鳩と巣箱の数学

定理 1.（鳩の巣箱の原理）

> N 個の巣箱に $N+1$ 羽（以上）の鳩を入れると，ある巣箱には必ず 2 羽以上の鳩がいる．

証明　どの巣箱にも鳩が 1 羽以下しかいないとする．巣箱は N 個だから，このとき鳩の総数は N 羽以下であり，$N+1$ 羽以上の鳩がいるとの仮定に反する． ∎

例題. ある森に 100 万本の松の木が生えている．60 万本以上の松葉がある松の木は生えていないとする．この森の松の木には，同じ本数の松葉をもつ松の木があることを示せ．

解答. 鳩（＝松の木）は 100 万羽で，巣箱（＝松葉）は 0 から 599999 までの 60 万個である．巣箱より多い鳩がいるので，ある巣箱には少なくとも 2 羽の鳩を入れなければならない．これは，同じ本数の松葉をもつ松の木があることを示している． ∎

同じ本数の松葉をもつ松の木が何本あるかはわからない（2 本以上 100 万本未満であることはわかる）．また，それらの松の木の松葉の本数もわからない（0 本以上 60 万本未満であることはわかる）．

問題 1. 12 個の整数がある．それらの中から，差が 11 で割り切れるよう 2 つを選べることを示せ．

定理 2. **（一般化された鳩の巣箱の原理）**

N 個の巣箱に $Nk+1$ 羽（以上）の鳩を入れると，ある巣箱には必ず $k+1$ 羽以上の鳩がいる．

例題. 25 個の林檎箱がある．林檎は 3 種類である．それぞれの箱には同じ種類の林檎だけが入っている．これらの林檎箱のうち，少なくとも 9 箱には同じ林檎が入っていることを示せ.

解答. $25 = 3 \times 8 + 1$ だから，$N = 3, k = 8$ として「一般化された鳩の巣箱の原理」を用いればよい. ∎

問題 2. 10 人の生徒が全部で 35 問の問題を解いた．どの問題もちょうど 1 人の生徒だけに解かれている．また，ちょうど 1 つの問題を解いた生徒，ちょうど 2 つの問題を解いた生徒，ちょうど 3 つの問題を解いた生徒が，それぞれ少なくとも 1 人いる．5 つ以上の問題を解いた生徒が少なくとも 1 人いることを示せ.

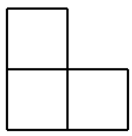
問題 3. どんな 5 人のグループでも，そのグループの中での友人の数が等しい人が 2 人いることを示せ．

ヒント：ある人に 4 人の友人がいるとすると⋯．

問題 4. いくつかのサッカーチームが総当りリーグ戦をする．どのチームも他チームと 1 回だけ試合をする．リーグ戦が行なわれているどの時点でも，それまでの試合数が一致する 2 つのチームがあることを示せ．

ヒント：本質的に**問題 3** と同じ．

問題 5. 8×8 のマス目がある．できるだけ多くのマス目を黒く塗りたい．但し，図のような形のマス目（およびこれを $90°$ 度ごとに回転させた形）に注目したとき，少なくとも 1 つのマス目は塗られていないようにする．最大いくつのマス目を黒く塗れるだろうか．



ヒント：16 個の 2×2 のマス目に分割しよう．33 個以上のマス目を黒く塗ると⋯．

例題. 2 の累乗の中で，その差が 2018 の倍数となる 2 つの数があることを示せ.

解答. 整数を 2018 で割ったとき，余りは $0, 1, \ldots, 2017$ の 2018 通りのうちのいずれかである．よって，例えば $2, 2^2, \ldots, 2^{2019}$ を考えると，それらのうち 2 つは 2018 で割ったとき同じ余りをもつ. ∎

問題 6. 52 個の異なる整数がある．それらのうち 2 つは，それぞれの 2 乗の差が 100 で割り切れることを示せ.

ヒント：52 個の整数は 1 以上 100 以下としてよい．また，x^2 と $(100-x)^2$ を 100 で割った余りは等しい.

問題 7. 10 進表記したときどの桁の数字も 1 である整数で，2019 で割り切れるものがあることを示せ.

ヒント：$1, 11, 111, \ldots, \underbrace{11\cdots1}_{2020\text{ 個}}$ を 2019 で割った余りについて考えよ.

問題 8. 3×3 のマス目があり，それぞれに $-1, 0, 1$ のいずれかが入っている．縦，横，斜めと 3 つの和をとるやり方は 8 通りある．それらのうち，少なくとも 2 つは和が等しいことを示せ.

宿題 1. 10×10 のマス目のそれぞれに整数が書いてある．隣接する 2 つの整数の差は 5 以下である．100 個の整数のうち，少なくとも 2 つは等しいことを示せ．

ヒント：あるマス目から，隣接するマス目を通って別のマス目へ行くことを考える．どのマス目から始めてどのマス目へ行く場合でも，通過するマス目の個数を（出発点のマス目は数えずに）18 個以下にできる．

宿題 2. 6 人の人がいる．これらの中の 3 人組で，みんな互いに知り合いであるか，あるいは誰も知り合いがいないか，どちらかであるような 3 人組が存在することを示せ．

ヒント：1 人を選び A さんとする．残る 5 人を A さんの知り合いとそうでない人に分けると⋯．

宿題 3. 10 個の整数がある．それらからいくつか選んで，選んだ数の和が 10 で割り切れるようにできることを示せ．

ヒント：10 個の整数を $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ とする．$0, x_1, x_1 + x_2, \ldots, x_1 + x_2 + \cdots + x_{10}$ を 10 で割った余りについて考えよ．

宿題 4. 自然数 $1, 2, \ldots, 2n$ から異なる $n+1$ 個を選ぶと，それらの中で，一方が他方で割り切れるような 2 つの数が存在することを示せ．

ヒント：選んだ $n+1$ 個を $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ とする．これらを 2 で割れるだけ割って，$x_i = 2^{a_i} b_i$（但し b_i は奇数）の形に書こう．例えば，$12 = 2^2 \times 3, 15 = 2^0 \times 15$ である．このとき，$b_1, b_2, \ldots, b_{n+1}$ はすべて奇数で，1 以上 $2n-1$ 以下である．