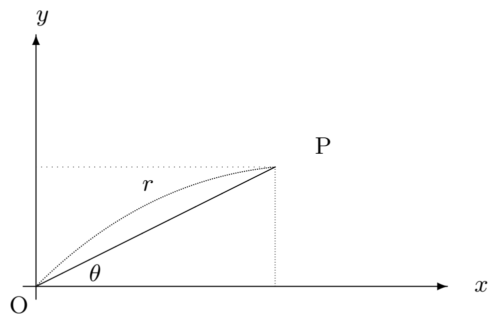
1　平面の幾何学

座標を用いて，平面の幾何学を扱う．

1.1　基礎的事項

○平面の座標

直交座標 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$:



平面上の定点を原点 O とし，原点を通り互いに直交する 2 直線を描く．それぞれの直線に向きを付け，x 軸および y 軸と名付ける．但し，x 軸の正の向きから反時計回りに $\pi/2$ だけ回ると y 軸の正の向きであるとする．点の位置を，点から各軸へ下ろした垂線の足の座標 x, y の組で表す．デカルト座標ともいう．

極座標 (r, θ) :

点の位置を，平面の原点 O からの距離 r および原点から見た向きが x 軸の正の向きとなす角度（偏角）θ との組で表す．偏角は，反時計回りを正とする．

- 極座標が指定されれば，直交座標は
$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta,$$
と表される．
- 逆に，直交座標が指定されたとき，r は $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ と一意的に定まるが，偏角 θ は一意的には定まらず，
$$\theta \mapsto \theta + 2\pi n \quad (n：整数)$$
という不定性が生じる．

○ 2 点間の距離

2 点 P, Q の直交座標をそれぞれ $\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$ とするとき，2 点間の距離 $\overline{\mathrm{PQ}}$ は，

$$\overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2} \tag{1.1}$$

で与えられる．

命題 1.1. （距離の基本性質）

1. 任意の 2 点 P, Q に対して，$\overline{\mathrm{PQ}} \geq 0$
2. $\overline{\mathrm{PQ}} = 0 \iff \mathrm{P} = \mathrm{Q}$
3. 任意の 3 点 P, Q, R に対して，三角不等式

$$\overline{\mathrm{PR}} \leq \overline{\mathrm{PQ}} + \overline{\mathrm{QR}} \tag{1.2}$$

が成り立つ．

問題 1.1. 三角不等式を，代数的に証明せよ．

○図形の移動～平行移動，鏡映，回転

これらは，図形の形を変えない（任意の 2 点間の距離を変えない）．合同変換とも呼ばれる．

- 原点を $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ に写す平行移動は，

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x + a \\ y + b \end{bmatrix} \tag{1.3}$$

で与えられる．

- 鏡映は，鏡映の軸を x 軸あるいは y 軸に選ぶと簡単に表示できる．

$$\begin{aligned} x \text{ 軸についての鏡映} \quad &: \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix} \\ y \text{ 軸についての鏡映} \quad &: \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{1.4}$$

- 原点を中心に角度 α だけ回転

極座標で見れば $\qquad (r, \theta) \mapsto (r, \theta + \alpha)$

これを直交座標で表そう．このとき $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ とおくと，

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}, \quad \begin{cases} x' = r\cos(\theta + \alpha) \\ y' = r\sin(\theta + \alpha) \end{cases} \tag{1.5}$$

である．三角関数の加法公式より，

$$\begin{aligned} x' &= r(\cos\theta\cos\alpha - \sin\theta\sin\alpha) \\ &= x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ y' &= r(\cos\theta\sin\alpha + \sin\theta\cos\alpha) \\ &= x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{aligned}$$

なので，

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{bmatrix} \tag{1.6}$$

と表せる．

○視点の移動：座標変換

問題によっては，最初に決めた座標 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ではなく別の座標 $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$ を用いた方が便利なことがある．その場合，二組の座標の間の関係を決める必要がある．新しい座標が元の座標の平行移動，鏡映，回転であたえられる場合について，結果を示す．

- 平行移動 : 座標 $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$ の座標軸が元の座標 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ の座標軸を $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ だけ平行移動したものである場合は，
$$X = x - a, \quad Y = y - b, \tag{1.7}$$
となる．
- 鏡映 : 座標 $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$ の座標軸が元の座標 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ の座標軸を x 軸について鏡映したものである場合は，
$$X = x, \quad Y = -y, \tag{1.8}$$
となる．
- 回転 : 座標 $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$ の座標軸が元の座標 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ の座標軸を原点を中心に角度 α だけ回転したものである場合は，
$$X = x\cos\alpha + y\sin\alpha, \quad Y = -x\sin\alpha + y\cos\alpha, \tag{1.9}$$
となる．

注釈. 図形を動かした場合との違いに注意せよ．

問題 1.2. 別紙参照のこと．

1.2　平面ベクトル

○ベクトルの概念

平面上のベクトルには，以下の2通りの見方（互いに同等）が可能で，必要に応じて使い分ける．

(1) 2つの成分 x, y を持つ量 $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

　これを2成分の列ベクトル（縦ベクトル）という．数 x, y をそれぞれベクトル $\boldsymbol{v}$ の第1成分，第2成分という．

(2) 2点 P, Q を結ぶ有向線分 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$

(1) は代数的な見方であり，加法および定数倍（以下，スカラー倍と呼ぶ）という演算を伴う．ベクトルの和およびスカラー倍は

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} x + x' \\ y + y' \end{bmatrix}, \quad k \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} kx \\ ky \end{bmatrix} \tag{1.10}$$

で定義される．これにより，一般のベクトル $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ は，基本ベクトル

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{1.11}$$

を用いて，

$$\boldsymbol{v} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 \tag{1.12}$$

と表せる．

命題 1.2. ベクトルの和およびスカラー倍について，以下が成り立つ．

$$\begin{array}{ll} (1) & a(b\boldsymbol{v}) = (ab)\boldsymbol{v} \\ (2) & (a+b)\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{v} + b\boldsymbol{v} \\ (3) & a(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = a\boldsymbol{v} + a\boldsymbol{w} \end{array}$$

ここで，a, b は任意の実数，$\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ は任意の2成分ベクトルである．

問題 1.3. 証明せよ．

(2) は幾何的な見方で，線分 PQ に向きを指定したものである．但し，平行移動して重なり合う有向線分は同じベクトルと見做す．

ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ というときには，P, Q の座標の差のみが本質的な意味を持つ．この差を対にして並べたものが，(1) の見方におけるベクトルである．すなわち，P, Q の座標をそれぞれ $\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$ とすると，有向線分としてのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ は，2 成分量としてのベクトルと，

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \begin{bmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \end{bmatrix} \tag{1.13}$$

という対応で同一視される．

2 成分量としてのベクトルの加法，スカラー倍を幾何的に言い換えると，以下のようになる．

- ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ との和を $\overrightarrow{\mathrm{PS}}$ と表すと，四角形 PQSR は平行四辺形である．
- $\overrightarrow{\mathrm{QP}} = -\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ である．ベクトルの差は，これと加法とを組み合わせて表せる．
- ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ に定数 k を掛けたものは，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ と同じ向き（$k > 0$ の場合）または逆向き（$k < 0$）のベクトルで，その大きさは $\overline{\mathrm{PQ}}$ の $|k|$ 倍である．