2025/09/29

複素解析 I 演習 No.1 (2025 年度)

- この授業全般に関する注意事項は「複素解析 I 演習のしおり」を参照すること.
- 演習終了後にこのプリントのファイルを CoursePower に置いておきます.
- 「複素解析 I」の講義ノートを必ず持参すること.

1-1. 以下の複素数を $a+bi$ $(a,b\in\boldsymbol{R})$ という形で表せ.

(1) $(3+i)+(2-3i)$ (2) $(3+i)(2-3i)$ (3) $\dfrac{1}{3-2i}$ (4) $\dfrac{2+3i}{1-2i}$

1-2. $\alpha=\sqrt{3}-i,\ \beta=1+i$ とする.

(1) $\alpha,\ \beta$ の極形式を求めよ.

(2) α^{100} を求めよ.

(3) 積 $\alpha\beta$ を計算することにより, $\cos\dfrac{\pi}{12}$ と $\sin\dfrac{\pi}{12}$ の値を求めよ.

1-3. 以下の方程式/不等式で表される複素平面上の図形を図示せよ.

(1) $|z|=3$ (2) $|z-1-i|=1$ (3) $|z-i|<2$

1-4. 複素数 z,w に関する以下の命題を, 三角不等式を用いて示せ.

(1) $|z|<4,\ |w|<3$ なら $|z+w|<7$.

(2) $|z|>8,\ |w|<3$ なら $|z+w|>5$.

(3) $|z|\le 3,\ |w|\le 2$ なら $|3z-w|\le 11$.

(4) $|z|>7$ なら $\left|\dfrac{6}{z+3i}\right|<\dfrac{3}{2}$.

1-5. 方程式 $\left|\dfrac{z+3}{z}\right|=2$ を満たす点 z 全体はどのような図形か. 複素平面上に図示せよ.

1-6. z を 0 でない複素数とする. このとき 3 点 $0,z,(1+i)z$ を頂点とする複素平面上の三角形は, 点 z を直角とする直角二等辺三角形であることを示せ.

1-7. 以下を示せ. ただし, 三角関数の諸公式は既知としてよく, 既に示した公式をその後で用いてよい.

(1) $(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\phi+i\sin\phi)=\cos(\theta+\phi)+i\sin(\theta+\phi)$.

(2) 正の整数 n に対して

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos(n\theta)+i\sin(n\theta). \qquad (*)$$

証明には数学的帰納法を用いること.

(3) $(\cos\theta+i\sin\theta)^{-1}=\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)$.

(4) n が負の整数の場合にも $(*)$ が成り立つ.

1-8. 因数分解 $z^5-1=(z-1)(z^4+z^3+z^2+z+1)$ を利用して 1 の 5 乗根を求める.

(1) $X=z+\dfrac{1}{z}$ と置いたとき, 方程式 $z^4+z^3+z^2+z+1=0$ を X に関する方程式に書き直せ.

(2) (1) を利用して, 方程式 $z^4+z^3+z^2+z+1=0$ を解け.

(3) $\cos\dfrac{2\pi}{5}$ の値を求めよ.

1-9. 複素数 z に関する方程式 $z^3+2iz+4=0$ の解は, どれも $|z|>1$ を満たすことを示せ.

次回からは, 前の回の略解をここに載せます.