

絡み目の多項式不変量

—トールラス絡み目とコンウェイ多項式を中心に—

青山学院大学 理工学部 物理・数理学科

学籍番号:15118087 轟 雄介

指導教員 西山 享

2024年2月21日

概要

結び目とは円周と同相な空間曲線のことである。三葉結び目は代表的な結び目の例である。三葉結び目はほどくことはできないが円周とは同相である。このように空間内で変形して移りあうことのできない結び目が多数存在する。

結び目の和のことを絡み目という。こちら絡んだ状態のものをほどくことは一般には不可能である。これから断りの無い限り絡み目の成分には向きを与えて考える。

空間内の絡み目を射影した図を射影図という。射影図を用いて全同位という絡み目の同値関係を考える。これから全同位で同値なもの考える。絡み目の同値類に多項式を与えるコンウェイ多項式、ジョーンズ多項式という絡み目不変量を考える。これら多項式から絡み目は一意に定まらない。

私はトーラス表面上に実現できるトーラス絡み目を中心にコンウェイ多項式を計算した。トーラス絡み目の中でもトーラスの緯度、経度方向にそれぞれ p, q 回ずつ回ってできる $T(p, q)$ に注目した。絡み目 $T(p, q)$ のコンウェイ多項式はコンウェイ多項式の定義に起因するスケイン関係式と呼ばれる3項間漸化式を満たす。また絡み目 $T(p, q)$ を2つの自明結び目が絡んだものとして考えることで別の3項間漸化式を満たすことも証明できる。漸化式を使ってコンウェイ多項式を行列式で表示し比較をしたところ、Kasteleyn 行列式は $(2n + 1)$ 次行列式を n 次行列式の z 倍で表せるということがわかった。

その他にも自明結び目が絡まった絡み目コンウェイ多項式を一般化した。第5章に興味深い絡み目のコンウェイ多項式を計算した例を列挙する。最後にジョーンズ多項式について一般的な式を2つ紹介する。

目次

1	序論	3
1.1	研究の背景	3
1.2	研究の主結果	3
1.3	本論文の構成	5
1.4	謝辞	6
2	結び目理論	7
2.1	結び目, 絡み目の定義	7
2.2	全同位	7
2.3	射影図	7
2.4	ライデマイスターの定理	8
2.5	絡み数	9
2.6	コンウェイ多項式	11
3	トーラス絡み目	11
3.1	トーラス絡み目のコンウェイ多項式	12
3.1.1	特性方程式を用いる	13
3.1.2	行列式を用いる	13
3.2	Kasteleyn 行列	14
3.3	連分数	15
4	自明結び目を成分に持つ絡み目のコンウェイ多項式	16
4.1	自明結び目を絡める (その 1)	16
4.2	自明結び目を絡める (その 2)	17
4.3	自明結び目を絡める (その 3)	19
4.4	自明結び目を絡める (その 4)	20
4.4.1	コンウェイ多項式の行列式への応用	23
4.5	自明結び目を絡める (その 5)	24
4.6	自明結び目を絡める (その 6)	25
5	種々のコンウェイ多項式の計算例	26
6	ジョーンズ多項式	30
6.0.1	自明結び目を成分に持つ絡み目のジョーンズ多項式	30
7	まとめ	31
7.1	今後の課題	31
7.2	卒研発表会での質問	32

1 序論

1.1 研究の背景

私が絡み目不変量の研究をしようと思ったきっかけは、結び目理論の一般論を卒業研究のテキスト [谷山] で学び、内容に興味を持ったからである。結び目理論は例を想像する楽しさと定義や計算の厳密さが両立する分野である。例えばトーラス絡み目と呼ばれるトーラス表面上の絡み目 $T(2, 2)$ は2つの成分を持ち、片方の成分の向きを入れ替えると、その絡み目はトーラス上に実現できても $T(p, q)$ の形では表せなくなる。

絡み目にはコンウェイ多項式と呼ばれる不変量を対応させることができるが、絡み目 $T(2, 2)$ コンウェイ多項式を計算すると z になり、一方の成分の向きを入れ替えたものは $-z$ となる。コンウェイ多項式は一見、同じと思える絡み目も分離することができる絡み目不変量である。

本研究ではコンウェイ多項式を中心に考察するが、他の絡み目不変量も登場する。これらの定義や性質は [谷山] で学んで、トーラス絡み目の定義や表記方法は [村上] を参考にした。谷山公規先生、村上順先生には大変感謝している。抽象的な定義もわかりやすく勉強になった。

1.2 研究の主結果

トーラス絡み目 $T(2, m)$ を簡単のため $T(m)$ で表す (第3章でトーラス絡み目を定義する)。トーラス絡み目 $T(m)$ のコンウェイ多項式 $\nabla(T(m)) \in \mathbb{Z}[z]$ の満たす3項間漸化式を元にしてコンウェイ多項式の行列式表示と因数分解を得た。それが定理 3.4 である。

定理 1.1. [定理 3.4] サイズが m の行列式 D_m ($m \geq 1$) を

$$D_m = \begin{vmatrix} z & -1 & & & 0 \\ 1 & z & -1 & & \\ & 1 & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & & & 1 & z \end{vmatrix}$$

とおくと、

$$\nabla(T(m+1)) = D_m = \prod_{k=1}^m (z - 2\sqrt{-1} \cos \frac{\pi k}{m+1}) \quad (1.1)$$

$$\nabla(T(m)) = 1 \quad (1.2)$$

また、3項間漸化式から連分数 [鈴木] との関係性を見つけた。

定理 1.2. [定理 3.6] 有限連分数を

$$[z_0; z_1, z_2, \dots, z_n] := z_0 + \frac{1}{z_1 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{z_{n-1} + \frac{1}{z_n}}}} = \frac{p(z_0, z_1, \dots, z_n)}{q(z_0, z_1, \dots, z_n)}$$

の様に互いに素な多項式 p, q を用いて表す。

$z_0 = z_1 = \dots = z_n = z$ のとき、

$$[z; z, z, \dots, z] = \frac{\nabla(T(n+1))}{\nabla(T(n))} \tag{1.3}$$

が成り立つ。

6 種類の特別な絡み目に関してコンウェイ多項式を計算したのでそれを紹介する。自明結び目 0_1 との絡み方に関して次の 6 つのパターンに分けて計算している。

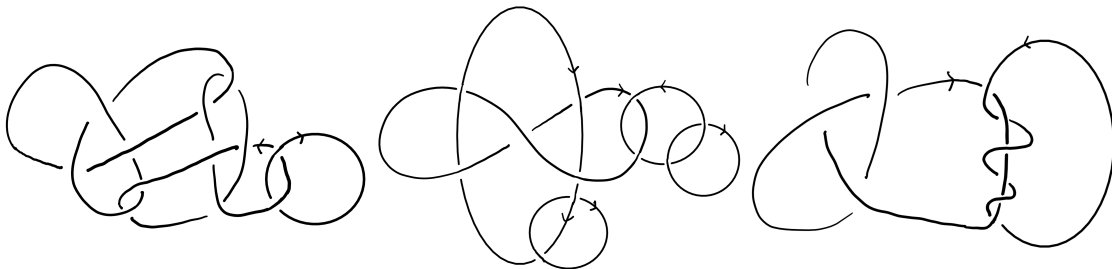


図 1: $L_1 = L' \sqcup 0_1$

図 2: $L_2 = L' \sqcup 0_1 \sqcup 0_1 \dots$

図 3: $T(m; n) = T(m) \sqcup 0_1$

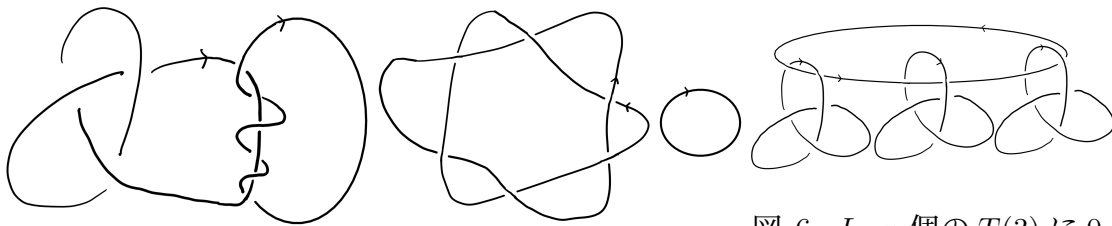


図 4: $\hat{T}(m; n) = T(m) \sqcup 0_1$

図 5: $L_5 = L' \sqcup 0_1$

図 6: L_n n 個の $T(3)$ に 0_1 が絡まったの絡み目

定理 1.3. 上の図の記号 L, L', L_1 などを用いる。それらのコンウェイ多項式は次の様に

なる。

$$\text{図 1(定理 4.3)} \quad \nabla(L_1) = \begin{cases} z\nabla(L') & (\text{正交点}) \\ -z\nabla(L') & (\text{負交点}) \end{cases} \quad (1.4)$$

$$\text{図 2(定理 4.4)} \quad \nabla(L) = (-1)^{lk(L)-lk(L')} z^n \nabla(L'), \quad k \in \mathbb{Z} \quad (1.5)$$

$$\text{図 3(定理 4.6)} \quad \nabla(T(m; n)) = (2 + z^2)\nabla(T(m; n-1)) - \nabla(T(m; n-2)) \quad (1.6)$$

$$\text{図 4(定理 4.10)} \quad \nabla(\hat{T}(m; n)) = -nz\nabla(T(m)) \quad (1.7)$$

$$\text{図 5(定理 4.2)} \quad \nabla(L_5) = 0 \quad (1.8)$$

$$\text{図 6(定理 4.11)} \quad \nabla(L_n) = z^n(1 + z^2)^n \quad (1.9)$$

図 3 の絡み目 $T(m; n)$ において 2 つの自明結び目 0_1 の絡まった絡み目を考えると、一見異なるように見えるがその絡み目はトーラス絡み目と全同位になる (定理 4.6)。2 つの表し方の違いから $(2n+1)$ 次 Kasteleyn 行列を n 次の行列式を用いて表わすことができた。それが定理 4.8 である。

定理 1.4. [定理 4.8] $(2n+1)$ 次の行列式 D_{2n+1} と n 次の行列式 D'_n を

$$D_{2n+1} = \begin{vmatrix} z & -1 & & 0 \\ 1 & z & \cdots & \\ & \cdots & \cdots & -1 \\ 0 & & 1 & z \end{vmatrix}, \quad D'_n = \begin{vmatrix} 2+z^2 & 1 & & 0 \\ 1 & 2+z^2 & \cdots & \\ & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & & 1 & 2+z^2 \end{vmatrix} \quad (1.10)$$

とおくと、

$$D_{2n+1} = zD'_n$$

が成り立つ。

他にも多数のコンウェイ多項式を計算したのでそれを第 5 章にまとめている。最後に絡まっていない自明結び目の成分を n 個持つ絡み目のジョーンズ多項式、及びトーラス絡み目のジョーンズ多項式が満たす 3 項間漸化式を第 6 章で紹介する。

定理 (2.9),(2.13),(2.15)(3.5),(3.6),(6.1) は [谷山] から引用したものである。その他の定理と補題は私が卒業研究で得られた結果である。同様の結果があるかどうか先行研究を調べなくてはならないが、時間が無く先行研究については調べていない。

1.3 本論文の構成

第 2 章では結び目理論の導入として結び目、絡み目、その同値関係について、そして絡み目不変量である絡み数、コンウェイ多項式について説明する。第 3, 4 章でトーラス絡み目の説明をし、そのコンウェイ多項式に関する定理を順に導く。第 5 章でトーラス絡み目の計算例を紹介し、第 6 章でジョーンズ多項式の導入と簡単な定理を説明する。最後に第 7 章で今後の課題と卒業研究発表会で頂いた質問をまとめた。

1.4 謝辞

中間発表時に中田先生から「絡み目の和の様なものは考えられるか」というご質問を頂き、それを意識してさらに研究を進めた。中田行彦先生に感謝いたします。

松田能文先生、中山裕道先生、林晋先生には卒業研究発表会にて有意義なご質問を頂きました。感謝いたします。時間の制約で本論文には反映できなかったのが残念である。質問とその回答は第7章にまとめた。

2 結び目理論

数学的な意味での結び目は日常用語としての結び目とは少し異なる。これから扱う結び目は紐に両端が無い閉じた結び目である。紐の素材や太さを忘れて空間曲線と考える。

2.1 結び目, 絡み目の定義

定義 2.1 (結び目の定義). S^1 と同相な \mathbb{R}^3 の部分集合を**結び目**という。結び目 (*Knot*) は K を用いて表されることが多い。

定義 2.2 (絡み目の定義). \mathbb{R}^3 において互いに交わらない有限個の結び目の和集合を**絡み目**という。絡み目 (*Links*) は L を用いて表す。

定義 2.3 (成分数). 絡み目を構成する結び目の個数を**成分数**といい、それぞれの結び目を**成分**という。絡み目を $L = K_1 \sqcup \cdots \sqcup K_n$ の様に表すとき、成分数は n である。

2.2 全同位

定義 2.4 (全同位). 絡み目 L_1, L_2 が**全同位**である ($L_1 \approx L_2$ と表記する。)とは、 $f(L_1) = L_2$ となる \mathbb{R}^3 の向きを保つ $f: \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^3$ が存在することである。

定義 2.5 (絡み目型). \mathbb{R}^3 内で異なる絡み目 L_1, L_2 は $L_1 \approx L_2$ であれば'同じ'であるように扱う同値類と考えて、絡み目 L と全同位な絡み目全体の同値類を**絡み目型**といい $[L]$ と表記する。同値類全体の集合を \mathcal{L} と表記する。

2.3 射影図

絡み目は定義から \mathbb{R}^3 の部分集合で空間図形である。絡み目自体は1次元の図形なので次元差が2ある。そこで絡み目を2次元平面に表示する便利な方法がある。

$\pi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を $\pi(x, y, z) = (x, y)$ で定義される正射影とする。

定義 2.6. 制限写像 $\pi|_L: L \rightarrow \mathbb{R}^2$ の多重点が全て横断的な2重点であるとき L は π に関して**正則な位置**にあるという。

各交点の近傍において交差する2本の曲線のうち、どちらの z 座標が大きいかの情報を**上下の情報**といい、 L の自然な射影に交点に上下の情報を加えたものを**射影図**という。

以後 $\pi(L)$ を上下の情報を含んだ射影図の意味で使う。場合によっては L そのもので射影図を表すこともある。

2.4 ライデマイスターの定理

定義 2.7 (平面全同位). L_1, L_2 を正則な位置にある絡み目とする。

$\pi(L_1)$ と $\pi(L_2)$ が平面全同位であるとは、 $h(\pi(L_1)) = \pi(L_2)$ となる \mathbb{R}^2 の向きを保つ $f: \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^3$ が存在することである。

定義 2.8 (ライデマイスター移動). 空間内の結び目を射影図に描いたとき、空間における結び目の同値変形を射影図を用いて表すと、ある一定のパターンの変形が 3 つ存在する。これらをライデマイスター移動と呼ぶ。図は [有馬] から引用して用いた。

- ライデマイスター移動 $R1$

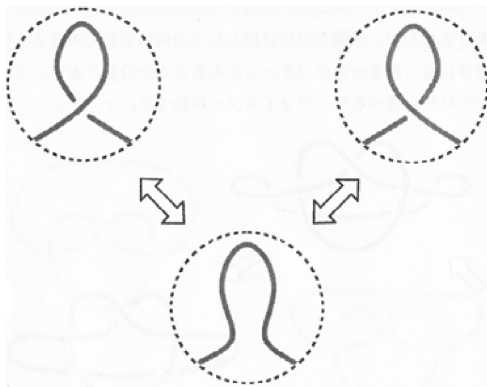


図 7: $R1$

- ライデマイスター移動 $R2$

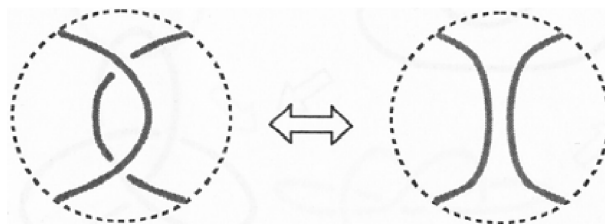


図 8: $R2$

- ライデマイスター移動 $R3$

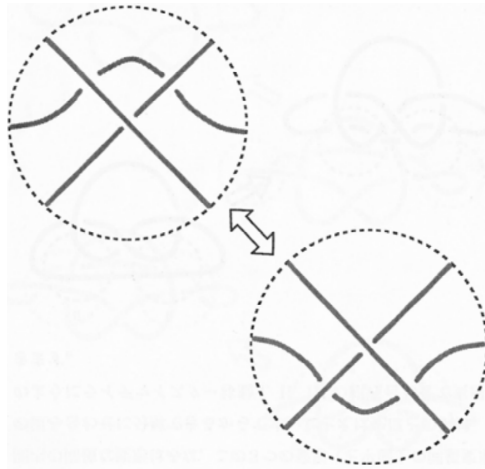


図 9: $R3$

定理 2.9 (ライデマイスターの定理 [谷山, §3.2]). L_1, L_2 を正則な位置にある絡み目とする。

L_1 と L_2 が全同位であることと、 $\pi(L_1)$ と $\pi(L_2)$ が平面全同位と有限回のライデマイスター移動で互いに移りあうことは同値である。

このようにして射影図を用いることにより絡み目の全同位による同値性を判定できる。

2.5 絡み数

2成分絡み目の絡み目に対して絡み数が定義できる。下図では異なる成分の間の交点が6個ある。

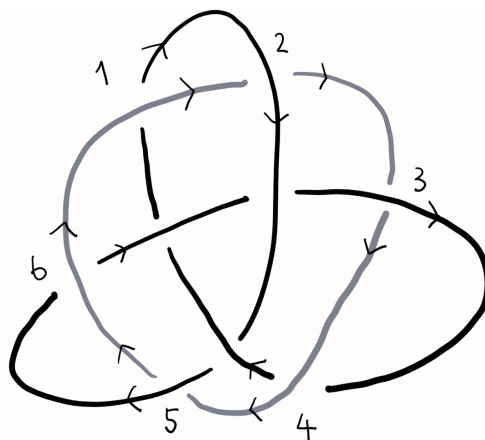


図 10: 1, 2 は正交点、3, 4, 5, 6 は負交点 絡み数 -1

定義 2.10 (自己交点、相互交点). L を n 成分絡み目とする。また、 $L = K_1 \cup K_2 \cup \cdots \cup K_n$ の射影図を $\pi(L) = \pi(K_1) \cup \pi(K_2) \cup \cdots \cup \pi(K_n)$ とする。

$\pi(K_i) \cap \pi(K_j)$ ($i \neq j$) の点を**相互交点**という。相互交点以外の交点を**自己交点**という。

定義 2.11. 射影図の相互交点の1つを p として各交点に符号 $\omega(p)$ を決める。

- 相互交点 p の上を通る成分の向きに対して、下の成分が右から左にくぐるとき $\omega(p) = 1$ と定める。このような交点 p を**正交点**という。
- 相互交点 p の上を通る成分の向きに対して、下の成分が左から右にくぐるとき $\omega(p) = -1$ と定める。このような交点 p を**負交点**という。

注: 正交点、負交点という言葉は自己交点にも使うことがある。

定義 2.12 (絡み数). $L = K_1 \cup K_2$ を 2 成分絡み目とする。

次の式で定義される整数を $lk(L)$ を L の**絡み数**と呼ぶ。

$$lk(L) := \frac{1}{2} \left(\sum_{p \in \pi(K_1) \cap \pi(K_2)} \omega(p) \right)$$

定理 2.13 ([谷山, §4.2]). L_1, L_2 を正則な位置にある 2 成分絡み目とする。このとき、 L_1 と L_2 が全同位ならば $lk(L_1) = lk(L_2)$ が成り立つ。

定義 2.14 (スケイントリプル). 図 11 のように表示された射影図の一部分のみ互いに異なる 3 つの絡み目をそれぞれ L_+, L_-, L_0 とする。これらを**スケイントリプル**という。

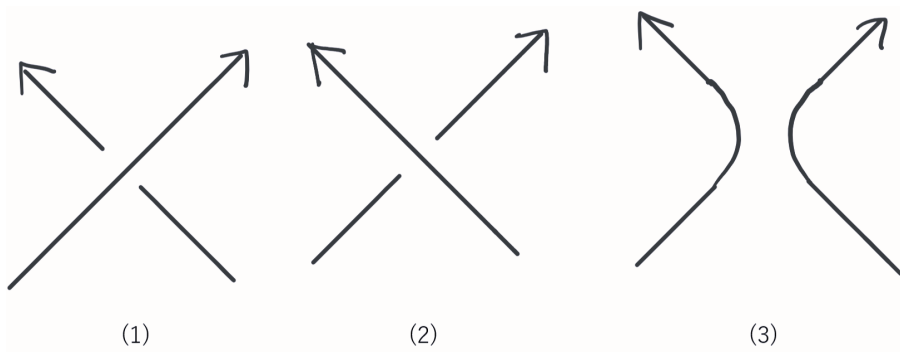


図 11: (1) : L_+ , (2) : L_- , (3) : L_0

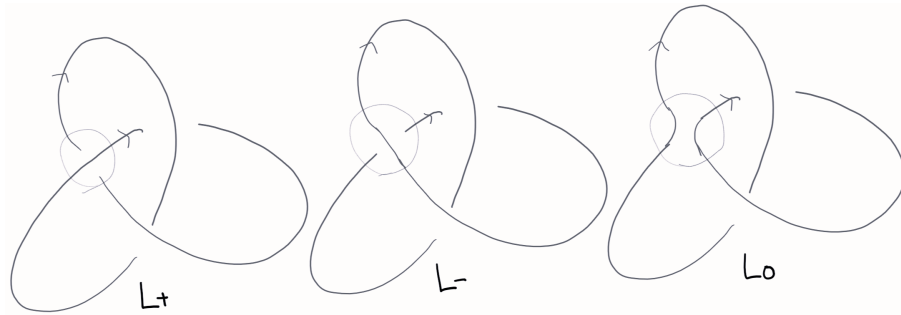


図 12: 三葉結び目のスケイントリプル例

2.6 コンウェイ多項式

定理 2.15. [谷山, §6.2] 絡み目の全同位による同値類集合を \mathcal{L} 、 z を不定元とする整数係数多項式環 $\mathbb{Z}[z]$ に対して、次の 1, 2 の性質を満たす写像 $\nabla: \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{Z}[z]$ を考える。

1. $\nabla(0_1) = 1$ (0_1 は自明結び目)
2. $\nabla(L_+) - \nabla(L_-) = z\nabla(L_0)$

L_+ , L_- , L_0 を用いるこの関係式のことを **スケイン関係式** という。このような写像 ∇ がただ一つ存在する。このとき z の多項式 $\nabla(L) \in \mathbb{Z}[z]$ を L の **コンウェイ多項式** という。

3 トーラス絡み目

定義 3.1 (トーラス絡み目). 整数 $p, q \in \mathbb{Z}$ に対して、トーラス表面上に実現された絡み目があってトーラスの回転する円に沿って p 回、回転対称軸の周りを q 回巻く絡み目をトーラス絡み目と呼んで $T(p, q)$ と表す (巻き方は図 13, 14 参照)。

ここでは $T(2, m)$, ($m \in \mathbb{Z}$) のみを考え、 $T(m)$ と表記する。

図 15 の右側はトーラス表面上の絡み目を真上から \mathbb{R}^2 へ正射影した表示方法である。これは三葉結び目と全同位である。

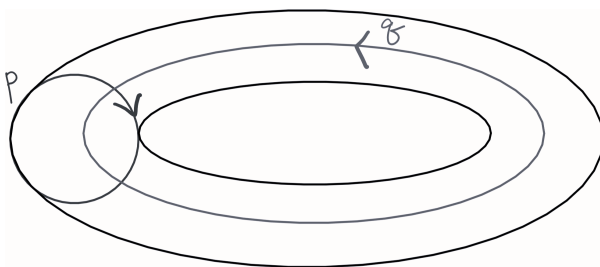


図 13: トーラス上での p, q 方向

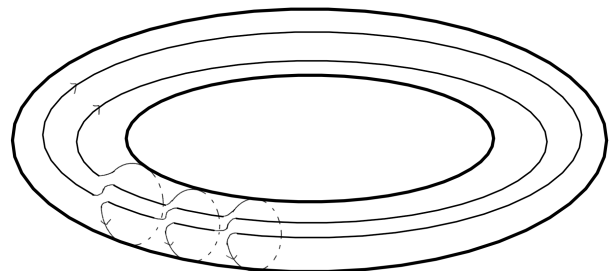


図 14: $T(3, 2)$

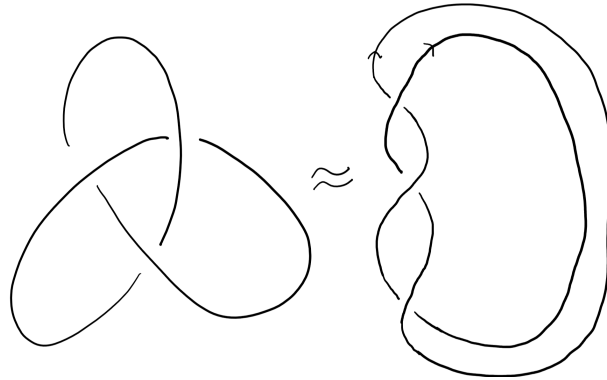


図 15: 三つ葉結び目 $T(2,3)$

3.1 トーラス絡み目のコンウェイ多項式

定理 3.2. トーラス絡み目 $T(m)$ のコンウェイ多項式 $\nabla(T(m))$ に対して次の2つの式が成立する。

$$\nabla(T(m)) = z\nabla(T(m-1)) + \nabla(T(m-2)), \quad (m \in \mathbb{Z}_{\geq 3}) \quad (3.1)$$

$$\nabla(T(m)) = -z\nabla(T(m+1)) + \nabla(T(m+2)), \quad (m \in \mathbb{Z}_{\leq -3}) \quad (3.2)$$

(証明). 図 15 の右の様にトーラス結び目を表し、 $T(m)$ の射影図における交点数は m 個となるように書くことにする。 $m \in \mathbb{Z}_{\geq 3}$ のときを考える。

ある交点に注目してスケイントリプルを考える。スケイントリプルの図では必ず左から L_+ , L_- , L_0 の順に図で描くことにする。以下繰り返さないがスケイントリプルの図では常にこの順番を用いる。

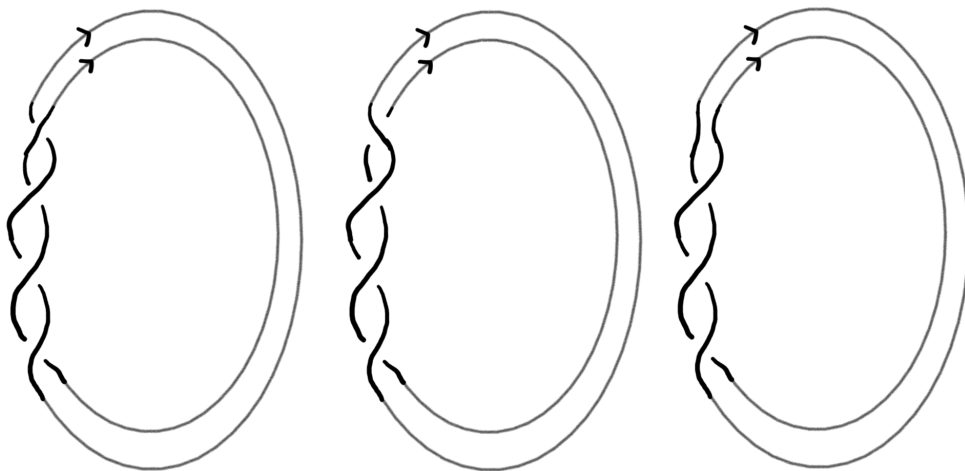


図 16: $T(4)$ のスケイントリプル

$T(m) = L_+$ としたとき、 L_- はライデマイスター移動 R_2 と定理 2.4 より $L_- \approx T(m-2)$ とわかる。また、 $L_0 \approx T(m-1)$ である。

$$\therefore \nabla(T(m)) = z\nabla(T(m-1)) + \nabla(T(m-2))$$

$m \in \mathbb{Z}_{\leq -3}$ のときも同様だがスケイン関係式の都合上、負交点から考え始めることになり $\nabla(L_0)$ は $-z$ 倍される。□

以下定理 3.2 の 3 項間漸化式 (3.1) の解を求める。

3.1.1 特性方程式を用いる

定理 3.3. $\nabla(T(m))$ の公式 $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$

$$\nabla(T(m)) = \frac{1}{2^{m-1}} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} \binom{m}{2k+1} z^{m-2k-1} (z^2 + 4)^k \quad (3.3)$$

(証明). 漸化式 (3.1) の特性方程式 $x^2 - zx - 1 = 0$ の根と初期値 $T(1) = 1$, $T(2) = z$ より次がわかる。

$$\nabla(T(m)) = \frac{(z + \sqrt{z^2 + 4})^m - (z - \sqrt{z^2 + 4})^m}{2^m \sqrt{z^2 + 4}} \quad (3.4)$$

次に二項展開を考えると、

$$(z + \sqrt{z^2 + 4})^m = \sum_{j=1}^m \binom{m}{j} z^{m-j} (\sqrt{z^2 + 4})^j \quad (3.5)$$

$$(z - \sqrt{z^2 + 4})^m = \sum_{j=1}^m \binom{m}{j} z^{m-j} (-\sqrt{z^2 + 4})^j \quad (3.6)$$

これらの差を求める。

$$(\text{式 (3.5)}) - (\text{式 (3.6)}) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} \binom{m}{2k+1} z^{m-2k-1} 2(\sqrt{z^2 + 4})^{2k+1} \quad (3.7)$$

式 (3.7) を式 (3.4) の分子に代入すると式 (3.3) が求まる。□

3.1.2 行列式を用いる

定理 3.4 (コンウェイ多項式の行列式表示). m 次行列式 D_m を次の行列式とする。

$$D_m = \begin{vmatrix} z & -1 & & & 0 \\ 1 & z & -1 & & \\ & 1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & & 1 & z \end{vmatrix}, \quad (m \geq 1) \text{ また、 } D_0 = 1 \text{ とおく。}$$

この行列式を用いて $T(m)$ のコンウェイ多項式を次の様に表すことができる。

$$\nabla(T(m+1)) = D_m = \prod_{k=1}^m (z - 2\sqrt{-1} \cos \frac{\pi k}{m+1}) \quad (\text{因数分解}) \quad (3.8)$$

(証明). D_m を 1 行目で余因子展開すると

$$D_m = zD_{m-1} + D_{m-2} \quad (3.9)$$

一方、 $D_0 = \nabla(T(1)) = 1$, $\nabla(T(m)) = z\nabla(T(m-1)) + \nabla(T(m-2))$ だから、 D_m の漸化式 (3.9) と $\nabla(T(m+1))$ の漸化式 (3.1) が一致する。

式 (3.8) の因数分解は次の章で紹介する定理 3.5 に値を代入した。 \square

3.2 Kasteleyn 行列

定理 3.5. Kasteleyn 行列 [栢木] を

$$K_n = \begin{pmatrix} a & -b & & & 0 \\ b & a & -b & & \\ & b & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -b \\ 0 & & & b & a \end{pmatrix}$$

とおくと

$$\det K_n = \prod_{k=1}^n (a - 2\sqrt{-1} b \cos \frac{\pi k}{n+1}) \quad (3.10)$$

と因数分解する。

$a = z$, $b = 1$ を代入したものの行列式が定理 3.4 の D_m と一致する。

3.3 連分数

定理 3.6. 連分数を

$$[z_0; z_1, z_2, \dots, z_n] := z_0 + \frac{1}{z_1 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{z_{n-1} + \frac{1}{z_n}}}} = \frac{p(z_0, z_1, \dots, z_n)}{q(z_0, z_1, \dots, z_n)}$$

と互いに素な多項式 p, q で表すと、 $z_0 = z_1 = \dots = z_n = z$ のとき、

$$[z; z, z, \dots, z] = \frac{\nabla(T(n+1))(z)}{\nabla(T(n))(z)} \quad (3.11)$$

が成り立つ。

(証明). $z_0 = z_1 = \dots = z_n = z$ のとき、連分数の決め方よりこの p, q は次の漸化式を満たすことがよく知られている ([鈴木] 参照)。

$$p_n = zp_{n-1} + p_{n-2}, \quad q_n = p_{n-1}, \quad p_0 = \nabla(T(1)) \quad (3.12)$$

これはトーラス絡み目の漸化式 (3.1) と一致する。

次に $\nabla(T(n+1))$ と $\nabla(T(n))$ が互いに素であることを数学的帰納法で示す。 $n = 2$ のとき、

$$\frac{\nabla(T(3))}{\nabla(T(2))} = \frac{1+z^2}{z} \quad (3.13)$$

であり、 $\nabla(T(3))$ と $\nabla(T(2))$ は互いに素な多項式である。

$n = N$ のとき、 $\nabla(T(N+1))$ と $\nabla(T(N))$ が互いに素であると仮定する。 $n = N+1$ のときを考える。定理 3.2 より $\nabla(T(N+2))$ は次の漸化式を満たす。

$$\nabla(T(N+2)) - z\nabla(T(N+1)) = \nabla(T(N)) \quad (3.14)$$

背理法を用いて示す。 $\nabla(T(N+2))$ と $\nabla(T(N+1))$ が互いに素で無く、公約式 d を持つと仮定すると多項式 f, g を用いて次の様を書く。

$$\nabla(T(N+2)) = df \quad (3.15)$$

$$\nabla(T(N+1)) = dg \quad (3.16)$$

式 (3.14) に代入すると、 $\nabla(T(N))$ が d で割り切れることがわかる。多項式 h を用いて $\nabla(T(N)) = dh$ と書く。

$$df - zdg = \nabla(T(N)) \quad (3.17)$$

$$= dh \quad (3.18)$$

よって、 d は $\nabla(T(N+1))$ と $\nabla(T(N))$ の公約式である。 d は定数である。 z^n の係数を比較すると、

$$p_n = \nabla(T(n+1)), \quad q_n = \nabla(T(n)) \quad (3.19)$$

がわかる。 □

4 自明結び目を成分に持つ絡み目のコンウェイ多項式

定義 4.1 (辺). 絡み目 L の自然な射影 $\pi(L)$ において、交点集合 $V(\pi(L))$ とする。 $\pi(L) \setminus V(\pi(L))$ の連結部分の \mathbb{R}^2 における閉包を $\pi(L)$ の**辺**という。

4.1 自明結び目を絡める (その1)

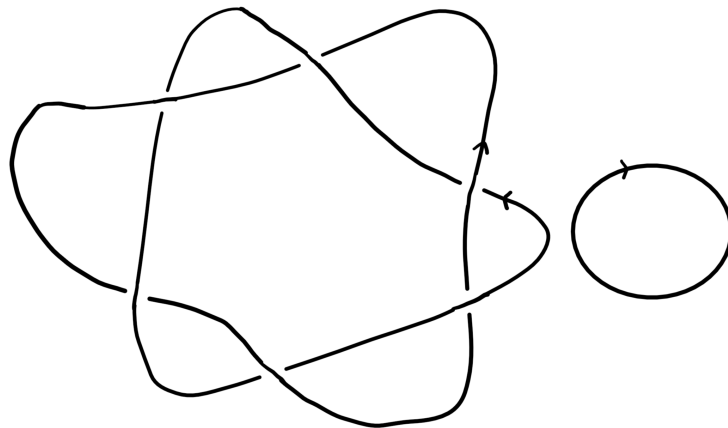


図 17: $L = T(6) \sqcup 0_1$

定理 4.2. 図 17 の様な任意の絡み目 L' と完全に分離できる 0_1 を成分に持つ絡み目 L のコンウェイ多項式は次を満たす。

$$\nabla(L) = 0 \quad (4.1)$$

(証明). ライデマイスター移動を用いて、 L は L' の 1 辺と 0_1 がスケイントリプル L_0 のような向きになるように移すことができる。ここで L_0 は図 18 の右の様に向きを整えた絡み目を考える。

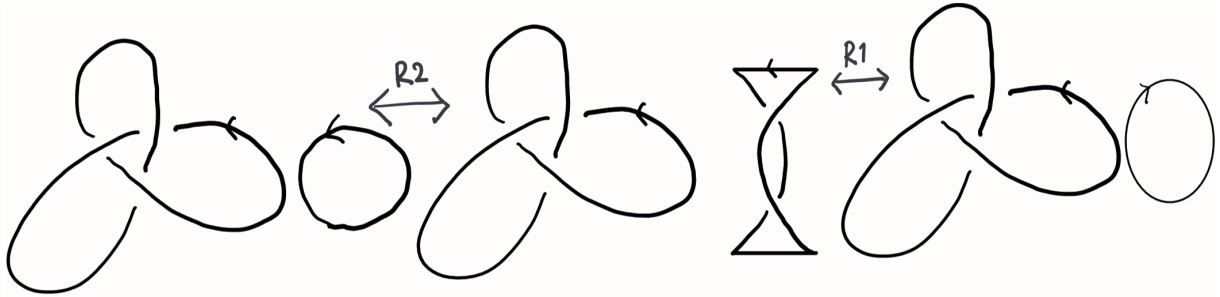


図 18: ライデマイスター移動で向きを揃える様子

$L = L_0$ として L_+ , L_- を用意する。ライデマイスター移動 (定義 2.8) の $R1$ により、 L_+ と L_- は移りあう。

ライデマイスターの定理 2.4 より、 $L_+ \approx L_-$, $\nabla(L_+) = \nabla(L_-)$ とわかる。スケイン関係式に代入すると

$$z\nabla(L_0) = \nabla(L_+) - \nabla(L_-) \quad (4.2)$$

$$= 0 \quad (4.3)$$

$$\nabla(L) = \nabla(L_0) = 0 \quad (4.4)$$

□

4.2 自明結び目を絡める (その 2)

補題 4.3. 図 19,20 のように自明結び目 0_1 を任意の絡み目 L' のある 1 つの辺に同符号の交点を 2 つ持つように絡める。そのようにしてできた絡み目を L とする。

L' と自明結び目の交点の符号によって L のコンウェイ多項式が異なり、次の式を満たす。

$$\nabla(L) = \begin{cases} z\nabla(L') & (\text{正交点}) \\ -z\nabla(L') & (\text{負交点}) \end{cases} \quad (4.5)$$



図 19: L'



図 20: $L = L' \sqcup 0_1$ 正交点の場合

(証明). L' と 0_1 の交点を選び、スケイントリプルを用意する。

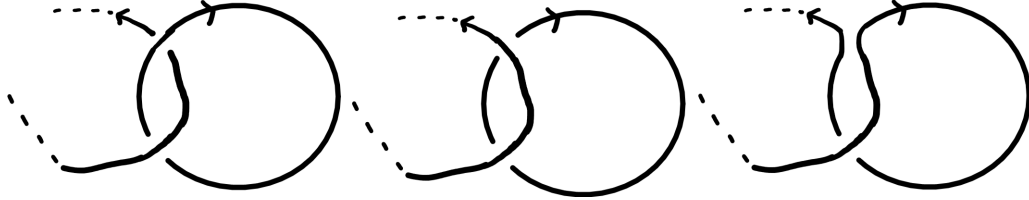


図 21: L の交点の拡大図

交点が正交点の場合、 $L_+ = L$ と考えると L_+ は $L' \approx L_0$ に自明結び目 0_1 を絡めたものと思えることができる。さらに L_- は L' と 0_1 を並べたものである。定理 4.2 より、 $\nabla(L_-) = 0$ である。

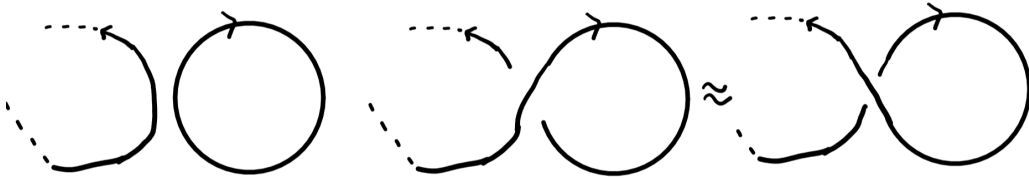


図 22: L_- と全同位なもの L_0 としたスケイントリプル

$\nabla(L_-) = 0$ をスケイン関係式に代入すると、

$$\nabla(L) = \nabla(L_+) = z\nabla(L_0) + 0 \quad (4.6)$$

$$\therefore \nabla(L) = z\nabla(L') \quad (4.7)$$

交点が負交点の場合、 $L_- = L$ とすると、 $L_0 \approx 0_1$ であり、 $\nabla(L_+) = 0$ をスケイン関係式に代入すると、

$$\nabla(L) = \nabla(L_-) = -z\nabla(L_0) + 0 \quad (4.8)$$

$$\therefore \nabla(L) = -z\nabla(L') \quad (4.9)$$

□

4.3 自明結び目を絡める (その3)

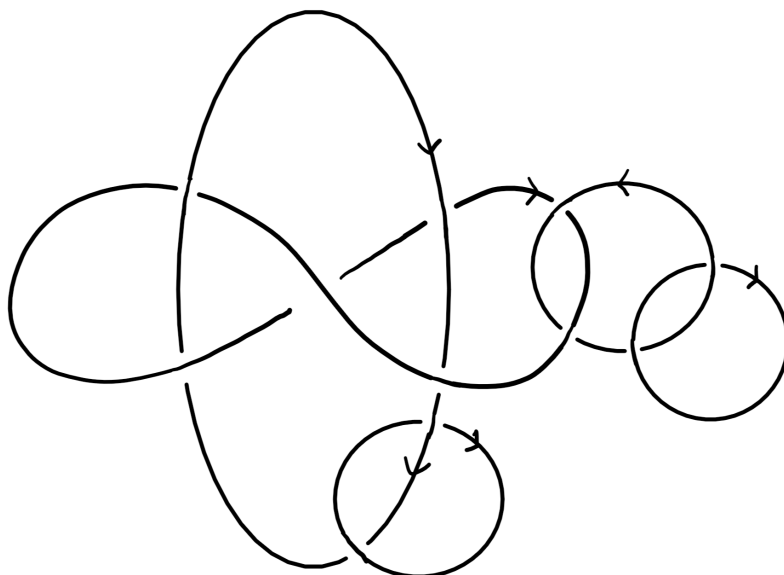


図 23: ホワイトヘッド絡み目 L' に 3 個の 0_1 を絡めた L

定理 4.4. 図 23 の様な任意の絡み目 L' に n 個の自明結び目を同符号の交点を 2 個持つように連続して絡めた絡み目を L とする。このとき L のコンウェイ多項式は次の式を満たす。

$$\nabla(L) = (-1)^{lk(L) - lk(L')} z^n \nabla(L') \quad (4.10)$$

(証明). 補題 4.3 を用いて数学的帰納法で証明する。 L' と n 個の 0_1 が絡んだ絡み目を L^n と書くことにする。

$n = 1$ のとき、補題 4.3 より次の式を満たす。

$$\nabla(L^1) = \begin{cases} z\nabla(L') & (lk(L^1) - lk(L') = 1) \\ -z\nabla(L') & (lk(L^1) - lk(L') = -1) \end{cases} \quad (4.11)$$

$n = N$ のとき、

$$\nabla(L^N) = (-1)^{lk(L^N) - lk(L')} z^N \nabla(L') \quad (4.12)$$

が成立すると仮定する。

$n = N + 1$ のとき、補題 4.3 より次の式を満たす。

$$\nabla(L^{N+1}) = \begin{cases} z\nabla(L^N) & (lk(L^{N+1}) - lk(L^N) = 1) \\ -z\nabla(L^N) & (lk(L^{N+1}) - lk(L^N) = -1) \end{cases} \quad (4.13)$$

式 (4.13) の右辺は式 (4.12) より次の式を満たす。

$$\begin{cases} z\nabla(L^N) = z^{N+1}\nabla(L') \\ -z\nabla(L^N) = -z^{N+1}\nabla(L') \end{cases} \quad (4.14)$$

また、

- $lk(L^N) = 2k$ のとき、 $lk(L^{N+1}) - lk(L') = 2k - 1$ となる
- $lk(L^N) = 2k - 1$ のとき、 $lk(L^{N+1}) - lk(L') = 2k$ となるから

$$\nabla(L^{N+1}) = \begin{cases} z^{N+1}\nabla(L^N) & (lk(L^{N+1}) - lk(L') = 2k) \\ -z^{N+1}\nabla(L^N) & (lk(L^{N+1}) - lk(L') = 2k - 1) \end{cases} \quad (4.15)$$

が成立する。 □

4.4 自明結び目を絡める (その 4)

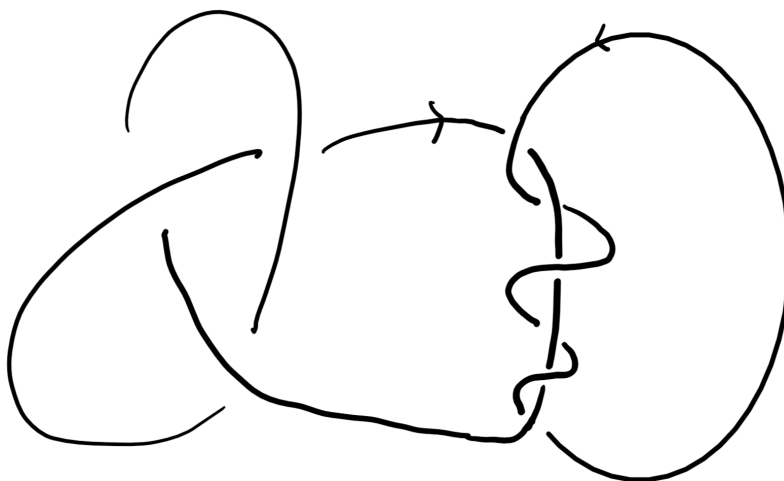


図 24: $T(3;3) : T(3) \sqcup 0_1$

定義 4.5. 図 24 の様な向きでトラス絡み目 $T(m)$ に自明結び目が複数回絡まった絡み目を考える。(後の定義 4.9 参照)

$T(m)$ と 0_1 が $2n$ 個の交点をもつ絡み目を $T(m; n)$ と書く ($n \in \mathbb{N}$)。

定理 4.6. $T(m; n)$ のコンウェイ多項式は次の漸化式 (4.16) をみたす。

$$\nabla(T(m; n)) = (2 + z^2)\nabla(T(m; n - 1)) - \nabla(T(m; n - 2)) \quad (4.16)$$

(証明). $T(m)$ と 0_1 の交点を選び、スケイントリプルを考える。 $L_+ = T(m; n)$ と考えると、 $L_- \approx T(m; n-1)$ となる。

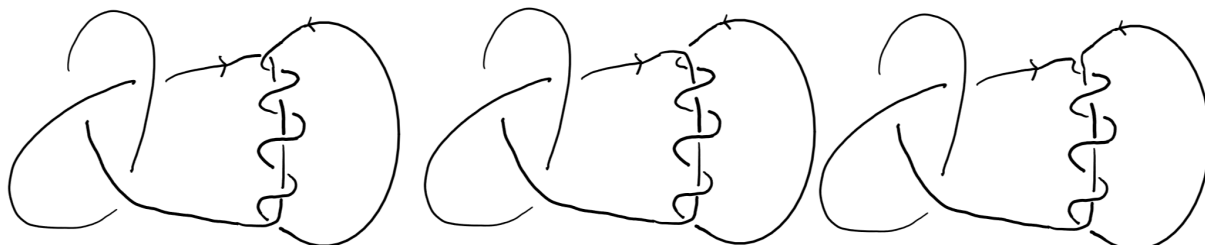


図 25: $T(3;4)$ のスケイントリプル

次に $L_0 = L_+$ としてスケイントリプルを考えると、 $L'_0 \approx T(m; n-1)$ である。

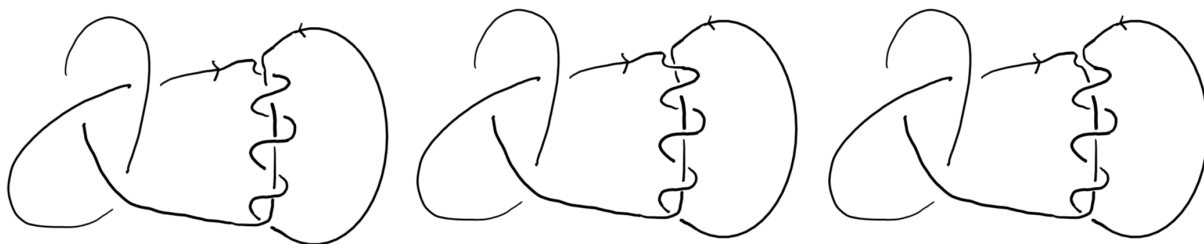


図 26: $T(3;4)$ の $L_0 = L_+$ としたスケイントリプル

次に $L'_- = L'_+$ としてスケイントリプルを考えると、 $L''_0 \approx T(m; n-2)$ である。

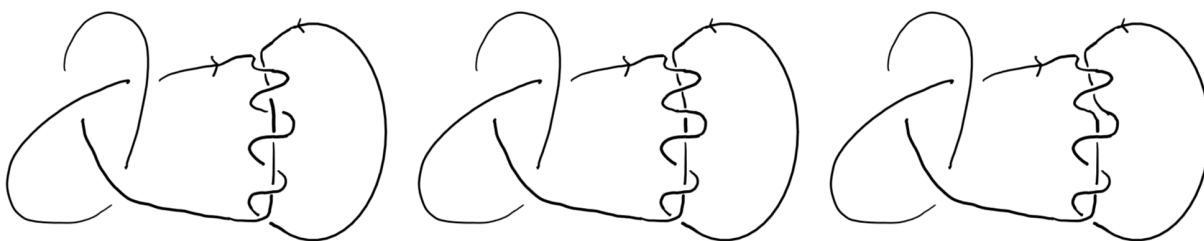


図 27: $T(3;4)$ の $L'_- = L'_+$ としたスケイントリプル

同様に L_- 型を起点に交点を順に分解すると、最終的に次の図 28 の様なスケイントリプルが得られる。

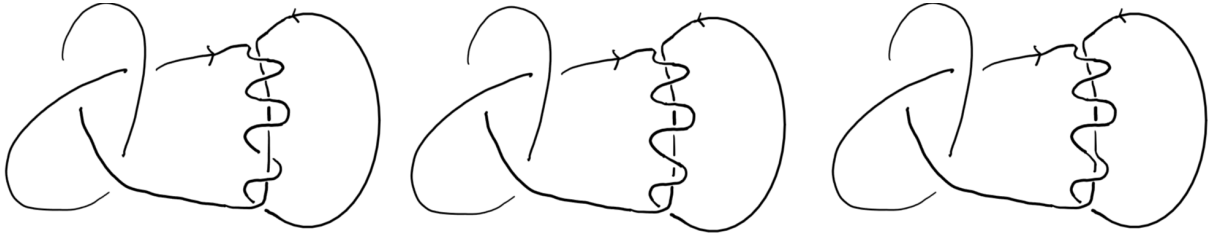


図 28: $T(3;4)$ の最終的なスケイントリプル

図 28 の真ん中の絡み目は $T(m)$ と、右側の絡み目は $T(m;1)$ とそれぞれ全同位な絡み目となる。これをスケイン関係式に代入すると次が成り立つ。

$$\nabla(T(m;n)) = (1+z^2)\nabla(T(m;n-1)) + z^2 \sum_{k=1}^{n-2} \nabla(T(m;k)) + z\nabla(T(m)) \quad (4.17)$$

ここで式 (4.17) と、式 (4.17) で n を $n-1$ に置き換えたものの差を考えると、

$$\nabla(T(m;n)) = (2+z^2)\nabla(T(m;n-1)) - \nabla(T(m;n-2))$$

が求まる。 □

定理 4.7. n 次行列式 D'_n を次の様に定める。

$$D'_n = \begin{vmatrix} 2+z^2 & 1 & & & 0 \\ 1 & 2+z^2 & 1 & & \\ & & 1 & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & & & & & 1 & 2+z^2 \end{vmatrix}, \quad D'_0 = 1$$

$T(m;n)$ のコンウェイ多項式 $\nabla(T(m;n))$ は次の式で与えられる。

$$\nabla(T(m;n)) = z\nabla(T(m))D'_{n-1} = zD_{m-1}D'_{n-1} \quad (4.18)$$

(証明). D'_n を余因子展開することで

$$D'_n = (2+z^2)D'_{n-1} - D'_{n-2} \quad (4.19)$$

を得る。 $D'_0 = 1$, $D'_1 = 2+z^2$ であり、漸化式 (4.19) は漸化式 (4.16) と形が一致するので数学的帰納法を用いて示す。

$n=1$ のとき、補題 4.3 より $\nabla(T(m;1)) = z\nabla(T(m))$, $D'_0 = 1$ だから成り立つ。

$n = 2$ のとき、補題 4.3 と定理 4.6 より、

$$\nabla(T(m; 2)) = (2 + z^2)\nabla(T(m; 1)) - \nabla(T(m; 0)) = (2 + z^2)z\nabla(T(m)) \quad (4.20)$$

$$= (2 + z^2)zD'_1\nabla(T(m)) \quad (4.21)$$

となり、成立する。ここでは定理 4.2 より、 $\nabla(T(m; 0)) = 0$ となることを用いた。

$n = N$ のとき、 $\nabla(T(m; N)) = zD'_{N-1}\nabla(T(m))$ 、 $n = N + 1$ のとき、 $\nabla(T(m; N + 1)) = zD'_N\nabla(T(m))$ が成り立つことを仮定する。

$n = N + 2$ のときを考える。定理 (4.6) より

$$\nabla(T(m; N + 2)) = (2 + z^2)\nabla(T(m; N + 1)) + \nabla(T(m; N)) \quad (4.22)$$

$$= z\nabla(T(m))((2 + z^2)D'_N + D'_{N-1}) \quad (4.23)$$

$$\text{(式 (4.19) より)} = z\nabla(T(m))D'_{N+1} \quad (4.24)$$

以上より、 $n = N + 2$ で成立するので証明された。 \square

4.4.1 コンウェイ多項式の行列式への応用

定理 4.8. 定理 3.4、定理 4.7 の行列式の間に関係式が成り立つ。つまり

$$D_{2n+1} = \begin{vmatrix} z & -1 & & \mathbf{0} \\ 1 & z & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ \mathbf{0} & & 1 & z \end{vmatrix}, \quad D'_n = \begin{vmatrix} 2 + z^2 & 1 & & \mathbf{0} \\ 1 & 2 + z^2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ \mathbf{0} & & 1 & 2 + z^2 \end{vmatrix}$$

とおくと、

$$D_{2n+1} = zD'_n \quad (4.25)$$

が成り立つ。

(証明). 定理 4.7 において、 $T(2, 1)$ と自明結び目 0_1 の絡み目 $T(1; n)$ を考えるとコンウェイ多項式は次を満たす。

$$\nabla(T(1; n)) = z\nabla(T(1))D'_{n-1} \quad (4.26)$$

$T(1) \approx 0_1$ より、 $\nabla T(1) = \nabla(0_1) = 1$ であるから、

$$\nabla(T(1; n)) = zD'_{n-1} \quad (4.27)$$

一方で定理 3.4 より、次が成り立つ。

$$D_{2n+1} = \nabla(T(2n + 2)) \quad (4.28)$$

トラス絡み目の定義 3.1 より、 $T(1; n) \approx T(2n)$ である。これと式 (4.27), (4.28) より、

$$D_{2n+1} = \nabla(T(2n + 2)) = \nabla(T(1; n + 1)) = zD'_n \quad (4.29)$$

\square

4.5 自明結び目を絡める (その5)

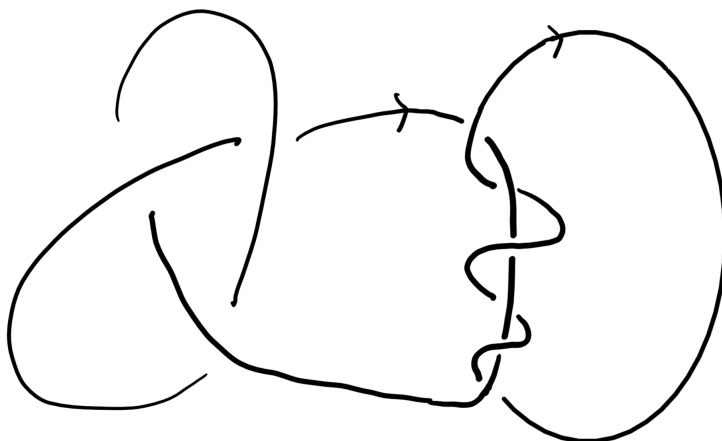


図 29: $\hat{T}(3; 3)$

定義 4.9. 図 29 の様な向きでトールス絡み目 $T(m)$ に自明結び目が複数回絡まった絡み目を考える。(定義 4.5 参照) $T(m)$ と 0_1 の交点が $2n$ 個の絡み目を $\hat{T}(m; n)$ と書く ($n \in \mathbb{N}$)。

定理 4.10. $\hat{T}(m; n)$ のコンウェイ多項式は次を満たす。

$$\nabla(\hat{T}(m; n)) = -nz\nabla(T(m)) \quad (4.30)$$

(証明). 数学的帰納法で示す。 $n = 1$ のとき、補題 4.3 より成立する。

$n = 2$ のとき、 $\hat{T}(m; 2)$ の $T(m)$ と 0_1 の交点でスケイントリプルを考える。 $L_- \approx \hat{T}(m; 1)$ と考えると、 $L_0 \approx T(m)$ であるから、スケイン関係式に代入することで次がわかる。

$$\nabla(\hat{T}(m; 2)) = -z\nabla(T(m)) + \nabla(\hat{T}(m; 1)) \quad (4.31)$$

補題 4.3 より、 $\nabla(\hat{T}(m; 1)) = -z\nabla(T(m))$ であるから、

$$\nabla(\hat{T}(m; 2)) = -z\nabla(T(m)) - z\nabla(T(m)) = -2z\nabla(T(m)) \quad (4.32)$$

$n = N$ のとき、 $\nabla(\hat{T}(m; N)) = -Nz\nabla(T(m))$ が成立することを仮定する。 $n = N + 1$ のときを考える。 $L_- = \hat{T}(m; N)$ と考えると $L_0 \approx T(m)$ であるから、スケイン関係式に代入することで次がわかる。

$$\nabla(\hat{T}(m, N + 1)) = z\nabla(T(m)) + Nz\nabla(T(m)) = (N + 1)z\nabla(T(m)) \quad (4.33)$$

が得られて、 $n = N + 1$ で成り立つ。 \square

4.6 自明結び目を絡める (その6)

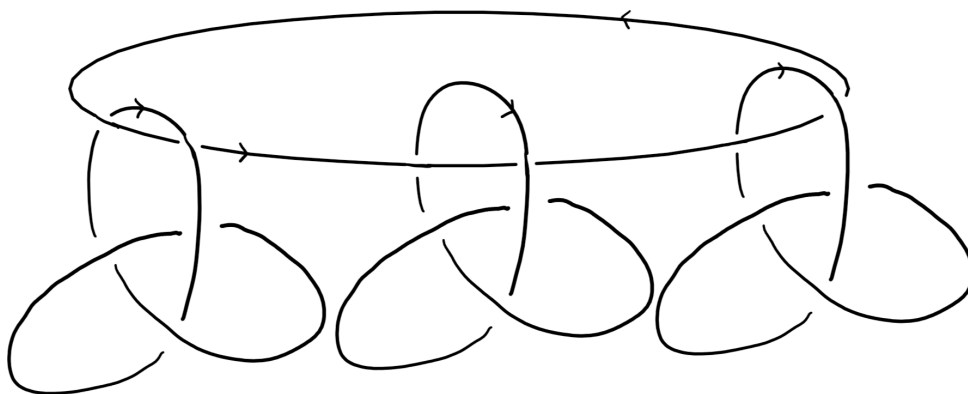


図 30: $L_3 : T(3)$ と 3 つの 0_1 の '和'

定理 4.11. 図 30 の様に自明結び目 0_1 で n 個の $T(3)$ を同方向から束ねた絡み目を L_n とする。 L_n のコンウェイ多項式は次を満たす。

$$\nabla(L_n) = z^n(1 + z^2)^n \quad (4.34)$$

(証明). 数学的帰納法で示す。 $n = 1$ のとき、補題 4.3, $\nabla(T(3)) = 1 + z^2$ より

$$\nabla(L_1) = z(1 + z^2) \quad (4.35)$$

$n = N$ のとき、

$$\nabla(L_N) = z^N(1 + z)^N \quad (4.36)$$

が成立すると仮定する。

$n = N + 1$ のとき、 L_{N+1} (図 30) の三葉結び目の成分 $T(3)$ の 1 つに注目し 0_1 との交点の 1 つでスケイントリプルを考える。次の図では一番左の交点を選んでいる。左がスケイントリプルの L_- 、右が L_0 である。

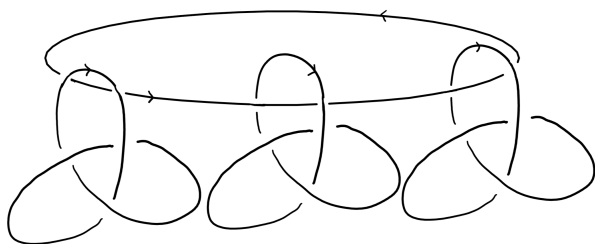


図 31: $n = 3, L_-$

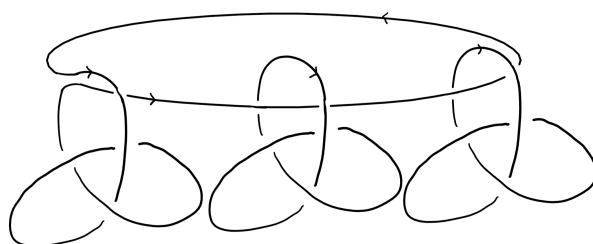


図 32: $n = 3, L_0$

L_- (図 31) は分離可能な成分を持ち、定理 4.2 より $\nabla(L_-) = 0$ である。

L_0 (図 32)において、他の全成分と相互交点を持つ成分 $T(3)$ の自己交点の 1 つ (図 32 の一番左の自己交点) でスケイントリプルを考える。それを $L'_+ = L_0$, L'_- , L'_0 とする (下図参照)。



図 33: L'_-

図 34: L'_0

ライデマイスター移動より $L'_- \approx L_N$ がわかる。一方で L'_0 は L_N に 0_1 を同符号交点を 2 個持つように絡めた絡み目である。補題 4.3 より、

$$\nabla(L'_0) = z\nabla(L_N) = z^{N+1}(1+z^2)^N \quad (4.37)$$

これと、仮定の式 (4.36) をスケイン関係式に代入する。

$$\nabla(L_+) = z\nabla(L_0) + \nabla(L_-) \quad (4.38)$$

$$= z\{z\nabla(L'_0) + \nabla(L'_-)\} + \nabla(L_0) \quad (4.39)$$

$$= z\{z^{N+2}(1+z^2)^N + z^N(1+z^2)^N\} + 0 \quad (4.40)$$

$$= z^{N+1}(1+z^2)^{N+1} \quad (4.41)$$

であり $n = N + 1$ で成立することがわかった。 □

5 種々のコンウェイ多項式の計算例

第 4 章の定理で求めた絡み目のコンウェイ多項式以外に、興味から手計算した絡み目を紹介する。これらの式は一般的な形はしていない雑多なものである。各絡み目と向き付けは図を参考に同定してほしい。

1. $T(3)$ を 2 重にした絡み目 L_1 のコンウェイ多項式。

$$\nabla(L_1) = z + 14z^3 + 18z^5 + 8z^7 + z^9 \quad (5.1)$$

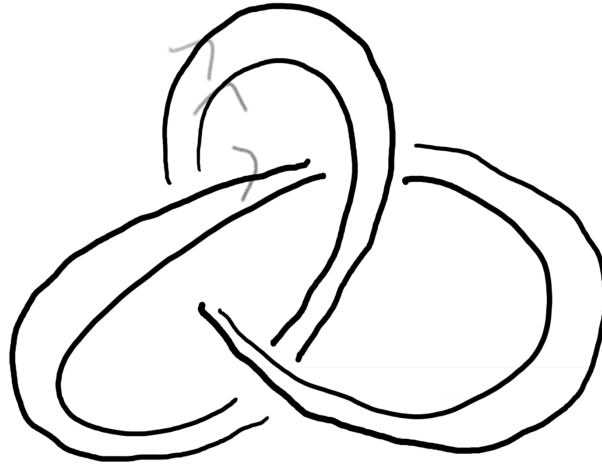


図 35: L_1

2. $T(3)$ をトーラス上で少しずらして 2 重にした絡み目 L_2 のコンウェイ多項式。

図 36 の右はトーラス表面上に L_2 が張り付いた様子の図で、左は L_1 と比較しやすいように \mathbb{R}^3 内で形を整えた L_2 である。

$$\nabla(L_2) = 4z + 45z^3 + 178z^5 + 271z^7 + 198z^9 + 75z^{11} + 14z^{13} + z^{15} \quad (5.2)$$

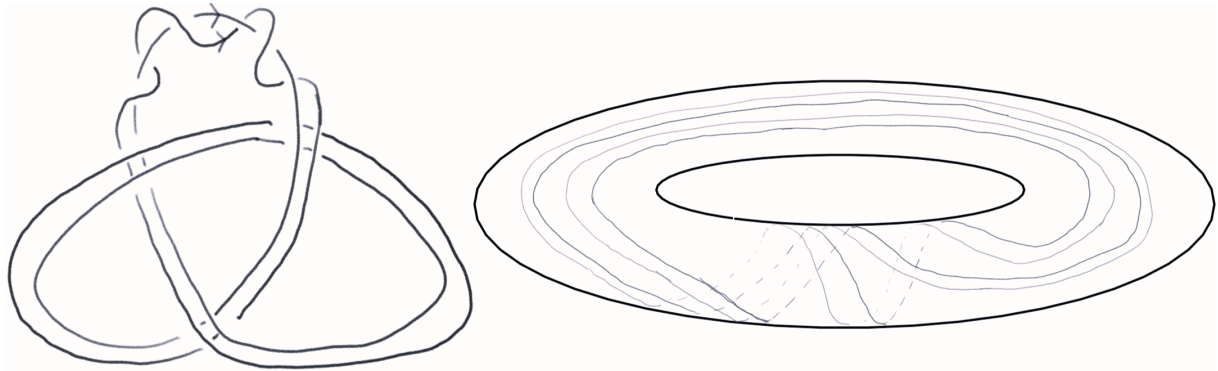


図 36: L_2

3. L_2 に自明結び目 0_1 を図の様に絡めた絡み目 L_3 のコンウェイ多項式。

$$\nabla(L_3) = 9z^2 + 107z^4 + 483z^6 + 887z^8 + 813z^{10} + 411z^{12} + 116z^{14} + 17z^{16} + z^{18} \quad (5.3)$$

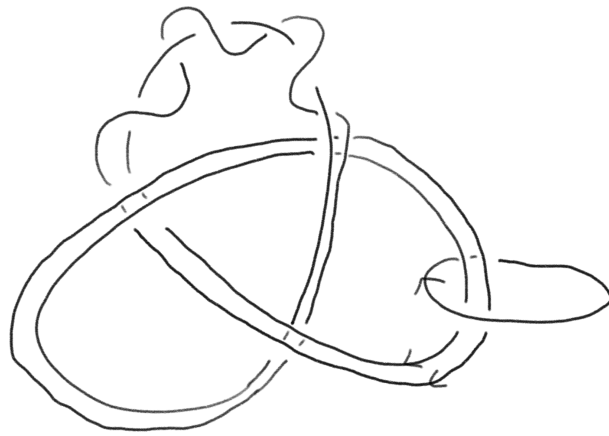


図 37: L_3

4. 2つの $T(3)$ を向きに注意して各 1 辺を合成した結び目 L_4 のコンウェイ多項式。

$$\nabla(L_4) = (1 + z^2)^2 \quad (5.4)$$

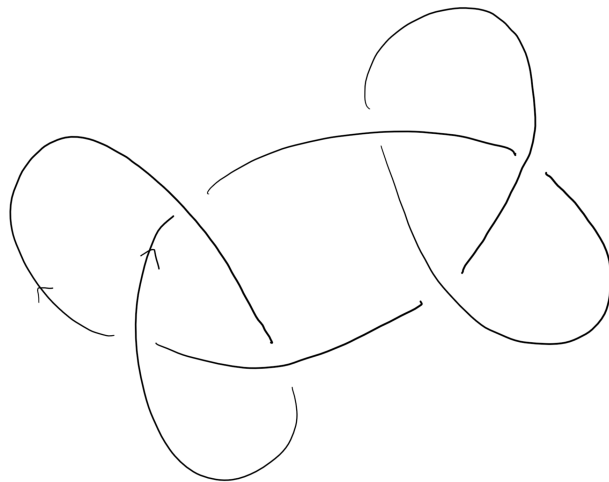


図 38: L_4

5. 2つの $T(3)$ を向きに注意して各 2 辺を合成した絡み目 L_5 のコンウェイ多項式。

$$\nabla(L_5) = 2z(1 + z^2) \quad (5.5)$$

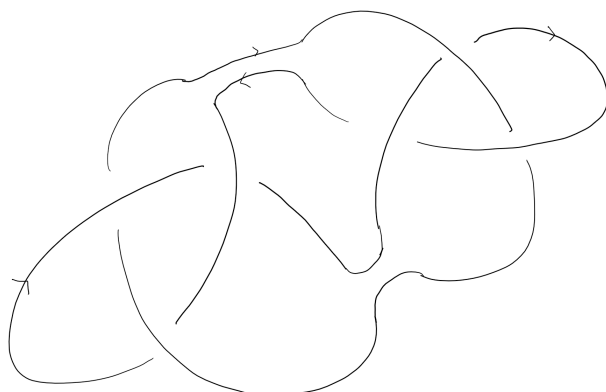


図 39: L_5

6. $T(2)$, $T(3)$ を向きに注意して各 2 辺を合成した絡み目 L_6 のコンウェイ多項式。

$$\nabla(L_6) = 1 + 2z^2 \tag{5.6}$$

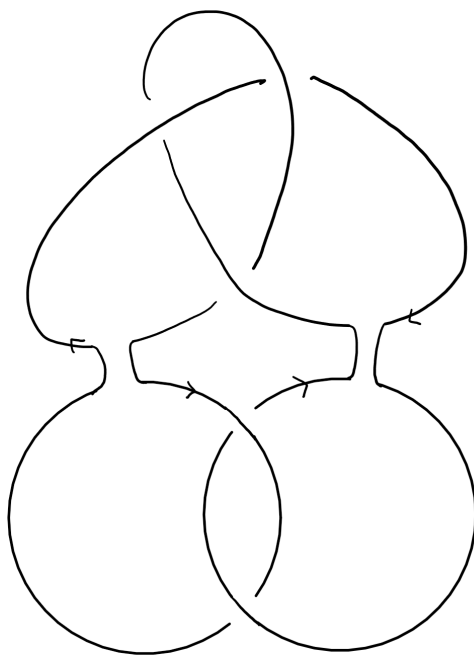


図 40: L_6

6 ジョーンズ多項式

絡み目不変量は多数ある。この章ではジョーンズ多項式について紹介する。

定理 6.1 (ジョーンズ多項式 [谷山, §6.3]). 絡み目の全同位による同値類集合を \mathcal{L} とし、 $t^{\frac{1}{2}}$ を不定元とするローラン多項式環を $\mathbb{Z}[t^{\pm\frac{1}{2}}]$ とする。次の 1, 2 の性質を満たす写像 $V : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{Z}[t^{\pm\frac{1}{2}}]$ を考える。

1. $V(0_1) = 1$ (0_1 は自明結び目)
2. $t^{-1}V(L_+) - tV(L_-) = (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})V(L_0)$ (ジョーンズ多項式のスケイン関係式)

このような写像 V がただ一つ存在する。このローラン多項式 $V(L) \in \mathbb{Z}[t^{\pm\frac{1}{2}}]$ を L のジョーンズ多項式という。

6.0.1 自明結び目を成分に持つ絡み目のジョーンズ多項式

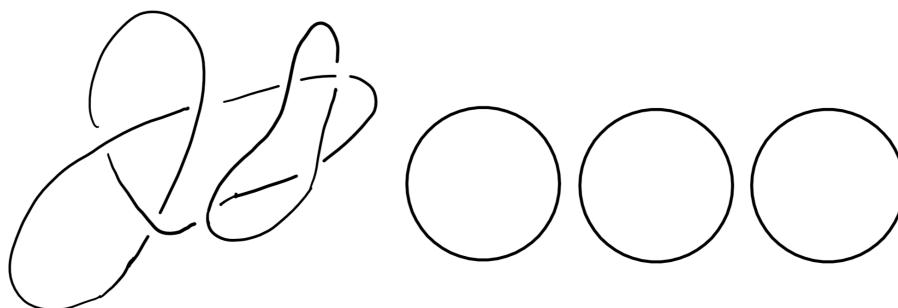


図 41: $L^{(3)} : L'$ と 3つの 0_1 の和

定理 6.2. 図 41 の様な任意の絡み目 L' と分離できる n 個の 0_1 から成る絡み目を $L^{(n)}$ とする。この $L^{(n)}$ のジョーンズ多項式は次を満たす。

$$V(L^{(n)}) = \left(\frac{t^{-1} - t}{t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}} \right)^n V(L') \quad (6.1)$$

(証明). 数学的帰納法で示す。

$n = 1$ のとき、図 18 同様の变形で L_0 を作り、 L_+, L_- を考えるとライデマイスター移動で移りあうことから $V(L_+) = V(L_-) = V(L')$ がわかる。ジョーンズ多項式のスケイン関係式に代入すると、

$$V(L^{(1)}) = \frac{t^{-1} - t}{t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}} V(L') \quad (6.2)$$

$n = N$ のとき、次が成立することを仮定する。

$$V(L^{(N)}) = \left(\frac{t^{-1} - t}{t^{\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}}} \right)^N V(L') \quad (6.3)$$

$n = N + 1$ のとき、 $L^{(N+1)}$ のある 2 つの 0_1 成分の間に定理 4.2 の様に $L^{(N+1)} = L_0$ としてジョーンズ多項式のスケイントリプルを考える。

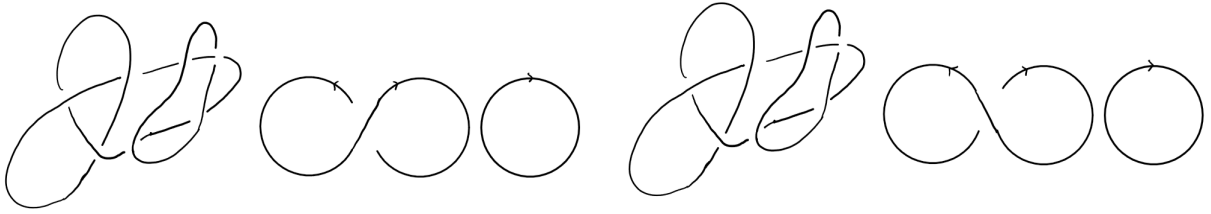


図 42: $L^{(3)} = L_0$ と考えたスケイントリプル L_+, L_-

この $L_+ \approx L_- \approx L^{(N)}$ であるから、スケイン関係式に代入すると次が得られる。

$$V(L^{(N+1)}) = \frac{t^{-1} - t}{t^{\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}}} V(L^{(N)}) \quad (6.4)$$

$$= \left(\frac{t^{-1} - t}{t^{\frac{1}{2}} - t^{\frac{1}{2}}} \right)^{N+1} V(L') \quad (6.5)$$

これより $n = N + 1$ で成り立つことがわかった。 \square

定理 6.3 (トーラス絡み目のジョーンズ多項式). トーラス絡み目 $T(m)$ のジョーンズ多項式は次の様に表せる。

$$V(T(m)) = (t^{\frac{3}{2}} - t^{\frac{1}{2}})V(T(m-1)) + t^2V(T(m-2)), \quad (m \in \mathbb{Z}_{\geq 3}) \quad (6.6)$$

(証明). 定理 3.2 のコンウェイ多項式のスケイン関係式をジョーンズ多項式のスケイン関係式に変えることで同様に証明できる。ここでは省略する。 \square

7 まとめ

7.1 今後の課題

- トーラス絡み目 $T(2, m)$ について研究したが、一般の $T(p, q)$ については時間が無かったので取り組めなかった。一般の $T(p, q)$ も漸化式と行列で表すことができるか考えたい。

- ジョーンズ多項式を始め、様々な多項式不変量で絡み目を計算し行列式で表すこと。また絡み目同士の関係から行列式を比較することができないか考えたい。
- 第4章で絡み目をいくつか並べた絡み目、絡めた絡み目の定理を紹介した。さらに絡み目の代数的な演算に興味がある。

7.2 卒研発表会での質問

- (松田先生) トーラス絡み目のコンウェイ多項式を求めていたが、(スライドに使った) オリンピックのマークはトーラス絡み目かどうかわかるか。
→ オリンピックのマークはトーラス絡み目ではないと思うが自身は無い。少なくとも $T(2, m)$ ではない。一般にコンウェイ多項式から絡み目を判別することはできない。
- (松田先生 発表後) トーラス絡み目の各成分の対称性の性質からトーラス絡み目かどうか判断することもできる、各成分の絡み数が等しくないからトーラス絡み目でないとも言えるのではないか。
→ そのような性質については勉強不足でした。
- (松田先生 発表後) (p, q) が一般のトーラス絡み目に関する式は難しかったか。
→ $p = q$ のときの性質や p, q による成分数の変化については [村上] で学んだが、一般の $T(p, q)$ のコンウェイ多項式については取り組めなかった。
- (中山先生) トーラス絡み目のコンウェイ多項式は3項間漸化式 (定理 3.2) を満たすと言ったが、他にもっと漸化式は無いか。
→ 他の漸化式で表すことは可能だが複雑になる。おそらく紹介した3項間漸化式が最も簡単な形である。
- (林先生) 発表内の定理は自分で見つけた新しいことか。
→ はい。(本論文では、引用した定理はが明確になるように配慮した。)
- (林先生 発表後) ジョーンズ多項式に関しても何か結果はあるか。
→ 卒業論文に掲載 (定理 6.2, 6.3)

。

8 参考文献

参考文献

[谷山] 谷山公規, 結び目理論 一般の位置から観るバシリエフ不変量, 共立出版, 2023.

[村上] 村上順, 結び目理論, 森北出版 2021.

[鈴木] 鈴木聖也, 連分数の基本関係式と循環連分数, 青山学院大学 物理数理学科 西山研究室, 2021.

[栢木] 栢木駿輔, 2部グラフの完全マッチングの分配関数とカステレイン行列式, 青山学院大学 物理数理学科 西山研究室, 2013.

[有馬] 有馬優, 合同式で考える結び目の不変量, 青山学院大学 物理数理学科 西山研究室, 2011.