

2023年度 卒業論文

種数が g の完全グラフと
完全2部グラフの実現について

青山学院大学 理工学部 物理数理学科
学籍番号:15120136 宮下誠一

西山研究室

2024年2月21日

概要

グラフ G とは、頂点の集合 V と辺の集合 E からなる抽象的対象である。本論文では、向き付けはなく、ループと多重辺のない単純なグラフを考える。その中でもすべての頂点同士が辺で結ばれている完全グラフと2種類の頂点を持ち異なる種類の頂点の組がすべて辺であり、同じ種類の頂点の組には辺がない完全2部グラフを中心に考察する。

グラフは抽象的な対象だが、それを平面上に辺を交差しない曲線として実現することを考える。すべてのグラフが実現できるわけではなく、その実現可能性はクラトウスキーの定理によって判定できることが知られている。

クラトウスキーの定理は、グラフ G が平面上に実現可能であることと、 G が5個の頂点からなる完全グラフ K_5 および、3個の頂点が2種類ある完全2部グラフ $K_{3,3}$ を含まないこと同値になることを述べたものである。

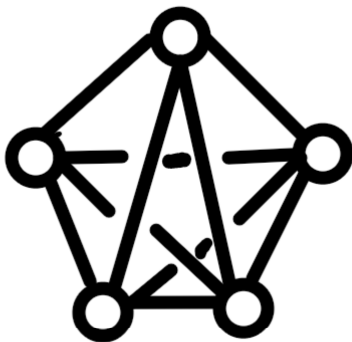


図 1: K_5

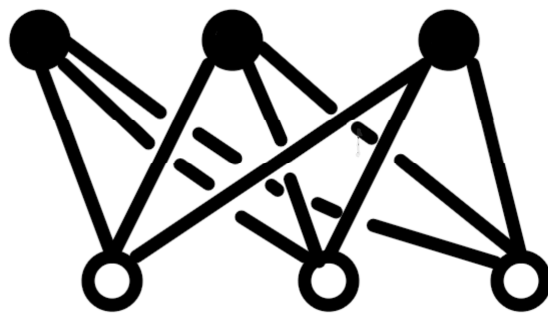


図 2: $K_{3,3}$

この論文では、平面だけではなく、グラフが曲面上にいつ実現できるかという問題を考えた。具体的には、種数 g の閉曲面上での完全グラフ、完全2部グラフの実現可能性について考察する。種数 g の閉曲面とは、次のようなトーラスを一般化して g 個の穴あき浮き輪にしたような曲面のことである。

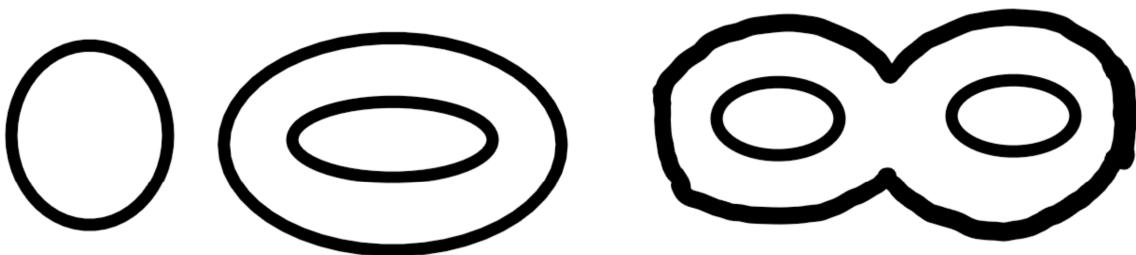


図 3: 種数が0,1,2の閉曲面

テキスト [1] にあるクラトウスキーの定理の証明を参考にし、このような閉曲面上で、種数 g を大きくすると、グラフの実現可能性は増えていく。そこで、それぞれのグラフがいつ実現可能になるのかを調べた。結果としては、トーラスの時は、頂点が 8 個以上の完全グラフ $K_n (n \geq 8)$ と、2 種類どちらも 5 個の完全 2 部グラフ $K_{n,n} (n \geq 5)$ が実現不可能であることが分かった。

また、テキスト [1] には、トーラスの時、頂点が 6 個の完全グラフが実現可能であるかという演習問題があり、それを発展させ、頂点が 7 の場合に実現が可能であるかどうか実際に絵を描くことで確かめ、実現可能な最大の頂点数のグラフ、つまり、頂点が 7 個の完全グラフ K_7 と、2 種類の頂点の個数が 4 個ずつの完全 2 部グラフ $K_{4,4}$ について、実現可能性を描画することで確認できた。

最後に、種数が 2 の閉曲面においては、 $K_n (n \geq 9)$ と、 $K_{n,n} (n \geq 5)$ が実現不可能であることが分かった。そして、 K_8 は実際に描画することで、実現可能性を確認することができた。また、種数 1 の場合も 2 の場合も、完全 2 部グラフ $K_{n,m} (m > n \geq 4)$ が実現不可能であるということも確かめた。

目次

1	序論	2
1.1	研究の背景	2
1.2	研究の主結果	2
1.3	本論分の構成	2
1.4	謝辞	3
2	平面 \mathbb{R}^2 上の完全グラフ K_n と完全 2 部グラフ $K_{n,n}$ の実現について	4
2.1	平面上での完全グラフと完全 2 部グラフ 実現可能性	4
2.2	平面上における K_4 と $K_{2,3}$ の実現	7
3	種数が g の閉曲面 T_g における完全グラフ K_n と完全 2 部グラフ $K_{n,n}$ の実現について	7
3.1	T_g 上の完全グラフ K_n と完全 2 部グラフ $K_{n,n}$ の実現可能性	7
3.2	T_g 上の $K_n, K_{n,n}$ の存在可能範囲と実現例	9
4	まとめ	12
4.1	今後の課題	12
4.2	将来への展望	12

1 序論

1.1 研究の背景

私は卒業研究のセミナーにおいて、参考文献 [1] をテキストにし、研究を進めた。テキストの第 2 章では、完全グラフ、完全 2 部グラフの平面における実現可能性をテーマにした箇所があった。テキストには問題として、平面でそれらのグラフが実現可能であるか、メビウスの帯上ではどうか、また、トーラス上では 6 個の頂点の完全グラフ K_6 が実現可能であるかということが演習問題として、書かれていた。

セミナーを進めることで、トーラス上には 7 個の頂点の完全グラフ K_7 が実現可能であることを発見し、これより種数の大きな曲面でのグラフの実現可能性に興味を持ったため、このテーマを題材に研究を進めることにした。

1.2 研究の主結果

平面 \mathbb{R}^2 においてはクラトウスキーの定理 (グラフ G が平面上に実現可能であることと、 G が頂点 5 個の完全グラフ K_5 と、頂点 3 個ずつの完全 2 部グラフ $K_{3,3}$ を含まないことが同値であるという定理) があり、この定理の証明を説明する。

次に、種数が g の閉曲面 T_g を考える。曲面 T_g 上には、 g の値によって実現できるグラフとできないものがある。グラフがいつ T_g 上に実現できるかどうかを考えて、以下の定理を示すことができた。

定理 1. G をグラフ、 T をトーラスとする。

1. G が T 上に実現可能ならば $G \not\supset K_8$ かつ $G \not\supset K_{4,5}$ である。
2. T 上に $K_7, K_{4,4}$ は実現可能である。

定理 2. G をグラフ、 T_2 を種数 2 の閉曲面とする。

1. G が T 上に実現可能ならば $G \not\supset K_9$ かつ $G \not\supset K_{4,5}$ である。
2. T 上に $K_8, K_{4,4}$ は実現可能である。

1.3 本論分の構成

第 2 章では、平面上の完全グラフと完全 2 部グラフの実現可能性に関する、クラトウスキーの定理の証明をテキスト [1] に基づいて述べる。その証明は、種数 g の閉曲面でのグラフの実現可能性の議論にも利用した。

第 3 章では、種数 g の閉曲面におけるグラフの実現可能性についての議論を行った。まずオイラーの公式、テキストのアイデアを用いて不等式を証明し、グラフの実現可能

な範囲を決定した。次に、閉曲面の展開図を用いて実現可能性を実際に絵を描いて確認した。

第4章では、研究発表会で質問していただいたことに関する考察と、セミナーで考察することのできなかつた問題をまとめている。また、本論文に携わっていただいた方への謝辞もここに記述する。

1.4 謝辞

卒業研究中間発表において、私はトーラス上の完全グラフの実現について発表しました。卒業研究発表会においてはトーラスにおける完全2部グラフの実現についての議論を追加して発表する予定であったが、松田先生に、トーラスの種数を増やした場合の展開図がどのようなになるかという質問と、展開図が実際に存在することを指摘していただきました。ここから、種数を増やした時グラフの実現可能性の証明を考察することができました。心より感謝申し上げます。また、クラトウスキーの定理の必要十分な証明について記述されている教科書も紹介していただきました。重ねて感謝します。そのほかにも、発表会において、様々質問、助言をくださった増田先生、関先生、小林先生、林先生、中山先生にも心より感謝申し上げます。

最後に、卒業研究のテキストの著者には、大変すばらしい本を書いていただき、研究のきっかけを与えてくださったことに、心より感謝申し上げます。

2 平面 \mathbb{R}^2 上の完全グラフ K_n と完全2部グラフ $K_{n,n}$ の実現について

グラフを $G = (V, E)$ と書く。ここで、 V は頂点の集合であり、 E は辺の集合である。 V の元(頂点)を v_i, v_j 、 E の元(辺)を頂点の組として、 $e_k = (v_i, v_j)$ と書く。以下頂点の個数を $v = \#V$ 、辺の個数を $e = \#E$ で表す。頂点 v_i の次数とは、 v_i を端点とする辺の本数である。これを記号で $\deg v_i$ と書く。本論文では G は、有向グラフではなく、ループも多重辺もない単純なグラフを考える。

2.1 平面上での完全グラフと完全2部グラフ 実現可能性

定義 3 (完全グラフ K_n). すべての頂点が互いに辺で結ばれているようなグラフを**完全グラフ**という。つまり、

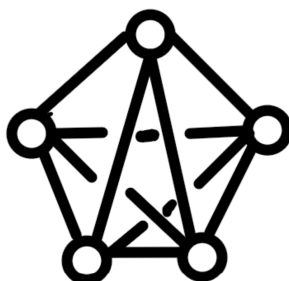
1. グラフに対して、 V を頂点集合、辺集合を E としたとき、 $\#V = n$ であって、
2. 任意の2頂点 $\forall v_i, v_j \in V$ に対して、ただ一つの辺 $\exists! e_k = (v_i, v_j) \in E$ が存在する。

補題 4. グラフが完全グラフ K_n ならば $\deg v_i = n - 1$ ($\forall v_i \in V$)

補題 5. グラフが完全グラフ K_n ならば $\#E = e = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$

グラフは抽象的なもので、3次元空間内では、頂点を点、辺を頂点同士を結ぶ曲線としていつでも実現できる。しかし、これを平面に射影すると、辺が交わることがある。そこで交点に上下の情報を加えて、その交点で切れ目を入れてわかりやすくしたものを射影図という。

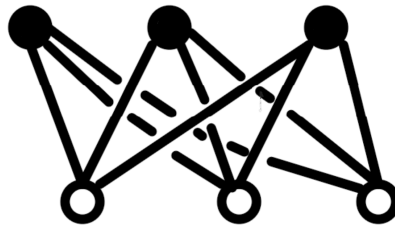
例 6. 完全グラフ K_5 の射影図の一つ



定義 7 (完全2部グラフ $K_{n,m}$). 頂点が2種類あり、異なる種類のすべての頂点の組が辺であるグラフを**完全2部グラフ**と呼び、 $K_{n,m}$ と表す。つまり、以下の2条件を満たすようなグラフが $K_{n,m}$ である。

1. 2種類の頂点集合 $V = V_1 \sqcup V_2$ があり, $\#V_1 = n$, $\#V_2 = m$ である。
2. 任意の異なる種類の2頂点 $\forall v_1 \in V_1, \forall v_2 \in V_2$ に対して, ただ一つの辺 $\exists! e = (v_1, v_2) \in E$ が存在する。

例 8. 完全2部グラフ $K_{3,3}$ の射影図の一つ



グラフが平面上に実現できるかどうかは次の有名な定理によって判定できる。

定理 9 (クラトウスキーの定理). グラフ G が平面上に実現できることと、 G が K_5 を含まず ($G \not\supset K_5$) かつ $K_{3,3}$ も含まない ($G \not\supset K_{3,3}$) ことは同値である。

以下では、後で必要となる十分性の証明を行う。この証明については、テキスト [1] の定理 2.9 の証明を参考にした。また、クラトウスキーの定理の完全な証明については、参考文献 [2] 定理 2.23 を参照してほしい。

グラフは平面上に実現すると、グラフの周りの無限に広がる面が現れるが、平面を球面からの射影だと思えば、無限面も球面の一部であると考えられ、グラフによって分割された面の一つとして数えられる。グラフによって区切られた面の集合を F とし、面の枚数を $f = \#F$ で表す。

このとき次の有名なオイラーの公式が成り立つ。([1] 定理 2.8)

$$\chi = v - e + f = 2.$$

この $\chi = 2$ を球面のオイラー標数と呼ぶ。これより、 f は e と v によって決まることに注意する。

(1) まず K_n が \mathbb{R}^2 上に実現可能であることと、 $1 \leq n \leq 4$ が同値であることを示す。

$$\chi = n - \frac{n(n-1)}{2} + f = 2, \quad (\text{平面上のオイラーの公式})$$

$$\therefore f = 2 - n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{4 - 3n + n^2}{2}$$

ここで、図 4 のように、辺の両側に \odot シールをつける。

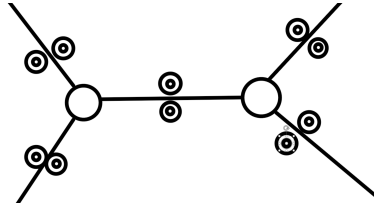


図 4: シール付け

辺の両側にシールがついているため

$$(\textcircled{\circ} \text{の総数}) = 2e = n(n-1) \quad \dots (\text{シールと辺数の比較}) \quad (1)$$

各面は3角形以上のため

$$(\textcircled{\circ} \text{の総数}) \geq 3 \times f = \frac{3(4-3n+n^2)}{2} \quad \dots (\text{シールと面数の比較}) \quad (2)$$

(1) を (2) に代入して整理すると、

$$\begin{aligned} 2n(n-1) &\geq 3(4-3n+n^2), \\ 0 &\geq 12-9n+2n+3n^2-2n^2 = n^2-7n+12 = (n-3)(n-4), \\ \therefore 3 &\leq n \leq 4 \end{aligned}$$

従って、 \mathbb{R}^2 上では、 K_5 は実現不可能である。(この証明において、無限面のみを構成する K_1, K_2 は除いて考えた。)

K_1 と K_2 が平面上に実現できることは、図 5、図 6 より明らかである。



図 5: K_1



図 6: K_2

(2) 次に、完全2部グラフ $K_{n,n}$ が \mathbb{R}^2 上実現可能であることと、 $n=1, 2$ は同値であることを示す。このときは、 $v=2n, e=n^2$ だから、

$$\chi = 2n - n^2 + f = 2 \iff f = n^2 - 2n + 2$$

となる。ここで、辺の両側に $\textcircled{\circ}$ をつけると、各面に $\textcircled{\circ}$ が面を囲む辺の数だけ現れるが、2部グラフにおいては、面を囲む辺の本数は4本以上になる。(辺の本数が3ならば、同じ種類の頂点を結ぶ辺が現れてしまう。)

$$(\textcircled{\circ} \text{の総数}) = 2e = 2n^2 \quad \dots (\text{シールと辺数の比較}) \quad (3)$$

$$(\textcircled{\circ} \text{の総数}) \geq 4 \times f = 4(n^2 - 2n + 2) \quad \dots (\text{シールと面数の比較}) \quad (4)$$

(3) を (4) に代入すると、

$$2n^2 \geq 4(n^2 - 2n + 2), \quad \therefore 0 \geq n^2 - 4n + 4 = (n - 2)^2.$$

これより、 $n = 2$ であることがわかる。従って、 $K_{3,3}$ は実現不可能である。(この証明において、 $K_{1,1}$ は除いて考えている。)

$K_{1,1}$ は、図7のように実現できる。

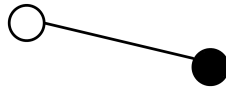


図 7: $K_{1,1}$

この議論においては完全2部グラフの2種類の頂点の数が同数の場合のみを考えた。従って、 $K_{2,3}$ が平面上に実現可能かという問題が残るが、次の節の図9のように実現可能であることが容易にわかる。

2.2 平面上における K_4 と $K_{2,3}$ の実現

平面上で実現可能なぎりぎりの頂点数を取ったときに実際に実現できるか図を描いて示す。実際に実現したグラフを図8と図9に示す。

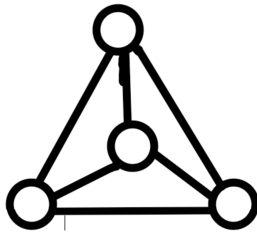


図 8: K_4

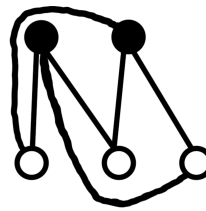


図 9: $K_{2,3}$

3 種数が g の閉曲面 T_g における完全グラフ K_n と完全2部グラフ $K_{n,n}$ の実現について

3.1 T_g 上の完全グラフ K_n と完全2部グラフ $K_{n,n}$ の実現可能性

一般の種数 g に対して、 K_n と $K_{n,n}$ の実現不可能の範囲を不等式を用いて調べる。考え方は平面の場合と基本的に同じである。 K_n と $K_{n,n}$ を T_g 上に実現したものを、 \widetilde{K}_n , $\widetilde{K}_{n,n}$

と書く。

(1) \widetilde{K}_n に対して、 $v = n$, $e = \frac{n(n-1)}{2}$ だから、オイラーの公式を用いると面の数 f は

$$\chi = n - \frac{n(n-1)}{2} + f = 2 - 2g \iff f = -n + \frac{n(n-1)}{2} + 2 - 2g$$

と求まる。これを使って平面の場合と同様にシール◎を貼って考えると

$$(\text{◎の総数}) = n(n-1) \quad \dots (\text{シールと辺数の比較}) \quad (5)$$

$$(\text{◎の総数}) \geq \frac{3(n^2 - 3n + 4 - 4g)}{2} \quad \dots (\text{シールと面数の比較}) \quad (6)$$

(5) を (6) に代入し、整理すると、

$$2n(n-1) \geq 3(n^2 - 3n + 4 - 4g),$$

$$0 \geq n^2 - 7n + 12 - 12g = (n - \frac{7 - \sqrt{1+48g}}{2})(n - \frac{7 + \sqrt{1+48g}}{2}),$$

$$\therefore \alpha = \frac{7 - \sqrt{1+48g}}{2} \leq n \leq \frac{7 + \sqrt{1+48g}}{2} = \beta$$

なので、 $g \geq 1$ ならば、 $\alpha \leq 0$ なので、 $n \geq 0$ より、 $0 \leq n \leq \beta$ を得る。

(2) $\widetilde{K}_{n,n}$ に対して、 $v = 2n$, $e = n^2$ であるから、オイラーの公式より

$$\chi = 2n - n^2 + f = 2 - 2g \iff f = n^2 - 2n + 2 - 2g$$

が成り立つ。上の議論と同様にして、

$$(\text{◎の総数}) = 2n^2 \quad \dots \text{シールと辺数の比較} \quad (7)$$

$$(\text{◎の総数}) \geq 4(n^2 - 2n + 2 - 2g) \quad \dots \text{シールと面数の比較} \quad (8)$$

(7) を (8) に代入すると、

$$2n^2 \geq 4(n^2 - 2n + 2 - 2g), \quad 0 \geq (n - 2 + 2\sqrt{g})(n - 2 - 2\sqrt{g})$$

$$\therefore \tilde{\alpha} = 2 - 2\sqrt{g} \leq n \leq 2 + 2\sqrt{g} = \gamma$$

やはり、 $g \geq 1$ ならば、 $\tilde{\alpha} \leq 0$ なので、 $n \geq 0$ より、 $0 \leq n \leq \gamma$ 得られた結果を表にまとめると以下のようなになる。完全グラフ K_n では、 $1 \leq n \leq \beta$ であり、完全2部グラフ $K_{n,n}$ では $1 \leq n \leq \gamma$ である。

g	$\sqrt{1+48g}$	β	γ
1	7	7	4
2	$\sqrt{97}$	$\frac{7+\sqrt{97}}{2} = 8. \dots$	$2 + 2\sqrt{2} = 4. \dots$
3	12	$\frac{7+12}{2} = 9. \dots$	$2 + 2\sqrt{3} = 5. \dots$
g	$\sqrt{1+48g}$	$\frac{7+\sqrt{1+48g}}{2}$	$2 + 2\sqrt{g}$

この表を用いて、結果を次の節で定理 10、定理 11 としてまとめる。

3.2 T_g 上の $K_n, K_{n,n}$ の存在可能範囲と実現例

定理 10. G をグラフ、 T をトーラスとする。

1. G が T 上に実現可能ならば、 G は部分グラフとして、 K_8 および $K_{5,5}$ を含まない。
つまり、 $G \not\supset K_{5,5}$ かつ $G \not\supset K_8$ である。
2. T 上に $K_7, K_{4,4}$ は実現可能 ($K_{4,5}$ は実現不可能) である。

証明 1 の証明は §3.1 で既に行った。

2 の証明は図示によって行う (実際に実現する)。この証明では、トーラスの展開図 (図 10) を用いる。

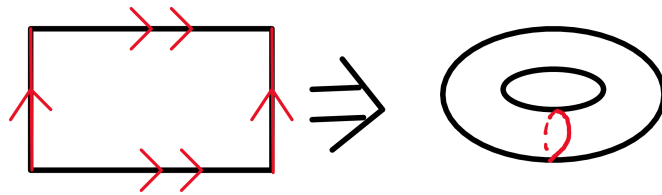


図 10: トーラスの展開図

この展開図の辺上にグラフの頂点を配置し、実現したグラフを図 11 と図 12 に示す。

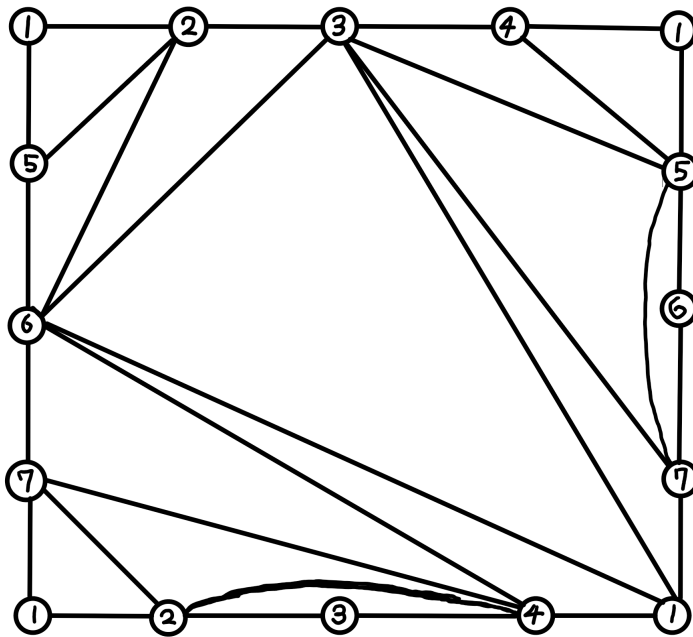


図 11: K_7

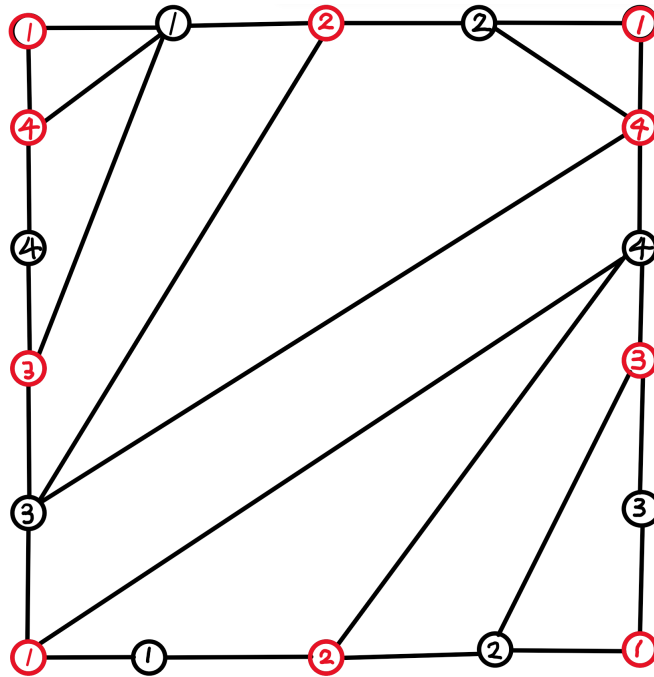


図 12: $K_{4,4}$

展開図の辺を貼り合わせて一致する頂点を同じ番号であらわしている。また、展開図の角に同じ頂点を表示しているが、角はすべて張り合うため、特別にすべて同じ番号を配置している。

定理 11. G をグラフ、 T_2 を種数 2 の閉曲面とする。

1. G が T_2 上に実現可能であるならば、 G は K_9 および、 $K_{5,5}$ を含まない。
つまり、 $G \not\supset K_9$ かつ $G \not\supset K_{5,5}$ が成り立つ。
2. T_2 上に $K_8, K_{4,4}$ は実現可能 ($K_{4,5}$ は実現不可能)

証明主張 1 は §3.1 で証明済みである。

主張 2 については実現できることを展開図を用いて示す。

この証明では、種数 2 の閉曲面の展開図 (図 13) を用いる。

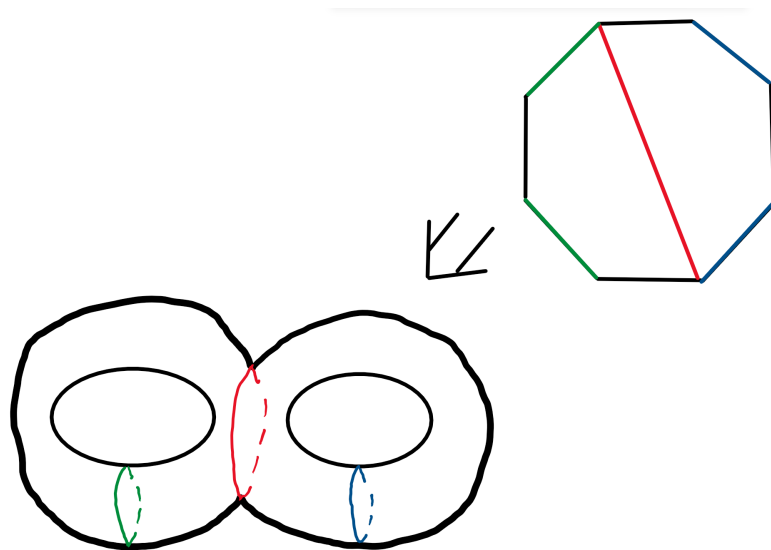


図 13: 種数 2 の閉曲面展開図

上と同様にこの展開図の辺上にグラフの頂点を配置し、実現したグラフを図 14 で示す。

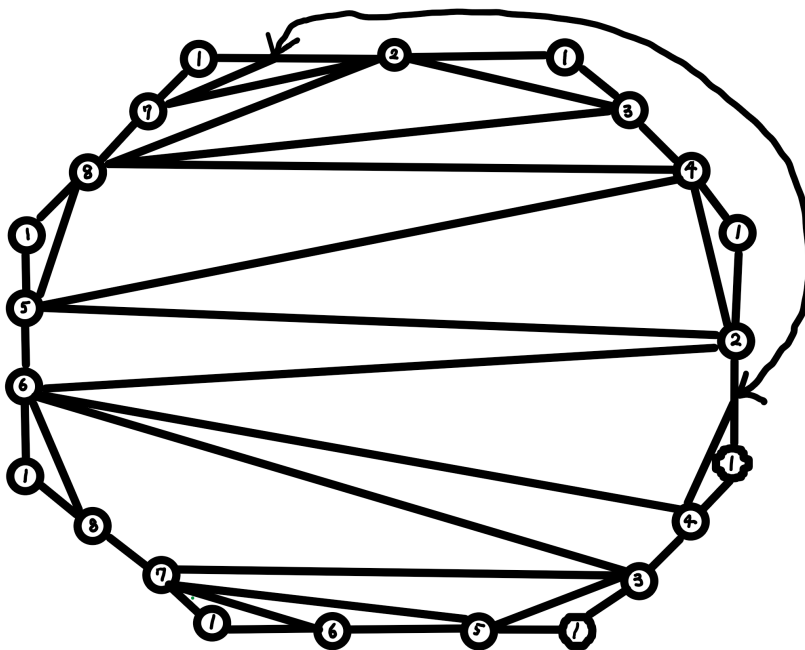


図 14: K_8

こちらも同様に、貼り合う頂点に同じ番号で表し、を配置している。また、展開図の辺と交差するようなグラフの辺が一本あり、それはグラフの外側を通して矢印で表現している。

4 まとめ

4.1 今後の課題

1. 本研究では、種数2の閉曲面 T_2 では、図14のように、図14のように展開図と交差する辺を持つような完全グラフの実現しか考えつかなかった。そこで、図11のように展開図の内部のみを用いて実現できるのかという問題
2. 計算を省略したが、 T_2 上では、グラフによって構成される面が1つだけ5角形になる完全グラフと、面が2つ4角形になるグラフが実現できる可能性があるが、本論文とは別の実現の仕方(面が1つ5角形になる実現の仕方)を考える時間がなかったため、このようなグラフは実現できるのかという問題
3. また、卒研発表会の時には g が増えるとグラフの取れる頂点の数がどのように増えていくかという質問を松田先生に質問していただいたが、geogebraで頂点数 n の存在範囲を示すグラフを描いてみた。

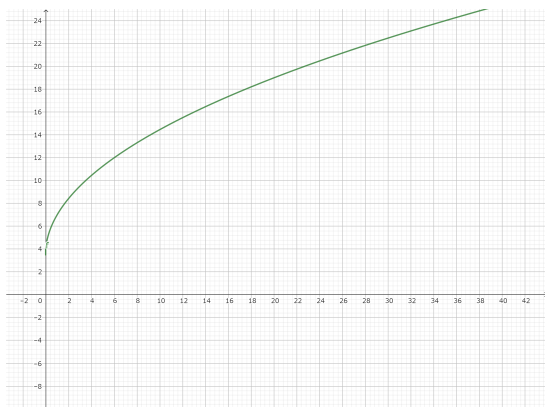


図 15: 完全グラフの増加
(β のプロット)

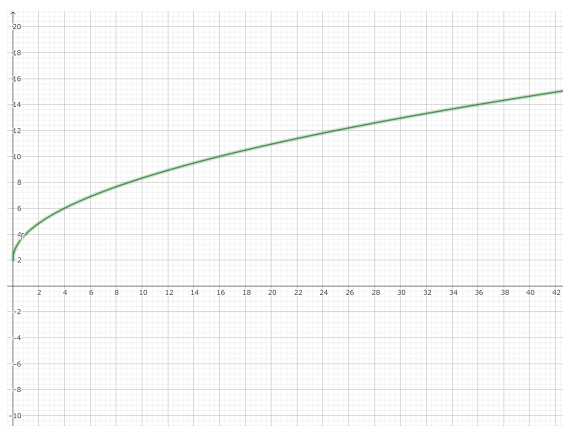


図 16: 完全2部グラフの増加 (γ のプロット)

4. 自分で図示して実現することのできなかつた種数3以上の閉曲面での完全グラフと完全2部グラフの実現についてさらに研究すること。

以上が今後の課題として考えられる。

4.2 将来への展望

本研究では集合論を始め、数学の基本的な用語の定義などの知識不足を指導教員の西山先生の下で学びながら研究を進めた。研究によって得た知識の多くをこの論文の中で表し、今後の西山研究室の参考に少しでもなればと思う。

最後に、一年間研究と受験の指導を熱心にしてくださった西山先生に心より深く感謝申し上げます。また、グラフ作成のアイデアをくれた西山研のメンバーの轟さんにも深く感謝申し上げます。卒研発表会において、質問をくださった松田能文先生をはじめ、多くの先生方、その質問に対して助言をくださった関真一郎先生、小林祐一郎先生にも深く感謝申し上げます。

参考文献

- [1] 前原潤、桑田孝泰著 『数学のかんどころ 絵ときトポロジー 曲面のかたち』
共立出版 (2013).
- [2] 中本敦浩、小関健太著 『曲面上のグラフ理論』 サイエンス社 (2021).