1　平面の幾何学

問題 1.1. 2 点 P, Q の直交座標をそれぞれ $\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$ とするとき，2 点間の距離 $\overline{\mathrm{PQ}}$ は,

$$\overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2}$$

で与えられる．このとき，任意の 3 点 P, Q, R に対して，三角不等式

$$\overline{\mathrm{PR}} \leq \overline{\mathrm{PQ}} + \overline{\mathrm{QR}}$$

が成り立つことを代数的に（図を用いずに）示せ．平行移動により 2 点間の距離が不変であることを用いてよい．

問題 1.2. 放物線 $C : y = x^2$ を考える．C の方程式を，$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ だけ平行移動した座標 $\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$ を用いて表せ.

問題 1.3. a, b を任意のスカラー，$\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ を任意の 2 成分列ベクトルとする．このとき，以下が成り立つことを示せ.

$$\begin{array}{ll} (1) & a(b\boldsymbol{v}) = (ab)\boldsymbol{v} \\ (2) & (a+b)\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{v} + b\boldsymbol{v} \\ (3) & a(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = a\boldsymbol{v} + a\boldsymbol{w} \end{array}$$

問題 1.4. 任意の平面ベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ に対して，シュヴァルツの不等式

$$|\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}| \leq |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|$$

が成り立つことを示せ.

問題 1.5. 双曲線とは，2 定点 $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2$ からの距離の差が一定である点 P の軌跡である．この定義から出発して，双曲線の方程式の標準形を導出せよ.

問題 1.6. 2 次曲線 $C : x^2 + 4xy + y^2 - \sqrt{2}x - \sqrt{2}y - \dfrac{2}{3} = 0$ を考える.

(1) 原点を中心に $\pi/4$ だけ回転した座標系で，C の方程式を書け.

(2) C はどのような曲線か.

問題 1.7. 複素数 z, z_1, z_2 に対し，以下を示せ.

(1) $\bar{\bar{z}} = z$　　(2) $\mathrm{Re}\, z = \dfrac{z+\bar{z}}{2}$　　(3) $\mathrm{Im}\, z = \dfrac{z-\bar{z}}{2i}$

(4) $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$　　(5) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$

問題 1.8. 複素数 z, z_1, z_2 に対し，以下を示せ.

(1) $|z| = |\bar{z}|$　　(2) $|z|^2 = z\bar{z}$

(3) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$　　(4) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

問題 1.9. すべての整数 n に対して

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

が成り立つことを示せ.

問題 1.10. 複素平面上で，点 z と以下の各点とはどのような位置関係にあるか，図示するとともに言葉で説明せよ.

$$-z, \quad \bar{z}, \quad iz, \quad -i\bar{z}$$

問題 1.11. 複素平面上で，点 i と点 $-i$ との距離の比が $1:2$ であるような点の全体は，どのような図形を表すか.

問題 1.12. 複素平面上で，点 z が単位円上を動くとき，点 $w = z + \dfrac{4}{z}$ はどのような図形を描くか.