線形代数 IA（2024 年度）演習問題 1

問題 1.1. 直交座標で以下のように与えられる点を，極座標で表せ．

$$(1)\quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (2)\quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{bmatrix}$$

問題 1.2. 以下の点の座標（直交座標）を求めよ．

(1) 点 $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ を原点を中心に $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転させて得られる点

(2) 点 $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ を x 軸に関する鏡映で移して得られる点

問題 1.3. 放物線 $C : y = x^2$ に対し，以下の問に答えよ．

(1) 放物線 C を $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ だけ平行移動した曲線 C' の方程式を求めよ．

(2) 座標 $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$ の座標軸が元の座標 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ の座標軸を $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ だけ平行移動したものであるとする．放物線 C の方程式を，X, Y を用いて書け．

問題 1.4. 点 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ を，点 $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ を中心に $\pi/3$ だけ回転させて得られる点の座標（直交座標）を求めよ．

ヒント：点 $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ を原点とする座標へ平行移動し，回転を施したうえで,（逆向きの）平行移動で元の座標に戻る．

問題 1.5. $\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ とする．以下のベクトルを，$a\boldsymbol{v}_1 + b\boldsymbol{v}_2$ の形で書け．

$$(1)\quad \boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad (2)\quad \boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix} \qquad (3)\quad \boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

（裏面に続く）

問題 1.6. 直線 $ax + by + c = 0$ に原点 O からおろした垂線の足を P とする．

(1) $\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ は，この直線の法線ベクトルである．このとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = -\frac{c}{|\boldsymbol{n}|^2}\,\boldsymbol{n}$$

であることを示せ．

(2) 上の結果を用いて，直線と原点との距離が

$$\frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

で与えられることを示せ．

線形代数 IA（2024 年度）演習問題 1（解答例）

注意　以下はあくまでひとつの解答例である．誤植も含め，解答に誤りが存在するかもしれないので，鵜呑みにせず各自で検証すること．

問題 1.1. いずれも n を整数として，以下の通り．

$$\begin{aligned}&(1)\quad (r,\theta)=(\sqrt{2},\pi/4+2\pi n)\\&(2)\quad (r,\theta)=(2,-\pi/6+2\pi n)\end{aligned}$$

問題 1.2.　(1) $\begin{bmatrix}1\\ \sqrt{3}\end{bmatrix}$　(2) $\begin{bmatrix}3\\ -1\end{bmatrix}$

問題 1.3.

(1) 平行移動で点 $\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$ は，点 $\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x+a\\ y+b\end{bmatrix}$ に移る．放物線 C 上の点 $\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$ は，方程式 $y=x^2$ を満たすから，$y'-b=(x'-a)^2$ が成り立つ．よって，C' の方程式は（x',y' を改めて x,y と書いて）$y-b=(x-a)^2$ である．放物線 C,C' の図を描けば理解できるだろう．

(2) 座標変換は，

$$X=x-a,\quad Y=y-b$$

で与えられるから，放物線 C の方程式は，$Y+b=(X+a)^2$ と書き換えられる．

問題 1.4. 点 $\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}$ を原点とする座標へ平行移動し，回転を施したうえで,（逆向きの）平行移動で元の座標に戻ればよい．結果は，平面上の任意の点 $\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$ に対し，

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} &\mapsto \begin{bmatrix}X\\ Y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x-a\\ y-b\end{bmatrix} && \text{（座標変換）}\\ &\mapsto \begin{bmatrix}\frac{1}{2}(x-a)-\frac{\sqrt{3}}{2}(y-b)\\ \frac{\sqrt{3}}{2}(x-a)+\frac{1}{2}(y-b)\end{bmatrix} && \text{（}\pi/3\text{ 回転）}\\ &\mapsto \begin{bmatrix}\frac{1}{2}(x-a)-\frac{\sqrt{3}}{2}(y-b)+a\\ \frac{\sqrt{3}}{2}(x-a)+\frac{1}{2}(y-b)+b\end{bmatrix} && \text{（座標変換）}\end{aligned}$$

である．

問題 1.5.

(1) $\boldsymbol{p} = 2\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$ (2) $\boldsymbol{q} = \dfrac{19}{7}\boldsymbol{v}_1 - \dfrac{10}{7}\boldsymbol{v}_2$ (3) $\boldsymbol{r} = \dfrac{3x+y}{7}\boldsymbol{v}_1 + \dfrac{x-2y}{7}\boldsymbol{v}_2$

なお，$a\boldsymbol{v}_1 + b\boldsymbol{v}_2$ の形のことを,「$\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_2$ の線形結合」という.

問題 1.6.

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\boldsymbol{n}$ とは平行であるから，適当な実数 k を用いて，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = k\boldsymbol{n}$ と表せる．これを直線の方程式 $\boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}} + c = 0$ へ代入すれば，$k = -\dfrac{c}{|\boldsymbol{n}|^2}$ を得る.

(2) $\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|$ を求めればよい．$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right| = |k||\boldsymbol{n}| = \dfrac{|c|}{|\boldsymbol{n}|} = \dfrac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ である.