2　平面ベクトルと 2 次正方行列

問題 2.1. A, B, C を 2 次正方行列，$\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ を 2 成分列ベクトル，k をスカラーとする．このとき，以下が成り立つことを示せ．

$$\begin{aligned} &(1) \quad A(k\boldsymbol{v}) = k(A\boldsymbol{v}) \\ &(2) \quad A(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) = A\boldsymbol{v} + A\boldsymbol{w} \\ &(3) \quad (A+B)\boldsymbol{v} = A\boldsymbol{v} + B\boldsymbol{v} \end{aligned}$$

問題 2.2. 行列 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ と可換な 2 次正方行列をすべて求めよ．

問題 2.3. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ とする．$AB = O$ を満たす 2 次正方行列 B をすべて求めよ．

問題 2.4. 平面上の変換 f が線形変換ならば，

$$\begin{aligned} &f(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) = f(\boldsymbol{v}) + f(\boldsymbol{w}) \\ &f(k\boldsymbol{v}) = kf(\boldsymbol{v}) \end{aligned}$$

が成り立つことを示せ．
ヒント：ベクトルと行列の演算において，**問題 2.1** に挙げた諸規則が成り立つ．

問題 2.5. 以下の命題 P と命題 Q とが互いに同値であることを示せ.

命題 P：任意の平面ベクトル $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ および任意のスカラー k に対し,

$$\begin{cases} f(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) = f(\boldsymbol{v}) + f(\boldsymbol{w}) \\ f(k\boldsymbol{v}) = kf(\boldsymbol{v}) \end{cases}$$

が成り立つ.

命題 Q：任意の平面ベクトル $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ および任意のスカラー k, ℓ に対し,

$$f(k\boldsymbol{v}+\ell\boldsymbol{w}) = kf(\boldsymbol{v}) + \ell f(\boldsymbol{w})$$

が成り立つ.

問題 2.6.

$$\begin{cases} x' = b_{11}x + b_{12}y \\ y' = b_{21}x + b_{22}y \end{cases} \quad \text{かつ} \quad \begin{cases} x'' = a_{11}x' + a_{12}y' \\ y'' = a_{21}x' + a_{22}y' \end{cases}$$

とする．x'', y'' を x, y を用いて表せ．また，得られた結果を，行列の積の定義と比較せよ.

問題 2.7. 平面の回転行列を $R(\theta)$ とする．$R(3\theta) = R(\theta)^3$ を計算し，$\cos 3\theta, \sin 3\theta$ を $\cos\theta, \sin\theta$ で表せ.

問題 2.8. A_z を複素数の行列表示，すなわち，$z = a + ib$ に対し

$$A_z = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

とする．任意の複素数 $z_1 = a_1 + ib_1, z_2 = a_2 + ib_2$ について,

$$A_{z_1} + A_{z_2} = A_{z_1+z_2}, \quad A_{z_1z_2} = A_{z_1}A_{z_2}$$

が成り立つことを確めよ.