n 次元球面 S^n 上の
多項式係数ベクトル場のなす Lie 環

学籍番号:15119028 大脇貴意
西山研究室

2023 年 2 月 17 日

概 要

M を多様体，$\mathcal{A}$ を M のある座標近傍系とする．M の各点で座標系 $\mathcal{A}$ に関して多項式係数で表される M 上の C^∞ 級ベクトル場を M 上の**多項式係数ベクトル場**と呼び、その全体のなすベクトル空間を $\mathcal{PD}(M, \mathcal{A})$ と表す．$\mathcal{PD}(M, \mathcal{A})$ は Lie 括弧積について自然に Lie 環をなす.

n 次元単位球面 S^n について，$\mathcal{A}$ を立体射影を用いた座標近傍系として $\mathcal{PD}(S^n, \mathcal{A}_n)$ を考える．次の 2 つの定理がこの論文の主結果である.

定理 0.1. $\mathcal{PD}(S^n, \mathcal{A})$ は $\binom{n}{2} + 2n + 1$ 次元の実ベクトル空間である．基底となるベクトル場も具体的に書き表すことができる.

$\mathcal{PD}(S^n, \mathcal{A})$ の Lie 環としての構造を調べると，それは Lie 群 G の S^n への作用の微分として得られることも分かった.

定理 0.2. 符号 $(n+1, 1)$ の不定値特殊直交群の単位元の連結成分 $G = SO_0(n+1, 1)$ は一次分数変換で S^n に作用する．$\mathcal{PD}(S^n, \mathcal{A})$ は $G = SO_0(n+1, 1)$ の Lie 環と同型である.

G の固定部分群を計算して，S^n を G の等質空間として表す.

目 次

1　序論

1.1　研究の背景

[坪井 III] では C^∞ ベクトル場と微分 1 形式の違いを説明する例として，2 次元球面 S^2 上の C^∞ 級ベクトル場と微分 1 形式を立体射影による局所座標系で表したとき，係数関数が多項式であるものについて述べられている．結論として，S^2 上の多項式係数ベクトル場は有限次元 (6 次元) であり，微分 1 形式は 0 しかないことが示されている．（問題 2.2.6 , $p.$ 47）この例を参考に n 次元球面 S^n に対して立体射影による局所座標系に関して係数関数が多項式である C^∞ 級ベクトル場を調べることにした．その結果，S^n 上の多項式係数ベクトル場の空間は有限次元であることが分かり，次元やその基底を具体的に与えることに成功した．また，基底の間の Lie 括弧積を具体的に計算して，その Lie 環としての構造について考えた．

1.2　研究の主結果

M を多様体，$\mathcal{A}$ を M のある局所座標系とする．M の各点で座標系 $\mathcal{A}$ に関して多項式係数で表される M 上の C^∞ 級ベクトル場を M 上の $\mathcal{A}$ に関する多項式係数ベクトル場と呼び、その全体のなすベクトル空間を $\mathcal{PD}(M,\mathcal{A})$ と表す．このとき $\mathcal{PD}(M,\mathcal{A})$ は Lie 括弧積について自然に Lie 環をなす．

本論文では n 次元単位球面 S^n について， $\mathcal{A}$ を立体射影を用いた局所座標系として $\mathcal{PD}(S^n) = \mathcal{PD}(S^n,\mathcal{A})$ を考えた．次の 2 つがこの論文の主結果である．

(1) (定理**??**) $\mathcal{PD}(S^n)$ は $\binom{n}{2} + 2n + 1$ 次元の実ベクトル空間となる．そ

の基底は V_N 上で $r_v = \|v\|$ とおくと次のものがとれる．

$$\begin{aligned}
D_i^{(2)} &= \sum_{k=1}^{n} (\delta_{ik} r_v^2 - 2 v_i v_k) \frac{\partial}{\partial v_k} && (i = 1, 2, \ldots, n) \\
D_{i,j}^{(1)} &= v_j \frac{\partial}{\partial v_i} - v_i \frac{\partial}{\partial v_j} && (1 \le i < j \le n) \\
D_0^{(1)} &= \sum_{k=1}^{n} v_k \frac{\partial}{\partial v_k} \\
D_i^{(0)} &= \frac{\partial}{\partial v_i} && (i = 1, 2, \ldots, n)
\end{aligned} \tag{1.1}$$

(2) (??) 符号 $(n+1,1)$ の不定値特殊直交群の単位元の連結成分を

$$G = SO_0(n+1,1)$$

と書くと，Lie 群 G は一次分数変換で S^n に推移的に作用する．この作用を微分することにより，$\mathcal{PD}(S^n)$ は G の Lie 環 $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(n+1,1)$ と Lie 環として同型になる．

1.3 本論文の構成

本論文では多様体や Lie 群・Lie 環の一般論の説明を大幅に省略した．多様体については [坪井 I] や [松本]，Lie 群・Lie 環については [示野] や [田丸] を参照して欲しい．

§2 では C^∞ 級ベクトル場の座標変換の説明と，多項式係数ベクトル場の定義をする．§3 では n 次元球面 S^n の局所座標系を立体射影で与え，n 次元球面 S^n 上の多項式係数ベクトル場 $\mathcal{PD}(S^n)$ を決定する．§4 で符号 $(n+1,1)$ の不定値特殊直交群の単位元の連結成分 $G = SO_0(n+1,1)$ の Lie 環 $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(n+1,1)$ の定義とその Lie 環としての構造を説明し，§5 で G から S^n への一次分数変換による推移的な作用を微分することで，$\mathcal{PD}(S^n)$ と $\mathfrak{g}$ が Lie 環として同型である事を示す．§6 では§5 で使った一次分数変換による S^n への作用に関して，Lie 群・Lie 環の一般論から分かる事実を述べる．

2　多項式係数ベクトル場の定義

多様体上の C^∞ 級ベクトル場の一般論については [坪井 I] や [松本] を参照して欲しい．これらの内容は以下，自由に使うことにする．

2.1　多様体上の C^∞ ベクトル場

M を n 次元 C^∞ 級多様体，$\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i\in\Lambda}$ を M の局所座標系とする．つまり $U_i \subset M$ は開集合で

$$\varphi_i \colon U_i \to V_i \subset \mathbf{R}^n$$

が局所座標を与えている．ここで，$V_i \subset \mathbf{R}^n$ は $\mathbf{R}^n$ の開集合であり，その座標を $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n) = (v_i)$ と書くことにする．$M \subset \mathbf{R}^\ell$ が ℓ 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^\ell$ に埋め込まれている C^∞ 級多様体であるとき，M の x での接空間は，$x \in U_i$ とすると

$$T_xM := d(\varphi_i^{-1})_{\varphi_i(x)}(\mathbf{R}^n) \subset \mathbf{R}^\ell$$

の様に $\mathbf{R}^\ell$ の n 次元部分空間と見なせる．本論文では $M \subset \mathbf{R}^\ell$ として $\mathbf{R}^\ell$ の部分空間と T_xM を同一視して考える．このとき接束は次の様に定義できる．

定義 2.1 (接束)**.** M の接束は次の様に与えられる．

$$TM := \left\{(x, w) \in M \times \mathbf{R}^\ell \mid x \in M, w \in T_xM\right\}$$

接束から多様体への自然な射影を p とする．

$$p\colon TM \to M, \quad (x, w) \mapsto x \quad (\text{射影})$$

定義 2.2 (多様体上の C^∞ 級ベクトル場)**.** $X\colon M \to TM : C^\infty$級写像 が M 上の C^∞ 級ベクトル場であるとは

$$p \circ X = id_M$$

が成り立つときに言う．ここで id_M は恒等写像である．つまり X は TM の C^∞ 級切断である．

M 上の C^∞ 級ベクトル場のなす実ベクトル空間を $\mathscr{X}^\infty(M)$ と書く．$\mathscr{X}^\infty(M)$ には自然に $f \in C^\infty(M)$ との積が考えられるので，$\mathscr{X}^\infty(M)$ は $C^\infty(M)$ 加群である．

例 2.2.1 (ユークリッド空間上の C^∞ 級ベクトル場). $V \subset \mathbf{R}^n$ 開集合，V の座標を $v = (v_1, v_2, \dots v_n)$ と書くと，

$$\mathscr{X}^\infty(V) = \left\{ \sum_{i=1}^n f_i(v) \frac{\partial}{\partial v_i} \;\middle|\; \begin{array}{c} f_i(v) \in C^\infty(V) \\ (1 \le i \le n) \end{array} \right\} \tag{2.1}$$

定義 2.3 (ベクトル場の押し出し). M, N を C^∞ 級多様体，その間の微分同相写像 $\pi\colon M \overset{\simeq}{\to} N$ があるとする．このとき $\mathscr{X}^\infty(M)$ から $\mathscr{X}^\infty(N)$ への π による**押し出し**が定まる．

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{\pi_*} & TN \\ {\scriptstyle X}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \pi_* X} \\ M & \xrightarrow{\pi} & N \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} T_xM & \xrightarrow{\pi_* = d\pi} & T_{\pi(x)}N \\ \Psi & & \Psi \\ X(x) & \longmapsto & (D\pi)_x X(x) \end{array} \qquad (x \in M)$$

M 上の C^∞ 級ベクトル場が座標変換によってどの様に表されるのかを調べる．先ず，ユークリッド空間のときに述べよう．

$$\begin{aligned} &U, V \subset \mathbf{R}^n \colon \text{開集合}\ ,\ \pi\colon U \overset{\simeq}{\longrightarrow} V \quad \text{座標変換} \\ &u = (u_1, u_2, \dots u_n) \in U, v = (v_1, v_2, \dots v_n) \in V, \\ &\pi(u) = v \end{aligned} \tag{2.2}$$

とする．U の座標 $u = (u_1, u_2, \dots u_n)$ で表された U 上の C^∞ 級ベクトル場

$$\xi(u) = \sum_{j=1}^n f_j(u) \frac{\partial}{\partial u_j} \in \mathscr{X}^\infty(U)$$

を考える．このとき，自然に

$$\frac{\partial}{\partial u_j} \leftrightarrow e_j \in \mathbf{R}^n \quad (\text{第 } j \text{ 基本ベクトル})$$

という同一視を行うと

$$\xi(u) = \sum_{j=1}^n f_j(u) e_j$$

である．座標変換 π の全微分

$$(D\pi)_u = \left(\frac{\partial v_i}{\partial u_j} \right) \quad (1 \le i, j \le n)$$

を用いて，この記法による $\pi\colon U \to V$ の微分は

$$(d\pi)_u \left(\frac{\partial}{\partial u_j}\right) \leftrightarrow (D\pi)_u e_j = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial v_i}{\partial u_j}\right) e_i \leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial v_i}{\partial u_j}\right) \frac{\partial}{\partial v_i}$$

と表され，$\pi_*\xi$ は V の座標を用いて

$$\pi_*\xi(v) = \sum_{j=1}^{n} f_j(\pi^{-1}(v)) \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_i}{\partial u_j} \frac{\partial}{\partial v_i} \in \mathscr{X}^\infty(V) \tag{2.3}$$

と表される．従って各点 u でベクトル場の係数は

$$\begin{pmatrix} f_1(u) \\ f_2(u) \\ \vdots \\ f_n(u) \end{pmatrix} \xmapsto{d\pi} (D\pi)_u \begin{pmatrix} f_1(u) \\ f_2(u) \\ \vdots \\ f_n(u) \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

と変換されることが分かる．

次に多様体 M 上の局所座標の間の変数変換について考えよう．$\varphi_i\colon U_i \to V_i$ を局所座標として $V_{i,j} = \varphi_i(U_i \cap U_j)$ とし，$V_{i,j}$ から $V_{j,i}$ への座標変換を $\varphi_{i,j}\colon V_{i,j} \to V_{j,i}$ と書く．

補題 2.4 (多様体上の C^∞ 級ベクトル場の座標変換)**.** 上の設定の下に，

$$\xi \in \mathscr{X}^\infty(M), \quad (\varphi_i)_*\xi\,|_{U_i} = \xi^{(i)} \in \mathscr{X}^\infty(V_i)$$

とおくと，$\mathscr{X}^\infty(V_{j,i})$ において

$$U_i \cap U_j \neq \varnothing \Longrightarrow (\varphi_{i,j})_*(\xi^{(i)}\,|_{V_{i,j}}) = (\xi^{(j)}\,|_{V_{j,i}})$$

を満たす．

2.2 多様体上の多項式係数ベクトル場の定義

定義 2.5 (ユークリッド空間上の多項式係数ベクトル場)**.** n 次元ユークリッド空間上の多項式係数ベクトル場の全体を

$$\mathcal{PD}(\mathbf{R}^n) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} p_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \;\middle|\; p_i(x) \in \mathbf{R}[x_1, x_2, \ldots, x_n] \right\}$$

で表す．$\mathcal{PD}(\mathbf{R}^n)$ は無限次元ベクトル空間である．$V \subset \mathbf{R}^n$ (開集合) に対しても $\mathcal{PD}(V)$ を同様に定義する．

定義 2.6 (多様体上の多項式係数ベクトル場). M を C^∞ 級多様体，$\mathcal{A}=\{(U_i,\varphi_i)\}_{i\in\Lambda}$ を M のある座標近傍系，$V_i=\varphi_i(U_i)$ とする．このとき，$\xi\in\mathscr{X}^\infty(M)$ が M 上の $\mathcal{A}$ に関する多項式係数ベクトル場であるとは

$$(\varphi_i)_*(\xi\mid_{U_i})\in\mathcal{PD}(V_i)\quad(\forall i\in\Lambda)$$

が成り立つことである。M 上の $\mathcal{A}$ に関する多項式係数ベクトル場のなすベクトル空間を $\mathcal{PD}(M,\mathcal{A})$ と書く.

3 n 次元球面 S^n 上の多項式係数ベクトル場

これ以降，n 次元単位球面

$$S^n=\{x=(x_1,x_2,\dots,x_{n+1})\in\mathbf{R}^{n+1}\mid\|x\|=1\}$$

上で考える．また，多項式係数ベクトル場は常に立体射影を用いた局所座標系で考える．先ず，立体射影について説明する．

3.1 立体射影と座標変換

定義 3.1 (n 次元単位球面 S^n の立体射影). $N:=(0,0,\dots,1)\in S^n$ を北極点として，開集合 $U_N:=S^n\backslash\{N\}$ をとる．$x\in U_N$ に対して x と N を通る直線と $\{x\in\mathbf{R}^{n+1}\mid x_{n+1}=0\}$ との交点を $(v,0)=(v_1,v_2,\dots v_n,0)$ として，N からの立体射影 π_N を

$$\begin{array}{cccc}\pi_N\colon & U_N & \longrightarrow & V_N=\mathbf{R}^n\\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$}\\ & x & \longmapsto & v\end{array}$$

で定める．同様に $S:=(0,0,\dots,-1)\in S^n$ を南極点として，開集合 $U_S:=S^n\backslash\{S\}$ における S からの立体射影 π_S を

$$\begin{array}{cccc}\pi_S\colon & U_S & \longrightarrow & V_S=\mathbf{R}^n\\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$}\\ & x & \longmapsto & u\end{array}$$

で定める．これらは微分同相写像であり，U_N と U_S は S^n を被覆するので，S^n の局所座標系を

$$\mathcal{A}=\{(U_N,\pi_N),(U_S,\pi_S)\}$$

ととれる．以降，この論文では S^n の局所座標系は常に $\mathcal{A}$ で考え，$(S^n, \mathcal{A})$ 上の多項式係数ベクトル場の空間 $\mathcal{PD}(S^n, \mathcal{A})$ を単に $\mathcal{PD}(S^n)$ と書く．

立体射影を $x \in S^n$ に対して座標を用いて具体的に計算すると，

$$\pi_N(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = \left(\frac{x_1}{1-x_{n+1}}, \frac{x_2}{1-x_{n+1}}, \ldots, \frac{x_n}{1-x_{n+1}}\right)$$
$$\pi_S(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = \left(\frac{x_1}{1+x_{n+1}}, \frac{x_2}{1+x_{n+1}}, \ldots, \frac{x_n}{1+x_{n+1}}\right)$$

であり，V_N から V_S への座標変換 $\varphi \colon V_N \to V_S$ は

$$u = \varphi(v) = \frac{1}{\|v\|^2} v \qquad (v \neq 0)$$

となる．このとき φ の全微分は

$$\Big(D\varphi\Big)_v = \frac{1}{\|v\|^4}\Big(\delta_{i,j}\|v\|^2 - 2v_i v_j\Big)_{1 \le i,j \le n} = \Big(\delta_{i,j} r^2 - 2u_i u_j\Big)_{1 \le i,j \le n} \qquad (*)$$

と計算できる．但し $r = \|u\|$ である．

3.2 n 次元球面 S^n 上の多項式係数ベクトル場の決定

S^n 上の多項式ベクトル場のなすベクトル空間 $\mathcal{PD}(S^n)$ を求める．$n = 2$ の場合は [坪井 III, 問題 2.2.6 , p. 47] で与えられており，これを一般の n について求めることが目的である．S^n 上の C^∞ 級ベクトル場が $\mathcal{PD}(S^n)$ の元であるとは二つの座標 V_N, V_S 両方の上で多項式係数となることだが，V_N 上で多項式係数で表されるベクトル場は，一般には S^n 上の C^∞ 級ベクトル場として拡張されない．

補題 3.2. V_N 上の多項式係数ベクトル場 $\eta \in \mathcal{PD}(V_N)$ に対して次の (1), (2) は同値である．

(1) $\quad {}^\exists \xi \in \mathcal{PD}(S^n)$ s.t. $(\pi_N)_*(\xi|_{U_N}) = \eta$

(2) $\quad {}^\exists \xi \in \mathscr{X}^\infty(S^n)$ s.t. $(\pi_N)_*(\xi|_{U_N}) = \eta$

補題 *3.2* の証明．$\eta \in \mathcal{PD}(V_N)$ を

$$\eta = \sum_{j=1}^{n} P_j(v) \frac{\partial}{\partial v_j} \quad \big(P_j(v) \in \mathbf{R}[v]\big)$$

として η を座標変換 $\varphi\colon V_N \to V_S$ によって $V_S\backslash\{0\}$ 上で表す．$\|u\| = r$ と書くと，式 (2.3) と同様にして

$$\varphi_*\eta = \sum_{j=1}^{n} P_j\left(\frac{u}{r^2}\right)\sum_{i=1}^{n}\left.\frac{\partial u_i}{\partial v_j}\right|_{\varphi^{-1}(u)}\frac{\partial}{\partial u_i} = \sum_{i=1}^{n} f_i(u)\frac{\partial}{\partial u_i}$$

ただし

$$f_i(u) = \sum_{j=1}^{n} P_j\left(\frac{u}{r^2}\right)\left.\frac{\partial u_i}{\partial v_j}\right|_{\varphi^{-1}(u)}$$

である．式 (∗) より

$$\Big(D\varphi\Big)_v = \frac{1}{\|v\|^4}\Big(\delta_{i,j}r^2 - 2v_iv_j\Big)_{1\le i,j\le n} \overset{\bigstar}{=} \Big(\delta_{i,j}r^2 - 2u_iu_j\Big)_{1\le i,j\le n}$$

に注意すると，$f_i(u)$ は分母が r の冪乗となる有理式で表される．最後の等号★では

$$v = \frac{1}{\|u\|^2}u = \frac{1}{r^2}u$$

である事を用いた．

補題 3.3. $P(u) \in \mathbf{R}[u]$ を多項式，$\ell \in \mathbf{Z}$，$r^2 = \|u\|^2$ と P は互いに素とする．

$$R(u) = \frac{P(u)}{\|u\|^{2\ell}}$$

が C^∞級 である事と，$\ell \le 0$ つまり $R(u)$ が多項式である事は同値である．

補題 *3.3* の証明. R が多項式ならば C^∞ 級であることは明らか．$\ell > 0$ を仮定して C^∞ 級でない事を示す．$Q(u) = \|u\|^{2\ell} = r^{2\ell}$ とおいて

$$R(u) = \frac{P(u)}{Q(u)}$$

とする．$P(0) \ne 0$ ならば $R(u)$ は $r \to 0$ で明らかに発散するので C^∞ 級でない．そこで $P(0) = 0$ とする．ここで，

$$\deg(R(u)) := \begin{cases} (\text{分子の次数}) - (\text{分母の次数}) & (R(u) \ne 0) \\ -\infty & (R(u) = 0) \end{cases}$$

を有理式の次数と定めると $\deg(R(u))<0$ ならば $r\to 0$ で発散する．$k=\deg(R(u))\geq 0$ とする．仮定より R は多項式でないので k 階偏微分が 0 でない変数 u_i が存在する．その u_i に対して $R(u)$ を u_i で偏微分すると

$$\frac{\partial}{\partial u_i}R=\frac{P_{u_i}Q-Q_{u_i}P}{Q^2}$$

であり，再び分母が r の冪乗となって

$$\deg\left(\frac{\partial}{\partial u_i}R\right)=k-1$$

となる．これを繰り返すと，$k+1$ 階偏微分の次数は

$$\deg\left(\frac{\partial^{k+1}}{\partial u_i^{k+1}}R\right)=k-(k+1)=-1$$

である．このとき $r\to 0$ で発散する．よって R が C^∞ 級であることと多項式であることは同値である．□

補題 3.3 を用いると，$\varphi_*\eta$ が V_S 全体に C^∞ 級ベクトル場として拡張されるのは $\varphi_*\eta$ が $V_S\backslash\{0\}$ で多項式係数となる場合のみである．□

具体的に計算を行った結果，以下のことが分かった．

定理 3.4. $\mathcal{PD}(S^n)$ は $\binom{n}{2}+2n+1$ 次元の実ベクトル空間となる．その基底は V_N 上で $r_v=\|v\|$ とおくと次のものがとれる．

$$\begin{aligned}
D_i^{(2)}&=\sum_{k=1}^n(\delta_{ik}r_v^2-2v_iv_k)\frac{\partial}{\partial v_k} && (i=1,2,\dots,n)\\
D_{i,j}^{(1)}&=v_j\frac{\partial}{\partial v_i}-v_i\frac{\partial}{\partial v_j} && (1\leq i<j\leq n)\\
D_0^{(1)}&=\sum_{k=1}^n v_k\frac{\partial}{\partial v_k}\\
D_i^{(0)}&=\frac{\partial}{\partial v_i} && (i=1,2,\dots,n)
\end{aligned}\tag{3.1}$$

定理 *3.4* の証明．補題 3.2 と同様に $\eta\in\mathcal{PD}(V_N)$ を

$$\eta=\sum_{j=1}^n P_j(v)\frac{\partial}{\partial v_j}\quad\big(P_j(v)\in\mathbf{R}[v]\big)$$

とおく．$r = \|u\|$ とする．

$$\varphi_* \eta = \sum_{i=1}^{n} Q_i(u) \frac{\partial}{\partial u_i}$$

としたとき，

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} Q_1(u) \\ Q_2(u) \\ \vdots \\ Q_n(u) \end{pmatrix} &= \Big(D\varphi\Big)_{\varphi^{-1}(u)} \begin{pmatrix} P_1 \circ \varphi(u) \\ P_2 \circ \varphi(u) \\ \vdots \\ P_n \circ \varphi(u) \end{pmatrix} \\
&= \left(\sum_{i=j}^{n} (\delta_{i,j} r^2 - 2u_i u_j) P_j\Big(\frac{u}{r^2}\Big) \right)_{1 \le i \le n}
\end{aligned}$$

であった．P_j の各斉次部分のみを考えることにする．P_j の k 次の項を $p_{j,k}$ とおいて，ベクトル場の斉次部分

$$\eta_k = \sum_{j=1}^{n} p_{j,k}(v) \frac{\partial}{\partial v_j} \quad (0 \le k \le d)$$

を考える．

$$\varphi_* \eta_k = \sum_{i=1}^{n} q_{i,k}(u) \frac{\partial}{\partial u_i}$$

とおくと

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} q_{1,k}(u) \\ q_{2,k}(u) \\ \vdots \\ q_{n,k}(u) \end{pmatrix} &= \Big(D\varphi\Big)_{\varphi^{-1}(u)} \begin{pmatrix} p_{1,k} \circ \varphi(u) \\ p_{2,k} \circ \varphi(u) \\ \vdots \\ p_{n,k} \circ \varphi(u) \end{pmatrix} \\
&= \left(\sum_{i=j}^{n} (\delta_{i,j} r^2 - 2u_i u_j) p_{j,k}\Big(\frac{u}{r^2}\Big) \right)_{1 \le i \le n} \\
&\overset{\star}{=} \frac{1}{r^{2k}} \left(\sum_{i=j}^{n} (\delta_{i,j} r^2 - 2u_i u_j) p_{j,k}(u) \right)_{1 \le i \le n}
\end{aligned}$$

と書ける．最後の等号☆では

$$p_{j,k}\Big(\frac{u}{r^2}\Big) = \frac{p_{j,k}(u)}{r^{2k}} \tag{3.2}$$

である事を用いた．

$$F_k(u) = \Big(F_{i,k}\Big)_{1\le i\le n} = \left(\sum_{i=1}^{n}(\delta_{i,j}r^2 - 2u_iu_j)p_{j,k}(u)\right)_{1\le i\le n}$$

とおくと，

$$\deg(F_{i,k}) = k+2$$

なので，$q_{i,k}$ の次数は

$$\deg(q_{i,k}) = \deg\left(\frac{F_{i,k}}{r^{2k}}\right) = (k+2) - 2k = 2-k$$

である．補題 3.2 より，$q_{i,k}$ は $2<k\le d$ では不連続だから $0\le k\le 2$ でなければならない．($q_{i,k}$ は $2<k\le d$ の成分は全て 0）η_k が $\mathcal{PD}(S^n)$ の元であるための条件は，$r^{2k} \mid F_k(u)$ となることである．$0\le k\le 2$ の値で場合分けして考える．

1) $k=2$ のとき．$r^4 \mid F_2(u)$ ならば定数 $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$ を用いて

$$\begin{pmatrix} F_1(u) \\ F_2(u) \\ \vdots \\ F_n(u) \end{pmatrix} = \Big(D\varphi\Big)_{\varphi^{-1}(u)} \begin{pmatrix} p_{1,2}(u) \\ p_{2,2}(u) \\ \vdots \\ p_{n,2}(u) \end{pmatrix} = r^4 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

と書ける．

$$\Big(D\varphi\Big)^{-1}_{\varphi^{-1}(u)} = \Big(D\varphi^{-1}\Big)_u = r^{-4}\Big(D\varphi\Big)_{\varphi^{-1}(u)}$$

を両辺にかけて

$$\begin{pmatrix} p_{1,2}(u) \\ p_{2,2}(u) \\ \vdots \\ p_{n,2}(u) \end{pmatrix} = \left(\sum_{i=1}^{n}(\delta_{i,j}r^2 - 2u_iu_j)a_i\right)_{1\le j\le n} \tag{3.3}$$

と求まる．

2) $k=1$ のとき． $p_{j,1}$ は 1 次式だから

$$p_{j,1} = \sum_{i=1}^{n} b_{i,j}u_i \qquad (b_{i,j}\in\mathbf{R})$$

とおくと

$$
\begin{aligned}
F_{i,1} &= \sum_{j=1}^{n}(\delta_{i,j}r^2-2u_iu_j)p_{j,1} \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n}(\delta_{i,j}r^2-2u_iu_j)b_{\ell,j}u_\ell \\
&= r^2\Big(\sum_{\ell=1}^{n}b_{\ell,i}u_i\Big)-2u_i\Big(\sum_{j=1}^{n}b_{j,j}u_j^2+\sum_{j<\ell}(b_{\ell,j}+b_{j,\ell})u_ju_\ell\Big) \\
&= r^2\Big(\sum_{\ell=1}^{n}b_{\ell,i}u_i\Big) \\
&\quad -2u_i\Big\{b_{1,1}u_1^2+\sum_{j=2}^{n}(b_{j,j}-b_{1,1})u_j^2+\sum_{j<\ell}(b_{\ell,j}+b_{j,\ell})u_ju_\ell\Big\}
\end{aligned}
$$

より，$r^2 \mid F_1(u)$ となるのは

$$
\begin{cases} b_{i,i}=b_{j,j}=\lambda \\ b_{i,j}=-b_{j,i} \quad (i\neq j) \end{cases} \tag{3.4}
$$

のときである．

3) $k=0$ のときは $r^0=1$ だから，$p_{j,0}$ は任意の定数で条件を満たす．

(3.3)，(3.4) と合わせて基底が求まった． □

一般に，$\mathscr{X}^\infty(M)$ は Lie 環の構造をもち，$\mathcal{PD}(S^n)\subset\mathscr{X}^\infty(S^n)$ は有限次元部分 Lie 環となる．$\mathcal{PD}(S^n)$ はある Lie 群の Lie 環と同型である事を示す．

4 不定値特殊直交群とそのなす Lie 環

4.1 Lie 群・Lie 環

定義 4.1 (Lie 群). C^∞ 級多様体 G 群であって，積と逆元をとる写像が C^∞ であるとき，G は Lie 群であるという．

定義 4.2 (Lie 環)**.** 実ベクトル空間 $\mathfrak{g}$ が $\mathbf{R}$ 上の Lie 環であるとは次を満たす $\mathbf{R}$ 双線形な括弧積 $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ をもつ事である．

交代性:	$[X,Y]=-[Y,X]$
ヤコビ恒等式:	$[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0 \quad (X,Y,Z\in\mathfrak{g})$

例 4.2.1 (行列のなす Lie 環)**.** n 次正方行列の全体 $\mathfrak{g}=M_n(\mathbf{R})$ は Lie 括弧積を

$$[X,Y]:=XY-YX \quad (X,Y\in M_n(\mathbf{R})) \tag{4.1}$$

と定めると Lie 環となる．

例 4.2.2 (ベクトル場のなす Lie 環)**.** $\mathfrak{g}=\mathscr{X}^\infty(M)$（$M$ は C^∞ 級多様体）は Lie 括弧積を

$$[\xi,\eta]:=\xi\circ\eta-\eta\circ\xi \quad (\xi,\eta\in\mathscr{X}^\infty(M))$$

と定めると Lie 環になる．

例 4.2.2 の証明. $\xi,\eta\in\mathscr{X}^\infty(M)$ が座標 V 上で

$$\begin{aligned}\xi&=\sum_{i=1}^n f_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}\\ \eta&=\sum_{i=1}^n g_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}\end{aligned} \qquad (f_i,g_i\in C^\infty(V))$$

とする．このとき $a\in C^\infty(V)$ に対して

$$\begin{aligned}[\xi,\eta]a &= (\xi\circ\eta-\eta\circ\xi)a\\ &= \sum_{i=1}^n f_i\left(\sum_{j=1}^n\frac{\partial g_j}{\partial x_i}\frac{\partial a}{\partial x_j}+g_j\frac{\partial^2 a}{\partial x_i\partial x_j}\right)\\ &\quad -\sum_{j=1}^n g_j\left(\sum_{i=1}^n\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\frac{\partial a}{\partial x_i}+f_i\frac{\partial^2 a}{\partial x_i\partial x_j}\right)\\ &= \sum_{i=1}^n\Big(\sum_{j=1}^n\left(f_j\frac{\partial g_i}{\partial x_j}-g_j\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)\Big)\frac{\partial a}{\partial x_i}\end{aligned} \tag{4.2}$$

となり，$[\xi,\eta]$ は V 上で C^∞ 級ベクトル場である．また，押し出しについての公式

$$\varphi_*[\xi,\eta]=[\varphi_*\xi,\varphi_*\eta]$$

より，座標変換の押し出しによって $[\xi,\eta]$ は M 上で張り合う．よって Lie 括弧積は $\mathscr{X}^\infty(M)$ で閉じている．式 (4.2) は Lie 括弧積の具体的な計算を与える．写像の合成における結合則を用いることで交代性，ヤコビ恒等式が成り立つことが確かめられる． $\square$

4.2　不定値特殊直交群の Lie 環

定義 4.3 (ローレンツ計量)**.** $\mathbf{R}^{n+2}$ のローレンツ計量を $x \in \mathbf{R}^{n+2}$ に対して次の様に定める．

$$\langle x,x\rangle = x^\top I x = \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 - x_{n+2}^2$$
$$I := I_{n+1,1} = \begin{pmatrix} I_{n+1} & \\ & -1 \end{pmatrix}$$

定義 4.4 (符号 $(n+1,1)$ の不定値特殊直交群)**.** G を符号 $(n+1,1)$ の不定値特殊直交群の単位元の連結成分とする．

$$G = SO_0(n+1,1) = \{g \in SL(n+2,\mathbf{R}) \mid g^\top I g = I, g_{n+2,n+2} > 0\}$$

つまり G はローレンツ計量を不変にする様な *Lie* 群である．

G の単位元の接空間として $\mathfrak{g}$ を定義する．

定義 4.5 (G の Lie 環 $\mathfrak{g}$)**.** $\mathfrak{g} = T_eG = \mathfrak{so}(n+1,1)$

$\mathfrak{g}$ は例 4.2.1 の式 (4.1) と同じ Lie 括弧積で Lie 環になる．$g(t)$ を G 上の C^∞ 級曲線とみて ${}^tgIg = I$ の両辺を微分する事で

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g} &= \{A \in SL(n+2,\mathbf{R}) \mid A^\top I + IA = 0\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} B & b \\ b^\top & 0 \end{pmatrix} \in SL(n+2,\mathbf{R}) \;\middle|\; B \in SL(n+1,\mathbf{R}), b \in \mathbf{R}^{n+1} \right\}
\end{aligned}$$

が得られる．また，基底の間の Lie 括弧積を計算すると，綺麗な関係性が見られた．

命題 4.6 ($\mathfrak{g}$ の基底と Lie 括弧積)**.** $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(n+1,1)$ は $\binom{n}{2} + 2n + 1$ 次元の実ベクトル空間となる．基底とその *Lie* 括弧積は次のとおりである．ここで $E_{i,j}$ を (i,j) 成分のみ 1 で他は 0 の n 次正方行列（行列単位）とする．

- $\mathfrak{g}$ の基底

$$\begin{aligned} X_{i,j} &= E_{j,i} - E_{i,j} \qquad (\ 1 \leq i < j \leq n+1\ ) \\ Y_i &= E_{i,n+2} + E_{n+2,i} \qquad (\ 1 \leq i \leq n+1\ ) \end{aligned} \tag{4.3}$$

- 基底の *Lie* 括弧積

$$\begin{aligned} [X_{i,j}, X_{j,k}] &= X_{k,i} \\ [Y_i, Y_k] &= X_{k,i} \qquad (i \neq j \neq k) \\ [X_{i,j}, Y_i] &= Y_j \end{aligned} \tag{4.4}$$

5 n 次元球面 S^n 上の多項式係数ベクトル場のなす Lie 環

$\mathcal{PD}(S^n)$ と $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(n+1,1)$ を Lie 環として比較する．式 (3.1) と (4.3) の基底の取り方では基底同士の Lie 括弧積は一致しないが，実は両者は同型である．そこで，G から S^n への作用を用いて $\mathfrak{g}$ の元から $\mathcal{PD}(S^n)$ の元への対応を作る．

5.1 G の n 次元球面 S^n への作用

G による S^n への作用 $\cdot$ を一次分数変換を用いて構成する．

$$\begin{array}{ccccc} G \times S^n & \xrightarrow{\phi_1} & \mathbf{R}^{n+1} \times (\mathbf{R}_{>0}) & \xrightarrow{\phi_2} & \mathbf{R}^{n+1} \\ \Cup & & \Cup & & \Cup \\ (g,x) & \longmapsto & g\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ \alpha \end{pmatrix} & \longmapsto & \dfrac{y}{\alpha} \end{array}$$

$$g \cdot x := \phi_2 \circ \phi_1(g,x) \tag{5.1}$$

補題 5.1. (5.1) で定めた写像 $\cdot$ は，G の S^n への推移的な作用である．

補題 *5.1* の証明. まず，well-defined である事を示す．

$$x \in S^n, \omega = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$$

とする．$\|x\|=1$ より，

$$\langle \begin{pmatrix} y \\ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ \alpha \end{pmatrix} \rangle = \langle \omega, \omega \rangle = \langle g\omega, g\omega \rangle = \|x\|^2 - 1 = 0$$

であり，

$$\langle \begin{pmatrix} y \\ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ \alpha \end{pmatrix} \rangle = \|y\|^2 - \alpha^2$$

だから，$\|y\| = |\alpha|$ となる．$\alpha = 0$ ならば $y = 0$ だが，g は正則行列だから $\alpha \neq 0$ である．$G \times S^n$ は連結なので，α の正負は $\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$ の第 $n+2$ 成分と一致する．従って，$\alpha > 0$ である．これから，$\dfrac{y}{\alpha} \in S^n$ も分かる．

$$\left\{ \begin{pmatrix} A & \\ & 1 \end{pmatrix} \in M(n, \mathbf{R}) \mid A \in SL(n+1, \mathbf{R}) \right\} \subset G$$

であって，$SO(n+1)$ は S^n に推移的に作用しているから，G の S^n への作用 $\cdot$ が推移的である事も明らかである．　□

5.2　$\mathfrak{g}$ から $\mathcal{PD}(S^n)$ への対応

$t=0$ で単位元を通る G の 1 係数部分群を

$$g(t) = e^{tA} \quad (A \in \mathfrak{g})$$

で定める．$g(t)$ による一次分数変換による S^n への作用は，微分することによって自然に S^n 上の C^∞ 級ベクトル場を定める．このベクトル場のなすベクトル空間と $\mathcal{PD}(S^n)$ とを比較する．$\mathfrak{g}$ から G への対応を指数関数で定める．

$$\begin{array}{cccc} \exp\colon & \mathfrak{g} & \longrightarrow & G \\ & \cup & & \cup \\ & A & \longmapsto & e^A \end{array}$$

これは，$\left.\dfrac{\partial}{\partial t} e^{tA}\right|_{t=0} = A$ を満たしている．この対応は，次の補題より well-defined である．

補題 5.2. $A \in \mathfrak{g}$ ならば $e^A \in G$ である．

補題 *5.2* の証明. $(e^A)^\top I e^A = I$ を示す．$I^2 =$ 単位行列 より，$A^\top I + IA = 0$ に I をかけて

$$I(-A)I = A^\top$$

よって

$$(e^A)^\top I e^A = e^{A^\top} I e^A = e^{I(-A)I} I e^A = I e^{(-A)} e^A = I$$

より示された. □

$A \in \mathfrak{g}$ を exp で G 上に写し，e^{tA} の S^n への作用の t 微分で S^n 上のベクトル場を得る.

定理 5.3. この操作によって，$\mathfrak{g}$ の基底から得られた S^n 上のベクトル場のなすベクトル空間の基底は V_N 上で以下の様に表されるものである.

$$\begin{aligned}
\bar{X}_{i,j} &= v_j \frac{\partial}{\partial v_i} - v_i \frac{\partial}{\partial v_j} && (1 \leq i < j \leq n) \\
\bar{X}_{i,n+1} &= \frac{1}{2}(r^2 - 1)\frac{\partial}{\partial v_i} + \sum_{k=1}^{n} v_i v_k \frac{\partial}{\partial v_k} && (i = 1, 2, \ldots, n) \\
\bar{Y}_i &= \frac{1}{2}(r^2 + 1)\frac{\partial}{\partial v_i} + \sum_{k=1}^{n} v_i v_k \frac{\partial}{\partial v_k} && (i = 1, 2, \ldots, n) \\
\bar{Y}_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n} v_k \frac{\partial}{\partial v_k}
\end{aligned} \tag{5.2}$$

この基底のなすベクトル空間は $\mathcal{PD}(S^n)$ と一致する.

$\mathcal{PD}(S^n)$ の式 (3.1) での基底との変換は次の様になる.

$$\begin{aligned}
D_{i,j}^{(1)} &= \bar{X}_{i,j} \\
D_0^{(1)} &= \bar{Y}_{n+1} \\
D_i^{(0)} &= \bar{Y}_i - \bar{X}_{i,n+1} \\
D_i^{(2)} &= \bar{Y}_i + \bar{X}_{i,n+1}
\end{aligned} \tag{5.3}$$

また，Lie 括弧積を実際に計算して比較する事で次が得られた.

定理 5.4. $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(n+1, 1)$ と $\mathcal{PD}(S^n)$ は *Lie* 環として同型であり，その $\mathfrak{g}$ から $\mathcal{PD}(S^n)$ への対応は

$$\begin{cases} X_{i,j} & \longmapsto \bar{X}_{i,j} \\ Y_i & \longmapsto \bar{Y}_i \end{cases} \tag{5.4}$$

である.

6　S^n の等質空間表示

定義 6.1. 群 G が集合 M に推移的に作用するとき，M は G に関して等質であるという．

[田丸] によると

定理 6.2. M が群 G に関して等質であるとき，M をある点 $p \in M$ の固定部分群 $G_p \subset G$ を用いて $M = G/G_p$ と表せる．([田丸] を参照)

G の S^n への作用について，北極点 N の固定部分群 P を計算し，S^n の等質空間表示を求める．

定義 6.3 (N の固定部分群)**.**

$$P = \{g \in G \mid g \cdot N = N\}$$

定理 6.4 (等質空間表示)**.** P は G の極小放物型部分群であり，この P を用いて n 次元単位球面 S^n は等質空間として

$$S^n \simeq G/P$$

と表される．

定理 6.5. $P \simeq \Big(SO(n, \mathbf{R}) \times \mathbf{R}_{>0}\Big) \ltimes \mathbf{R}^n$. が成り立つ．またこの時，$P$ の Lie 環 $\mathfrak{p}$ は次の様に与えられる．

$$\mathfrak{p} = T_e P = \left\{ \left(\begin{array}{c|cc} A & -b & b \\ \hline (-b)^\top & 0 & c \\ (-b)^\top & c & 0 \end{array} \right) \in M(n+2, \mathbf{R}) \;\middle|\; \begin{array}{l} A \in SL(n, \mathbf{R}) \\ b \in \mathbf{R}^n, c \in \mathbf{R} \end{array} \right\}.$$

7　まとめ

7.1　今後の課題

本研究で n 次元球面 S^n 上の立体射影による局所座標系に関する多項式係数ベクトル場の具体的な構造が分かった．また，今回は天下り的に用いたが，Lie 群 G から C^∞ 級コンパクト多様体 M への推移的な C^∞ 級の作用があるとき，G の Lie 環と Lie 環として同型な $\mathscr{X}^\infty(M)$ の部分空間が得られる．これがいつ多項式係数になるのか，他にどのような特徴付けがあるのかなど問題は多数考えられる．他に研究課題として次の様なものが考えられる．

- S^n の等質空間表示 G/P の幾何学を学ぶ.
- 球面以外のコンパクト多様体でも多項式係数ベクトル場が考えられるのか調べる.
- 非自明な多項式係数ベクトル場が存在する局所座標系の存在や条件を調べる.

7.2 将来への展望

本研究では多様体論や Lie 群・Lie 環の知識の不足を指導教員の西山先生に補って頂きながら研究を進めた．学習を進め，より深い理解を得たい．また，微分形式の学習を再開しベクトル場との相互関係を考えたい. リーマン幾何学にも興味があり，これから学んでいきたい.

最後に，一年間熱心に指導して下さった西山享先生に深く感謝を申し上げます．また，卒業研究発表会で助言を下さった松田能文先生，川崎盛通先生にもお礼申し上げます.

参考文献

[坪井 I] 坪井俊,『幾何学 I 多様体入門』, 東京大学出版会　(2005)

[坪井 III] 坪井俊,『幾何学 III 微分形式』, 東京大学出版会　(2008)

[松本] 松本幸夫,『多様体の基礎』, 東京大学出版会　(1998)

[ミルナー] J.W. ミルナー (蟹江幸博 訳),『微分トポロジー講義』, 丸善出版　(2012)

[示野] 示野信一,『演習形式で学ぶリー群・リー環』, サイエンス社　(2012)

[田丸] 田丸博士,『等質空間の幾何学入門』,(熊本大学集中講義講義資料) http://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/tamaru/files/06kumamoto.pdf 広島大学 大学院理学部研究科 (2006)