

カオスニューロンの 時系列解析

中山研究室

35618024

修士2年 長澤 昌樹

研究の目的

ヤリイカのニューロンのカオス応答やHodgkin-Huxley方程式を、離散時間モデルで定性的に再現する力学系として合原一幸先生らによって提案された「カオスニューラルネットワーク」がある。

カオスニューラルネットワークの基本構成要素であるカオスニューロンを決定論的カオスの視点から解析し、カオスの特徴である初期値鋭敏性（長期予測不能性）・有界性・任意の基本周期の周期点が存在することを確認することでカオス性があることを確認することが目的である。

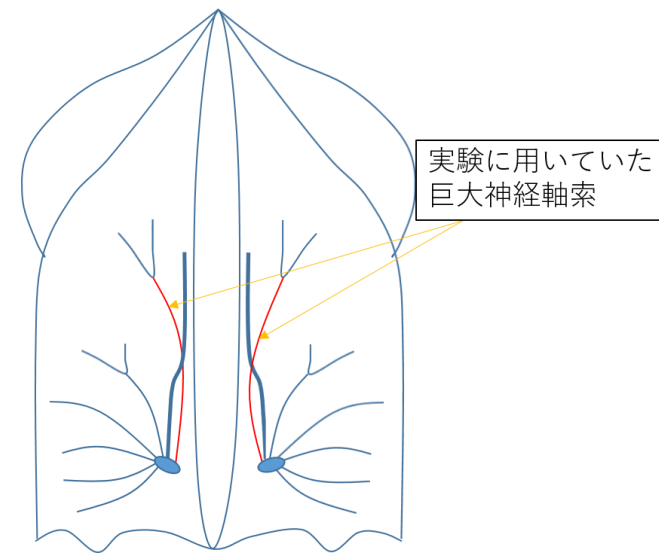


図1:ヤリイカのニューロン
(神経細胞)の様子

研究の結果

カオスニューロンのリアプノフ指数が正であることを数値的に確かめ,初期値鋭敏性(長期予測不可能性)が存在することを確かめた.

シャルコフスキーの周期3の定理を用いて,カオスニューロンは任意の周期の周期点が存在することを確かめた.

カオスニューロンについて,有界性を持ち,アトラクタの性質の一つを持つことを証明した.

カオスの定義

カオスには定義が多数あり,何がカオス力学系の本質かについては専門家の間でも統一見解はない.

船越[5]には,

「初期値のわずかな差が指数的に増大するという性質を持ち,
かつ不規則で有界であるもの」

と定義されていた.

カオスの定義

初期値鋭敏性を持つ

→リアプノフ指数によって定量化できる (山口[4])

任意の周期の周期点を持つ (山口[4])

有界性を持つ (船越[5])

本研究では,以上のようにカオスを定義する.

カオスニューロン

$$f(x_t) = kx_t - \alpha \frac{1}{1 + e^{-\frac{x_t}{\varepsilon}}} + a$$

x_t : 時刻 t におけるニューロンの
内部状態

k : 不応性の時間減衰定数

α : 不応性の項に関する定数

a : 閾値(反応を起こさせるために
必要な刺激の最小値)

ε : 傾きの緩急を表す定数

以降, カオス時系列系の基礎と応用に, のっていた定数

$k = 0.8, \alpha = 1, a = 0.25, \varepsilon = 0.02$ を用いる.

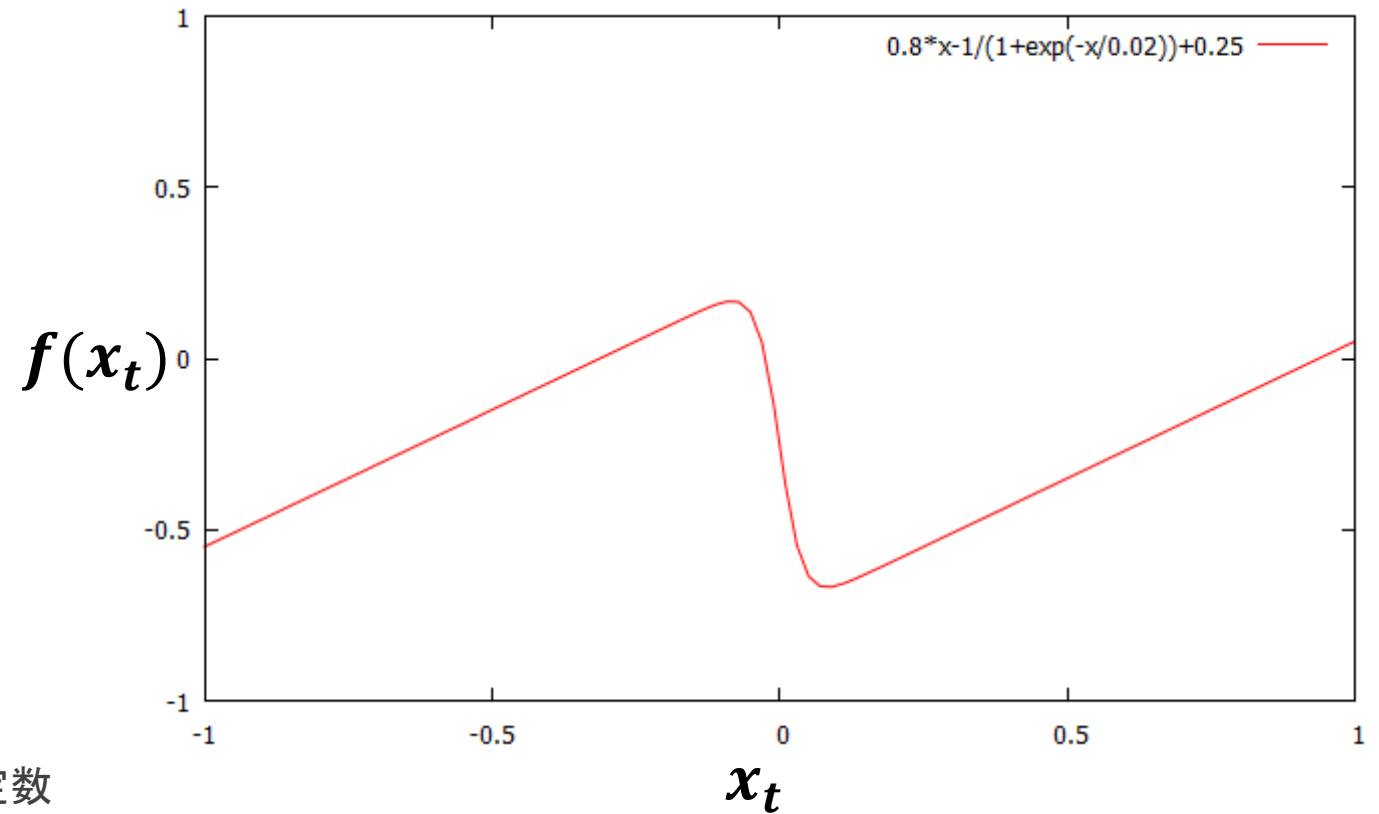


図2: カオスニューロン(gnuplotで作成)

リアプノフ指数

リアプノフ指数とは、 $x_{n+1} = f(x_n)$ という力学系に対して、近接した2点から出発した軌道 $\{x_n\}$ が $n \rightarrow \infty$ のとき、どのくらい離れていくのかを示す尺度である。

リアプノフ指数 λ は、次のように定義される。 $(x_0$:初期値)

定義1

$$\lambda(f) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln \frac{df^k}{dx}(x_0)$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \ln |f'(x_i)|$$

参考書 [1] によると $k \rightarrow \infty$ の極限が存在し、ほとんどすべての初期値に対して、同じ値に収束することが oseledec による多重エルゴード定理として証明されている。

初期値鋭敏性

リアプノフ指数 $\lambda(f)$ が正の値をとるとき,初期値鋭敏性を持つといわれている.

初期値鋭敏性は,次のように定義される.

定義2

連続関数 $f : R \rightarrow R$ について,
 $\forall x, \forall \varepsilon > 0, \exists \beta > 0, \exists y, \exists k$
s.t. $|x - y| \leq \varepsilon$ かつ $|f^k(x) - f^k(y)| \geq \beta$

リアプノフ指数の初期値鋭敏性の関係

Δx_0 : 初期誤差, $\Delta x_k = f^k(x_0 + \Delta x_0) - f^k(x_0)$: k 回反復後の誤差とする.
 k を十分大きい値だとすると,

$$\begin{aligned}\lambda(f) &= \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \ln |f'(x_i)| \\ &= \frac{1}{k} \ln \prod_{i=0}^{k-1} |f'(x_i)| \quad \leftarrow \text{対数の性質より} \\ &= \frac{1}{k} \ln |(f'(x_{k-1}) \cdot f'(x_{k-2}) \cdot \dots \cdot f'(x_0))| \\ &= \frac{1}{k} \ln |(f'(f^{k-1}(x_0)) \cdot f'(f^{k-2}(x_0)) \cdot \dots \cdot f'(x_0))| \quad \leftarrow f(x_i) = x_{i+1} \text{より} \\ &= \frac{1}{k} \ln |(f^k)'(x_0)| \quad \leftarrow \text{連鎖律より} \\ &= \frac{1}{k} \ln \left| \lim_{\Delta x_0 \rightarrow 0} \frac{f^k(x_0 + \Delta x_0) - f^k(x_0)}{\Delta x_0} \right|\end{aligned}$$

ここで, Δx_0 が十分小さいとし,

$$\lambda = \frac{1}{k} \ln \left| \frac{f^k(x_0 + \Delta x_0) - f^k(x_0)}{\Delta x_0} \right|$$

と仮定すると,

$$\Delta x_k = f^k(x_0 + \Delta x_0) - f^k(x_0) \text{ より, } |\Delta x_k| = |\Delta x_0| e^{\lambda k}$$

となり,

定義2の $x = x_0, y = x_0 + \Delta x_0$ とすると,

$$|f^k(x) - f^k(y)| = |f^k(x_0 + \Delta x_0) - f^k(x_0)| = |\Delta x_k| = |\Delta x_0| e^{\lambda k}$$

となるので, $\lambda > 0$ であれば,

初期値鋭敏性を満たすと思える.

カオスニューロンのリアプノフ指数

C言語を用いてカオスニューロン

$$f(x) = 0.8x - \frac{1}{1 + e^{\frac{-x}{0.02}}} + 0.25$$

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

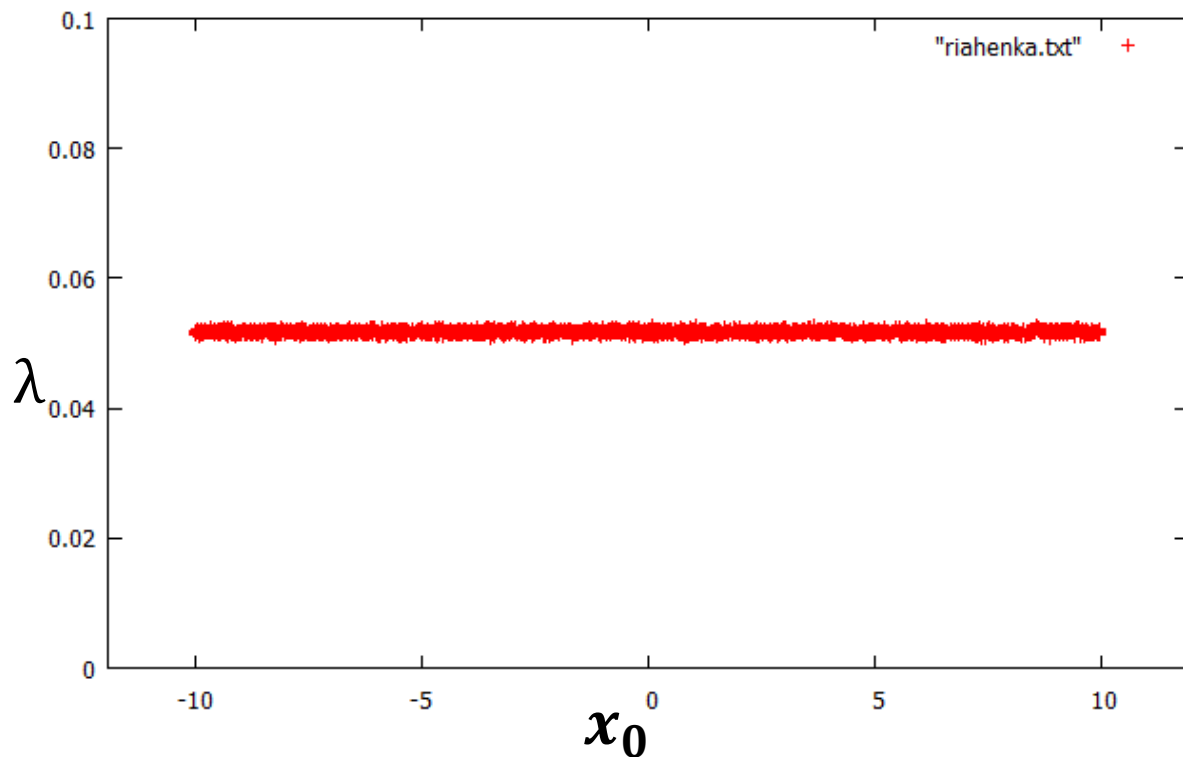
$$x_0 = 0$$

を $n = 10000$ まで反復させたときのリアプノフ数 λ は,

$$\lambda = 0.0515065$$

となり,リアプノフ数 λ が正の値をとるので、数值的に初期値鋭敏性を持つといえる.

初期値を変化させた場合



左図は,カオスニューロンの初期値を-10から10まで,0.01刻みで変化させた場合のリアプノフ指数のグラフ

反復回数は1万回

図3: 初期値を変化させたときのカオスニューロンのリアプノフ指数

任意の周期の周期点が存在する

シャルコフスキーの定理

連続関数 $f : R \rightarrow R$ について f が基本周期 n の周期点を持ち、
 k がシャルコフスキーの順序において、 n より後ろにあるとき、
 f は基本周期 k の周期点を持つ。

シャルコフスキーの順序とは以下に示すような、すべての自然数を並べた順序である。

	3,	5,	7,	9,	11,...
2,	$2 \cdot 3$,	$2 \cdot 5$,	$2 \cdot 7$,	$2 \cdot 9$	$2 \cdot 11, \dots$
2^2 ,	$2^2 \cdot 3$,	$2^2 \cdot 5$,	$2^2 \cdot 7$,	$2^2 \cdot 9$,	$2^2 \cdot 11, \dots$
			$\vdots$		
			$\dots, 2^n, \dots$	$2^3, 2^2, 2, 1$	

3はシャルコフスキーの順序の中で最も前の自然数であるので、3周期軌道の存在は、
他すべての周期軌道の存在を導いている。

周期3の点の存在

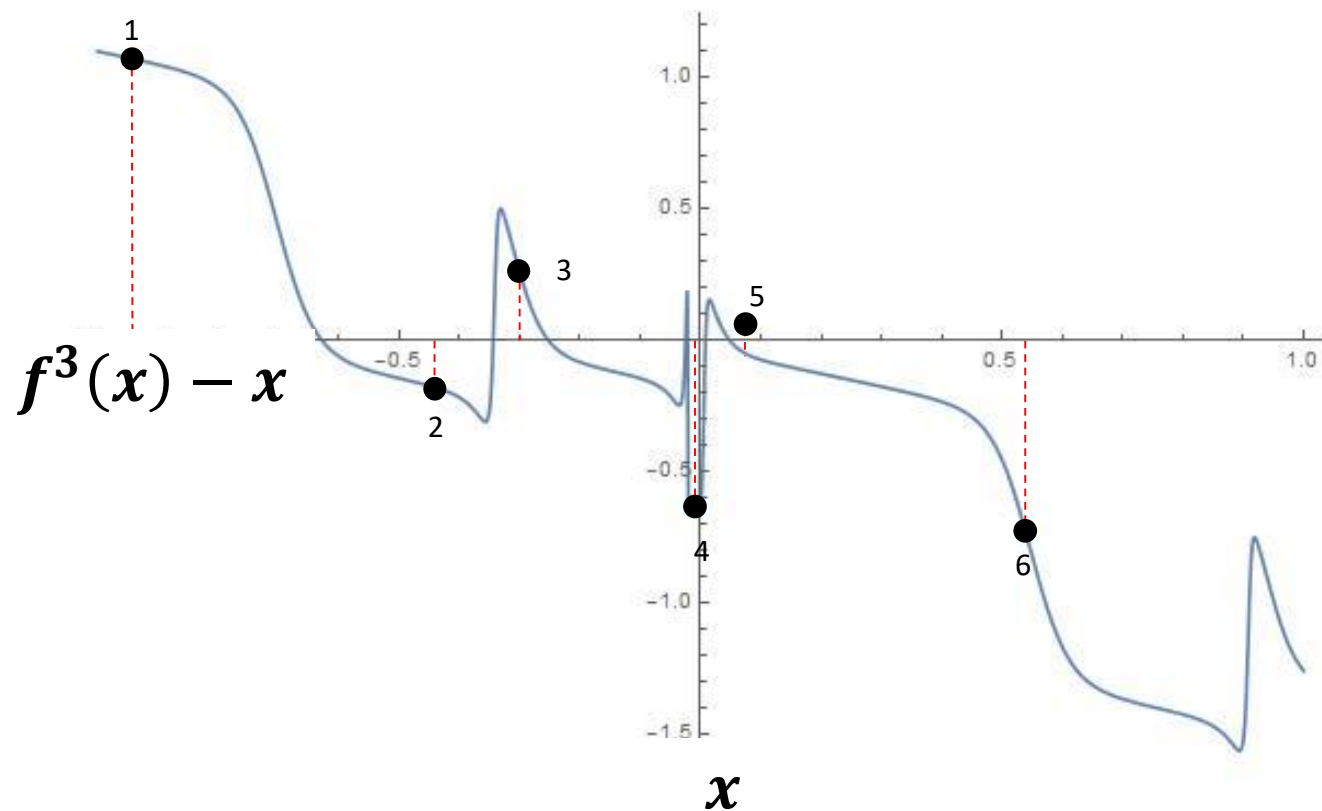


図4: $f^3(x) - x$ のグラフ

- | | |
|--------------------|--------------------------|
| (1) $x = -1$ の時 | $f^3(x) - x = 1.09793$ |
| (2) $x = -0.5$ の時 | $f^3(x) - x = -0.144899$ |
| (3) $x = -0.3$ の時 | $f^3(x) - x = 0.258435$ |
| (4) $x = -0.01$ の時 | $f^3(x) - x = -0.626765$ |
| (5) $x = 0.02$ の時 | $f^3(x) - x = 0.13013$ |
| (6) $x = 0.5$ の時 | $f^3(x) - x = -0.456425$ |

中間値の定理より
少なくとも,5点は, $f^3(x) - x = 0$
となるような点 x が存在することがわかる.

周期1の点は, $x = -0.022841$ の1つしかないため,
周期3の点が存在することが言える.

これより,カオスニューロンには任意の周期の周期
点が存在することが証明できた.

有界性

リアプノフ指数が正でもカオスにならないものがある.

それと区別するために,有界性という考え方を導入する.

有界性の定義は次のようにあらわされる.

定義3

ある区間 $[a, b]$ が存在し, $\forall x_0 \in [a, b], \forall n \in \mathbb{N}$
 $f^n(x_0) \subset [a, b]$
となるとき, 有界性を持つ

証明の設定

$$f(x) = 0.8x - \frac{1}{1+e^{50x}} + 0.25$$

$$f'(x) = 0.8 - \frac{50e^{50x}}{(1+e^{50x})^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = a_-, a_+$$

$$f(a_-) = p_+$$

$$f(a_+) = p_-$$

$$f(p_-) = q_-$$

$$f(p_+) = q_+$$

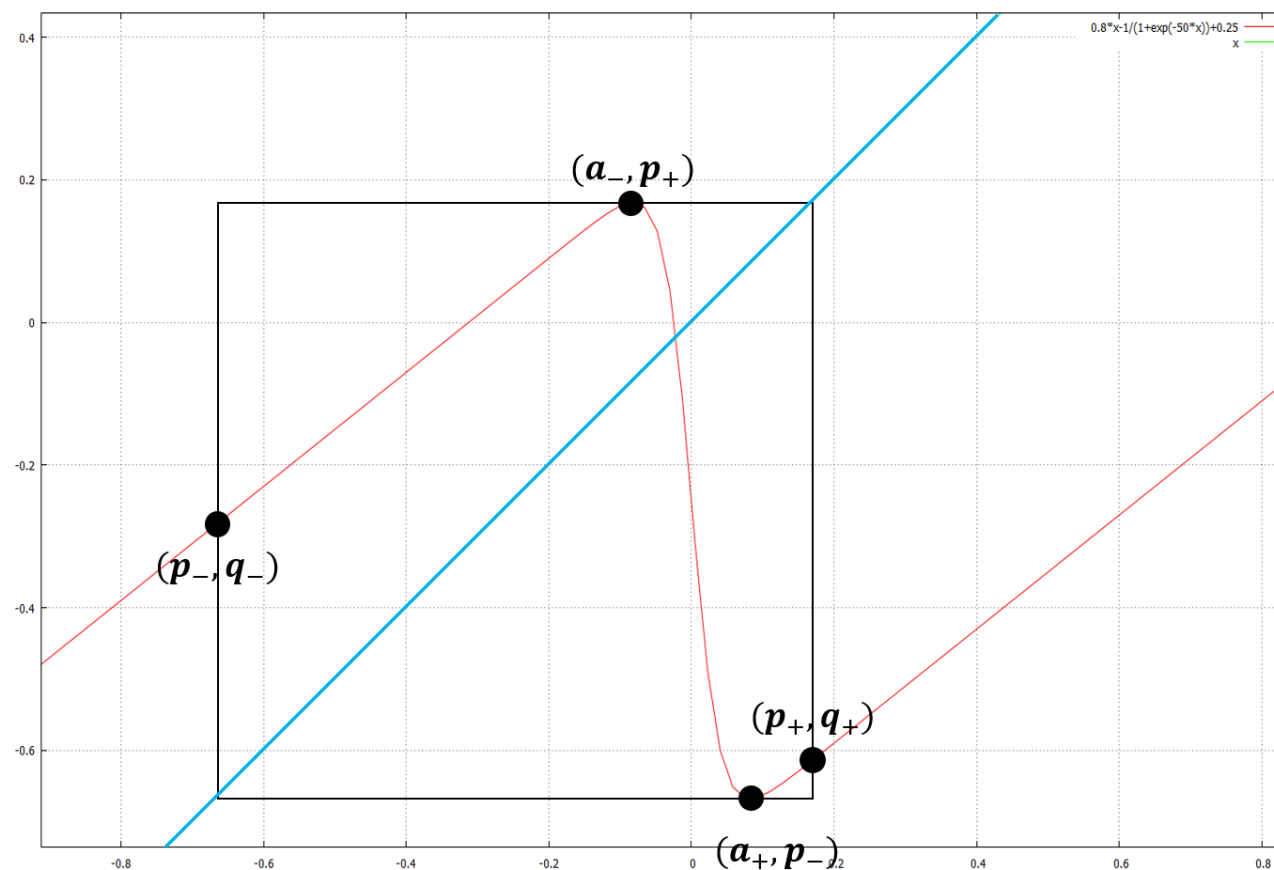


図5: 赤: $f(x)$, 青: $y = x$

有界性の証明

$x \in [p_-, p_+] \Rightarrow f(x) \in [p_-, p_+]$ を示す.

$$f'(x) = 0.8 - \frac{50e^{50x}}{(1+e^{50x})^2} \text{ より,}$$

$$\begin{aligned} x < a_- &\Rightarrow f'(x) > 0 \\ a_- \leq x \leq a_+ &\Rightarrow f'(x) < 0 \\ a_+ < x &\Rightarrow f'(x) > 0 \end{aligned}$$

$x \in [p_-, p_+]$ での $f(x)$ 最大値・最小値の候補は,
 $p_+, p_-, f(p_+) = q_+, f(p_-) = q_-$ の 4 点となる.

有界性の証明の続き

$p_- < q_+ < q_- < p_+$ なので,

$x \in [p_-, p_+]$ での $f(x)$ 最小値は, $f(a_+) = p_-$

$x \in [p_-, p_+]$ での $f(x)$ 最大値は, $f(a_-) = p_+$

以上より,

$$x \in [p_-, p_+] \Rightarrow f(x) \in [p_-, p_+]$$

すなわち,

$$f^n(x) \in [p_-, p_+] \text{となる.}$$

□

有界性の確認

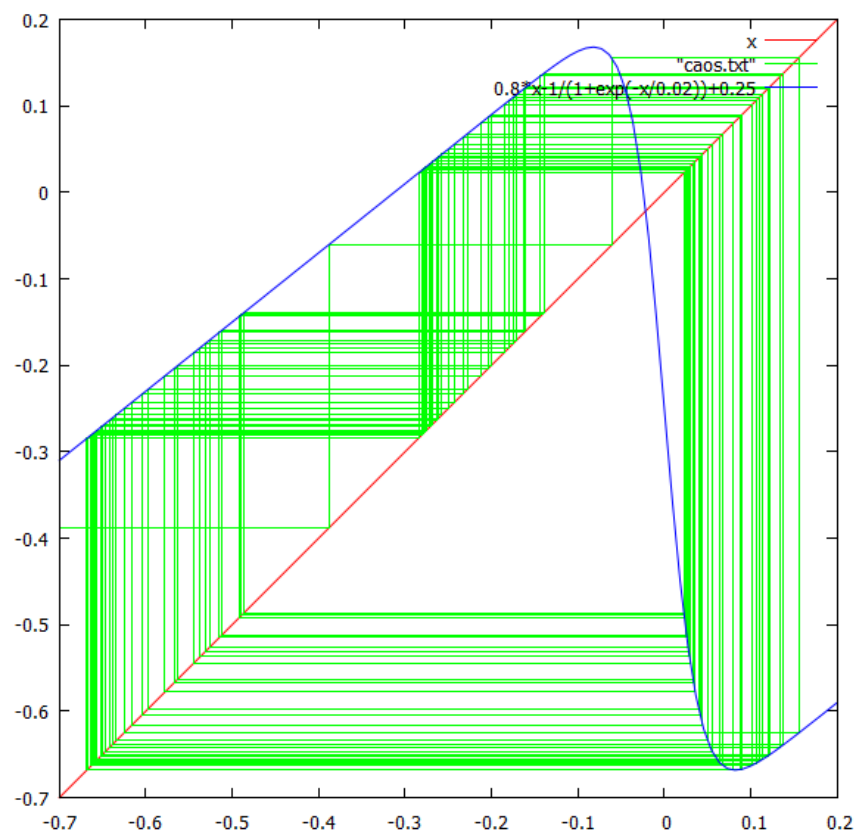


図8:初期値0から出発

アトラクター性の証明

任意の初期値から始まる軌道が, $\exists k \in \mathbb{N}, n \geq k$ に対して $f^n(x) \in [p_-, p_+]$ となることを示す.

すべての軌道が最終的に $[p_-, p_+]$ の中に入るということを言うために,

1. $x < p_-$ の時 $f(x) - x > q_- - p_-$
2. $x > p_+$ の時 $x - f(x) > p_+ - q_+$
3. $x < p_-$ の時 $f(x) \leq p_+$
4. $x > p_+$ の時 $f(x) \geq p_-$

の4つを証明する.

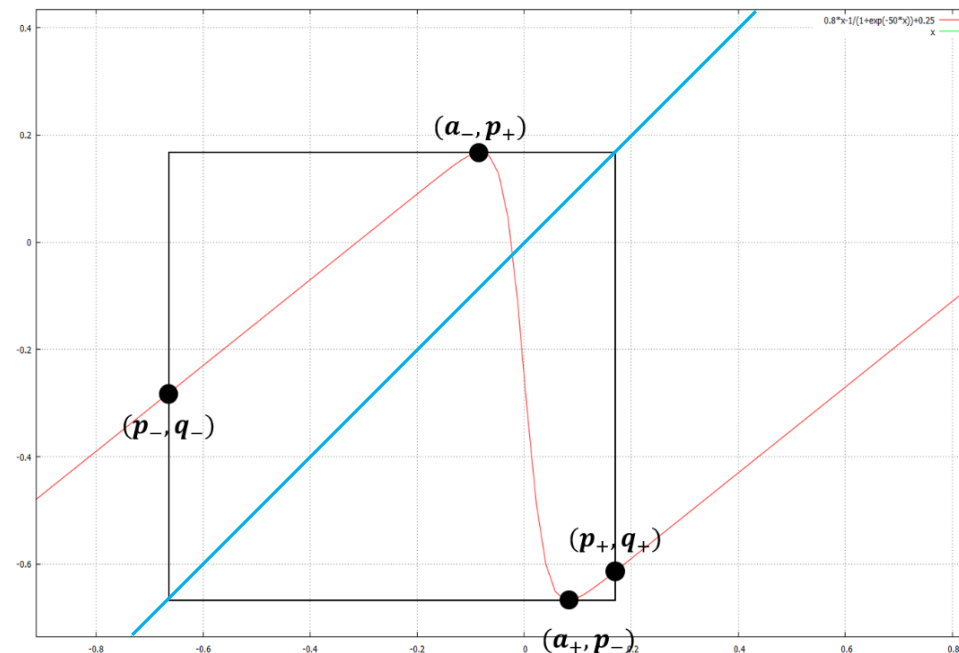


図6: 赤: $f(x)$, 青: $y = x$

アトラクター性の証明

$x < p_-$ の時 $f(x) - x > q_- - p_-$ を示す.

$g(x) = f(x) - x - (q_- - p_-)$ とする.

微分して増減を調べると

$$\forall x \Rightarrow g'(x) < 0$$

$g(p_-) = 0$ より,

$$f(x) - x > q_- - p_-$$

□

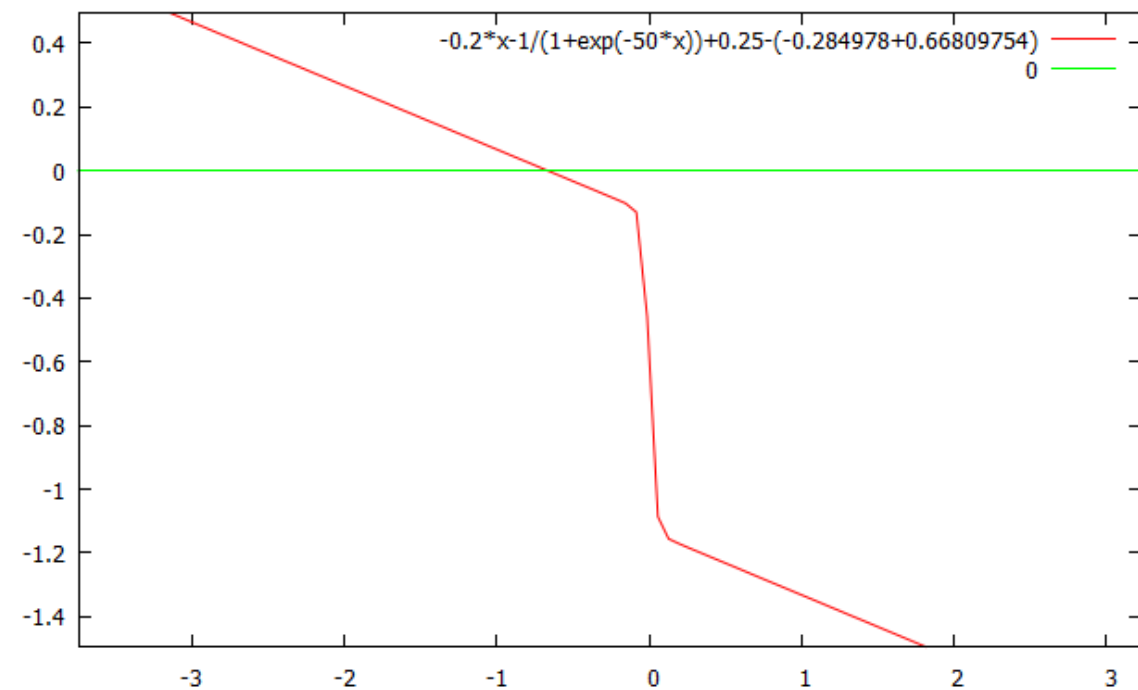


図7: $g(x)$ のグラフ

アトラクター性の証明

$x < p_-$ の時 $f(x) \leq p_+$ を示す

$x < p_-$ の時, $a_- < p_-$ と $f(x)$ の増減表より,

$$\sup f(x) = f(p_-) = q_-$$

$q_- < p_+$ より,

$x < p_-$ の時 $f(x) \leq p_+$ である.



アトラクター性の確認

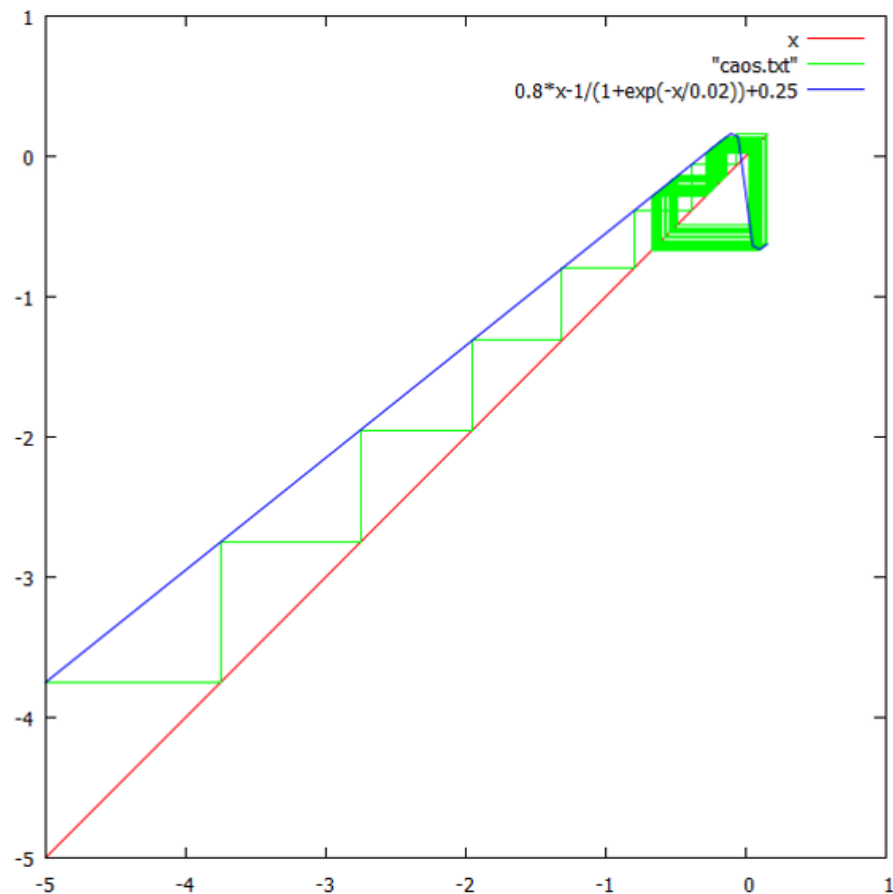


図8:初期値-5で $f(x)$ を1000回反復させたグラフ

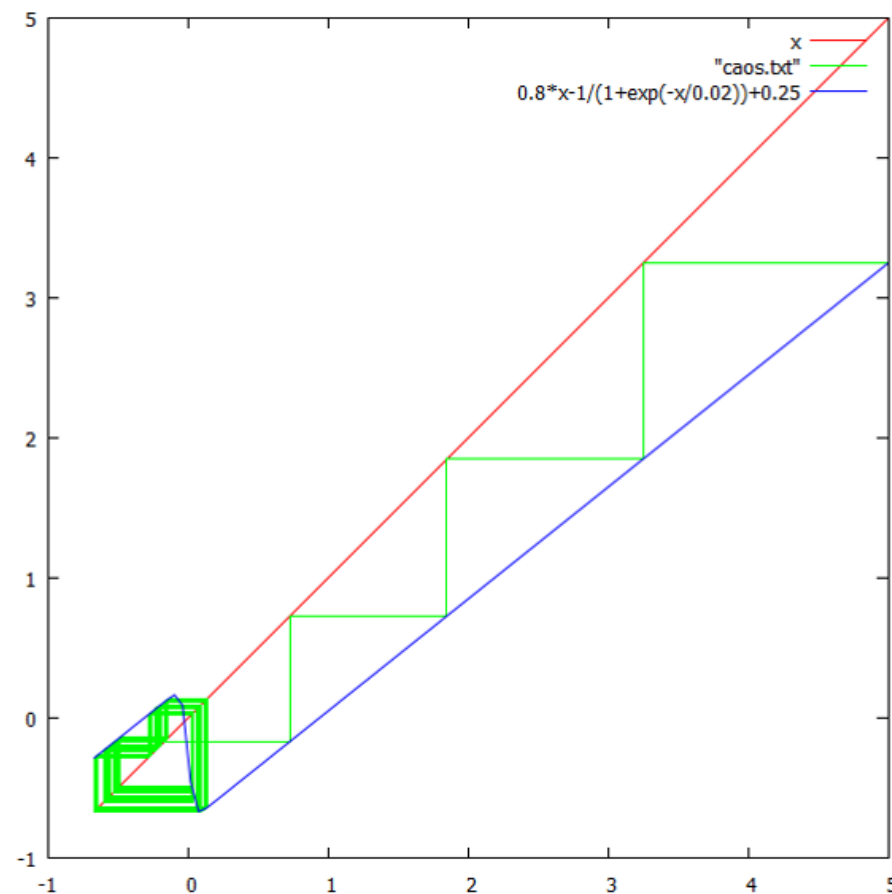


図9:初期値5で $f(x)$ を1000回反復させたグラフ

カオス性の確認

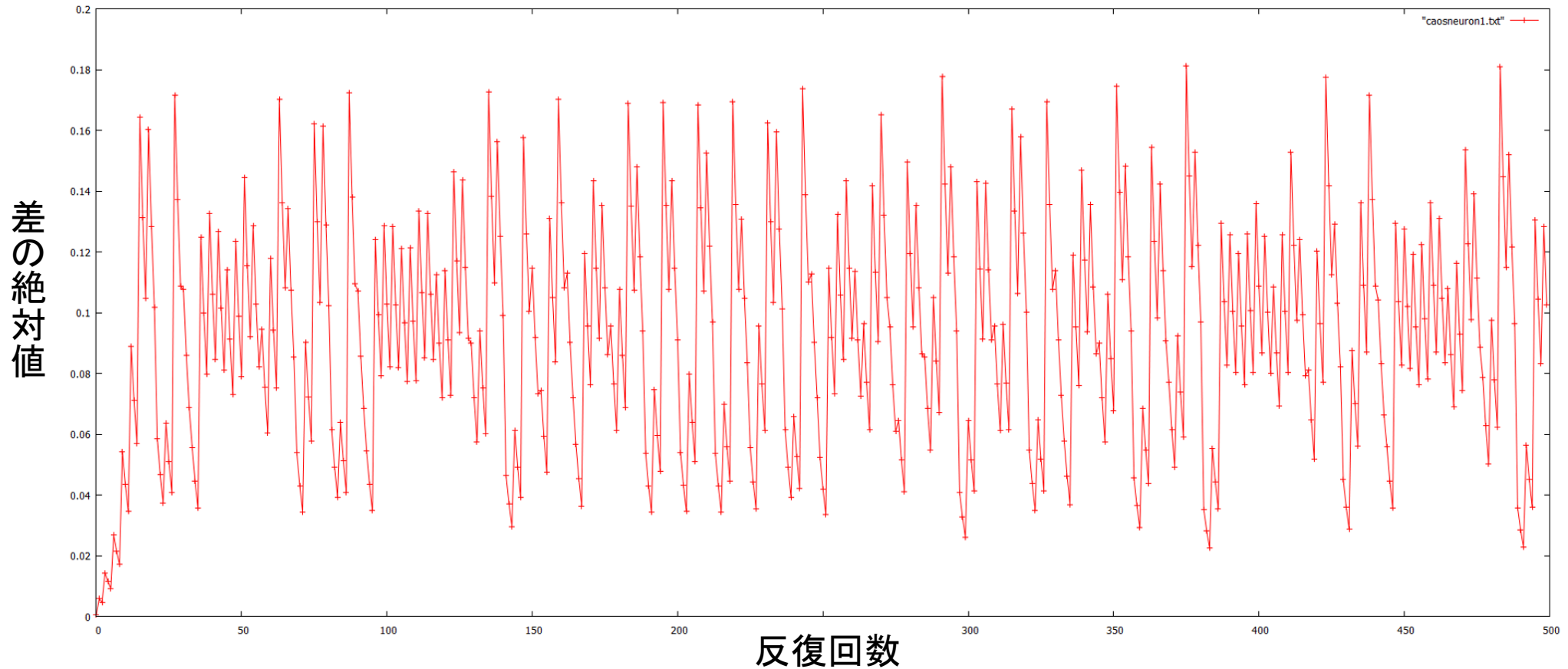
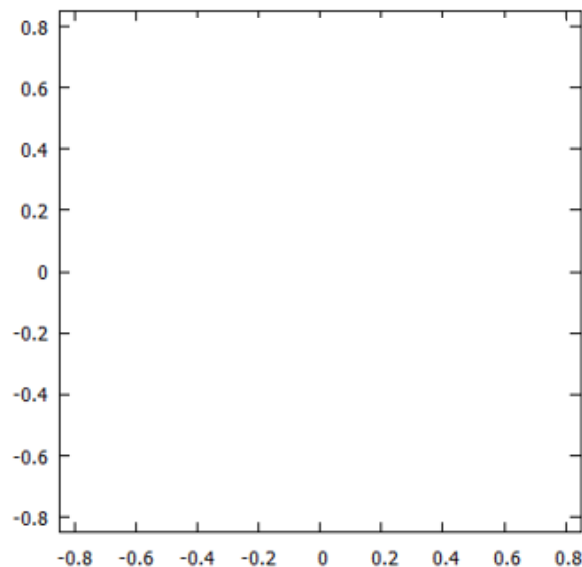


図10:初期値を 0.0005 だけずらし,500 回反復させた時の差のグラフ

ヤリイカの虹色素胞

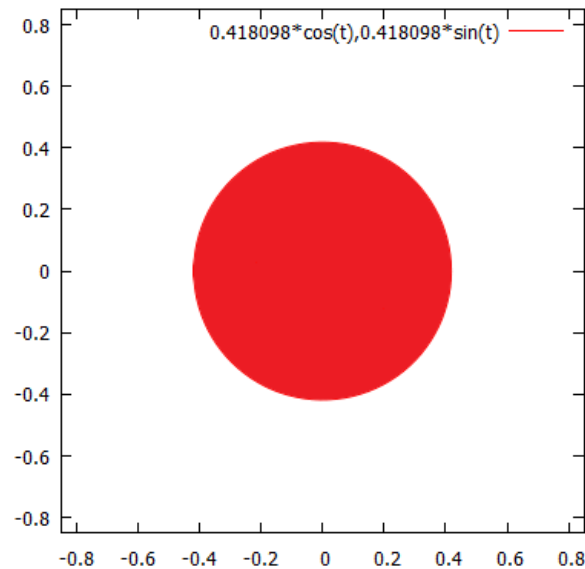
[http:// karapaia.com /archives /52067748.html](http://karapaia.com/archives/52067748.html)

ニューロンの内部状態のアニメーション



カオスニューロンの値を円の半径として適用したもの

ニューロンの内部状態のアニメーション



カオスニューロンの値を円の半径として適用したもの

参考文献

- [1]「カオス時系列解析の基礎と応用」 合原一幸著 産業図書出版(2000年)

- [2]「カオス力学系の基礎」 ロバート・L・デバニー著 株式会社ピアソン・エデュケーション出版(2007年)

- [3]「Lectures on Fractal Geometry and Dynamical Systems」 Yakov Pesin, Vaughn Climenhaga著
American Mathematical Society, Mathematics Advanced Study Semesters出版(2009年)

- [4]「カオス入門」 山口昌哉著 朝倉書店出版(1996年)

- [5]「カオス」 船越 満明著 朝倉出版(2008年)