>0$ により，$\left|\dfrac{6}{z+3i}\right|<\dfrac{6}{4}=\dfrac{3}{2}$.

1-5. $z=x+yi$ と置いて計算すると，円 $(x-1)^2+y^2=4$ となる．
(別解) この等式は $|z+3|:|z|=2:1$ と同値．これより z は -3 と 0 からの距離の比が $2:1$ であるような点である．アポロニウスの円より，z の軌跡は -3 と 0 を $2:1$ に内分する点 -1 と $2:1$ に外分する点 3 を直径の両端とする円になるので，$(x-1)^2+y^2=4$.

1-6. 詳細は略．$1+i$ は絶対値が $\sqrt{2}$ で偏角が $\pi/4$ なので，$(1+i)z$ は原点を中心に z を $\pi/4$ 回転して原点からの距離を $\sqrt{2}$ にした点である．このことから問題文の結論が得られる．このような考察を，図を描いて説明してくれればよい.

1-7. (1) 左辺を展開して実部と虚部で纏め，それぞれに対して三角関数の加法定理を使う.
(2) $n=1$ の時は明らか．ある n で $(*)$ が成り立つと仮定して $n+1$ の場合を示すには，(1) の等式において $\phi=n\theta$ としたものを使う.
(3) 例えば逆数を実際に計算し，$\cos\theta=\cos(-\theta)$ と $-\sin\theta=\sin(-\theta)$ を使うとよいでしょう.
(4) n が負の整数のとき，$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\{(\cos\theta+i\sin\theta)^{-1}\}^{|n|}$ なので，まず (3) の結果を使うとこれは $\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\}^{|n|}$ に等しい．さらに $(*)$ において $n\theta$ を $|n|(-\theta)$ で置き換えた式を使う.

1-8. (1) $X^2+X-1=0$. (2) $X=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.
よって $z=\dfrac{-1+\sqrt{5}\pm i\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}, \dfrac{-1-\sqrt{5}\pm i\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$. (3) $z^5=1$ の根のうち，第 1 象限にあるものが $\cos\dfrac{2\pi}{5}+i\sin\dfrac{2\pi}{5}$ であるので，(2) の結果より $\cos\dfrac{2\pi}{5}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$.

1-9. $z^3+2iz+4=0\Leftrightarrow -4=z^3+2iz$ であるので，もしこの方程式の根 z が $|z|\le 1$ を満たすなら，$4=|-4|=|z^3+2iz|\le|z|^3+2|z|\le 1+2=3$ となり矛盾が生じる．よってこの方程式の根は全て $|z|>1$ を満たす.