

## 数え上げと母関数

### 1 「いかさま」正八面体さいころ

	1	2	2	3	5	6	6	7
1	2	3	3	4	6	7	7	8
3	4	5	5	6	8	9	9	10
3	4	5	5	6	8	9	9	10
5	6	7	7	8	10	11	11	12
5	6	7	7	8	10	11	11	12
7	8	9	9	10	12	13	13	14
7	8	9	9	10	12	13	13	14
9	10	11	11	12	14	15	15	16

母関数

$$\text{さいころ 1 : } P(x) = x + 2x^2 + x^3 + x^5 + 2x^6 + x^7$$

$$\text{さいころ 2 : } Q(x) = x + 2x^3 + 2x^5 + 2x^7 + x^9$$

通常の子八面体さいころの母関数は

$$P_8(x) = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8$$

$$P(x)Q(x) = (P_8(x))^2$$

問題：正六面体（立方体）さいころでは？

$$P(x)Q(x) = (P_6(x))^2$$

$$P_6(x) = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6$$

を満たす  $P(x), Q(x)$  を求めよ。

間違いの例：

$$P(x) = x^2 + x^3 + x^5 + x^6$$

$$Q(x) = 1 + x + 2x^2 + x^3 + 2x^4 + x^5 + x^6$$

追加の条件

(1)  $P(x), Q(x)$  の各項の次数は正の整数で，係数も正の整数

(2)  $P(1) = Q(1) = 6$

正解：

$$P(x) = x + 2x^2 + 2x^3 + x^4$$

$$Q(x) = x + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^8$$

※正八面体の場合は，上で紹介したものの他にあと2通りある。

## 2 硬貨の裏表

問題： $n$  枚の硬貨を投げて，裏が  $k$  枚である場合は何通りあるか。

表に 0 を，裏に 1 を割りてると，1 枚の硬貨の母関数は  $1+x$  である。よって， $n$  枚の硬貨の母関数は  $(1+x)^n$  であり，この母関数を展開したときの  $x^k$  の係数が答えとなる。

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n {}_n C_k x^k$$

${}_n C_k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$  は組合せ数あるいは二項係数と呼ばれる。

### 3 自然数の分割

例：4の分割

$$4 = 3 + 1 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1$$

より,  $P(4) = 5$

分割数の母関数

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(n)x^n = \frac{1}{\prod_{k=1}^{\infty} (1-x^k)}$$

$P(4)$  について

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\cdots} \\ &= (1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots)(1+x^2+x^4+\cdots) \\ & \quad \times (1+x^3+\cdots)(1+x^4+\cdots) \times \cdots \end{aligned}$$

$x^4$  の項は, 以下の4つである.

$$\begin{aligned} 1 \times 1 \times 1 \times x^4 & : 4 \\ x^1 \times 1 \times x^3 \times 1 & : 3 + 1 \\ 1 \times (x^2)^2 \times 1 \times 1 & : 2 + 2 \\ (x^1)^2 \times x^2 \times 1 \times 1 & : 2 + 1 + 1 \\ (x^1)^4 \times 1 \times 1 \times 1 & : 1 + 1 + 1 + 1 \end{aligned}$$