

# 連分数の基本関係式と循環連分数

青山学院大学 理工学部 物理・数理学科  
学籍番号:15115083 鈴木 聖也  
指導教員 西山 享

2022年2月19日

## 概要

「ユークリッドの互除法」とは自然数の割り算を繰り返して最大公約数を求める有名な方法である。この論文ではまずユークリッドの互除法について証明する。

またフィボナッチ数列とビネの公式を用いたユークリッドの互除法の操作回数の評価をセミナーの教科書である [大島] に基づいて解説する。

この互除法の応用として連分数について考察した。§4 ではまず分子が全て 1 である単純連分数の場合について考えた。連分多項式の漸化式や、隣接関係式、和公式を証明する。次に単純連分数を一般化して、分子が全て自然数  $m$  であるような連分数について考える。このとき、単純連分数で示した三つの定理がどのように形で成り立つのかを考察し、定理 17, 定理 18, 定理 19 で得た。

以上は有限連分数の話であるが、無限連分数の中で特別な連分数である循環連分数について考える。循環連分数の長さや連分数の極限である無理数との関係に関する考察を行った。

# 目次

<b>1</b>	<b>序論</b>	<b>2</b>
1.1	研究の背景	2
1.2	研究の主結果	2
1.3	本論文の構成	4
<b>2</b>	<b>整数とユークリッドの互除法</b>	<b>4</b>
2.1	整数の性質	4
2.2	ユークリッドの互除法	4
2.3	ユークリッドの互除法の回数の評価	7
<b>3</b>	<b>互除法と連分数</b>	<b>9</b>
<b>4</b>	<b>連分数</b>	<b>10</b>
4.1	単純連分数	10
<b>5</b>	<b>単純連分数の一般化</b>	<b>12</b>
5.1	分子を1から $m$ に一般化した場合	12
5.2	漸化式の証明	14
5.3	隣接関係式の証明	14
5.4	和公式の証明	15
<b>6</b>	<b>循環連分数</b>	<b>18</b>
<b>7</b>	<b>まとめ</b>	<b>19</b>
7.1	今後の課題	19
7.2	卒業研究発表会での質問	19

# 1 序論

## 1.1 研究の背景

私が本研究をしようと考えた動機は、整数論に興味がありその中でもユークリッドの互除法を利用して何か面白い数はできないかと考えたことが始まりである。ユークリッドの互除法について学ぼうちに互除法が「連分数」と深い関わりがある頃を知り、大変興味を持った。しかし、連分数について深く学習した経験がなかったため、最初は苦労した。学人で見ると連分数に関連する定理はどれも美しく、また連分数の極限として無理数を表せるという有用性にも魅力を感じた。研究を進める中で単純連分数だけでなくそれを一般化することで、単純連分数より美しい性質を示すことができる場合があるのではないかと考え、分子を変更して研究に取り組んだ。本研究をするにあたり教科書として、[安福]、[大島]で学習をし、この論文でも数多くの定理を引用している。また、無理数の連分数展開については[塩川]を参考にした。ユークリッドの互除法や連分数について理解するのに非常に役に立ったので、著者である、安福悠、大島利雄、塩川宇賢の三人の先生方には深く感謝している。

## 1.2 研究の主結果

「ユークリッドの互除法」とは自然数の割り算を繰り返して最大公約数を求める有名な方法である。この論文ではまずユークリッドの互除法について証明する。例えば互除法のアルゴリズムを行列で書き表して、2つの整数  $a, b$  が互いに素になる条件が定理  $5sa_0 + ta_1 = d$  ( $s, t \in \mathbb{Z}$ ) で与えられることなどを証明する。

互除法のアルゴリズムはとても効率的であることが知られるが、公約数を求めるために互除法を何回使えば良いのかは有名なフィボナッチ数列と関係している教科書 [大島] にはビネの公式を用いたユークリッドの互除法の操作回数  $m$  の評価が解説されていたので、自分なりに理解して  $m \leq \left\lceil \frac{\log(\sqrt{5}a_0 + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^3)}{\log\left(\frac{1+\sqrt{5}}{3}\right)} \right\rceil - 2$  ( $a$  と  $b$  の互除法) という評価を得た (定理 8)。

連分数を考えるのにも互除法は特にその行列を用いた表現は応用できる。

元々私の興味は連分数にあったのだが、教科書 [安福] にあった連分数に関する公式群を自分なりに理解して、証明を与えた。

$$b_0 + \frac{1}{b_1 + \frac{1}{b_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{b_{n-1} + \frac{1}{b_n}}}}} = \frac{p_n(b_0, \dots, b_n)}{q_n(b_0, \dots, b_n)} \quad (1.1)$$

このような連分数は  $[b_0; b_1, \dots, b_n]$  と書く.  $p_n, q_n$  は  $b_0, \dots, b_n$  の多項式になるので連分多項式という. 連分数に関する主な公式は3つ (1) 漸化式, (2) 隣接関係式, (3) 和公式のようなものである. これらは証明も含めて定理12, 定理13, 定理14にまとめてあるが本文を参照してほしい.

教科書で学んだことをもとにして, 自分でも連分数について考察を重ねた. その結果, 2つの主要な結果を得ることが出来た. それを以下に説明する.

まず1つ目は式 (1.1) の分子の1を一般化することである. 分子が全て1の連分数は単純連分数と呼ばれるが, この論文ではこの分子を自然数  $m$  に置き換えた一般の連分数を考察する.  $b_0, \dots, b_n$  と  $m$  が互いに素の時には, 単純連分数の時の3つの公式, つまり漸化式, 隣接関係式, 和公式が少し修整すれば成り立つことが分かった. それは定理16にまとめてある. 連分多項式  $p_n$  と  $q_n$  が互いに素になることも証明できる.

もう2つ目は循環する無限連分数に関するものである. このような循環連分数は整数係数2次多項式の根に収束することが古くから知られていて「ラグランジュの定理」と呼ばれている (定理25). ここでは循環節の長さが1(最も簡単な場合)に次のような美しい式を得ることができた.

$$\sqrt{a^{2k} + 1} = a^k + \frac{1}{2a^k + \frac{1}{2a^k + \frac{1}{2a^k + \ddots}}} \quad (1.2)$$

これは例えば  $a = 2, k = 2$  なら

$$\sqrt{17} = 4 + \frac{1}{8 + \frac{1}{8 + \frac{1}{8 + \frac{1}{\ddots}}}} \quad (1.3)$$

のようになる.

循環連分数が満たす整数係数2次多項式がどのようなものになるのか大変興味深いですが、それについては研究が進んでいない。卒業研究の発表会では循環節の長さや方程式の形について松田能文先生に有用な指摘を頂いたが時間がなく、これ以上研究できなかったのが残念である。

### 1.3 本論文の構成

§2ではユークリッドの互除法を定義してその性質を説明する。§3ではユークリッドの互除法と連分数に関する関係を説明する。§4では連分数や連分多項式を定義した後、単純連分数に関する3つの定理、つまり漸化式、隣接関係式、和公式を述べる。また拡張ユークリッドの互除法を用いて2つの連分多項式が互いに素であることも示す。§5では単純連分数を一般化して、分子が全て  $m$  であるような連分数を考え、§4と同様の3つの定理を導く。§6では循環連分数について考察し、循環節が1となる極限である無理数について考える。最後に、§7で研究結果と今後の課題について述べる。

## 2 整数とユークリッドの互除法

$\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$  を自然数の集合とする。

### 2.1 整数の性質

安福先生の「発見・予想を積み重ねる-それが整数論」([安福])に次の命題が書いてあるが、よく利用するのでここに記しておく。

**命題 1** ([安福, 命題 1.1.1]). 自然数  $m, n, a, b$  に対して  $m \mid a$  かつ  $m \mid b$  とする。この時

- (1)  $m \mid (a + b)$
- (2)  $a > b \implies m \mid (a - b)$
- (3)  $\forall n \in \mathbb{N}$  に対して、 $m \mid na$

が成り立つ。

### 2.2 ユークリッドの互除法

自然数の組  $a_0, a_1 \in \mathbb{N}$  の最大公約数  $d = \gcd(a_0, a_1)$  を求めるには、ユークリッドの互除法を使うのが便利である。

**定義 2** (ユークリッドの互除法). 自然数の組  $a_0, a_1 \in \mathbb{N}$  に対して割り算を行い,  $a_2, a_3, \dots$  を次のように定める.

$$\begin{aligned} a_0 &= b_0 a_1 + a_2 & (b_0: a_1 \text{ で割った商, } a_2: \text{ 余り}) \\ a_1 &= b_1 a_2 + a_3 & (b_1: \text{ 商, } a_3: \text{ 余り}) \\ &\vdots \\ a_{m-1} &= b_{m-1} a_m + a_{m+1} & (a_{m+1} = 0) \end{aligned}$$

一般式で書けば,

$$a_k = b_k a_{k+1} + a_{k+2} \quad (0 \leq a_{k+2} < a_{k+1}, 0 \leq k < m) \quad (2.1)$$

となる. ただし  $a_{m+1} = 0$  である.

**定理 3.** ユークリッドの互除法を式 (2.1) のように書いた時,

$$\gcd(a_0, a_1) = \gcd(a_1, a_2) = \dots = a_m$$

が成り立つ. つまり  $a_m$  は最大公約数  $d = \gcd(a_0, a_1)$  である.

(証明). 次に示す補題 4 を使って証明する事ができる. □

**補題 4.** 自然数の組  $a_0, a_1$  に対し,  $a_0 > a_1$  と仮定する.  $a_0$  を  $a_1$  で割った商を  $b_0 \in \mathbb{N}$ , 余りを  $a_2$  と置く ( $0 \leq a_2 < a_1$ ). つまり,

$$a_0 = b_0 a_1 + a_2 \quad (2.2)$$

とする. この時次が成り立つ.

$$(1) a_2 = 0 \implies \gcd(a_0, a_1) = a_1$$

$$(2) \gcd(a_0, a_1) = \gcd(a_1, a_2)$$

(証明). (1) は明らかなので (2) を二段階に分けて示す.

(i)  $d|a_0, d|a_1$  より,  $a_0 = da'_0, a_1 = da'_1$  と書ける. したがって (2.2) より

$$a_2 = a_0 - b_0 a_1 = da'_0 - b_0 da'_1 = d(a'_0 - b_0 a'_1)$$

$\therefore d|a_2$  だから,  $d$  は  $a_1$  と  $a_2$  の公約数である.

特に,

$$\gcd(a_0, a_1) = d \leq \gcd(a_1, a_2) \quad (2.3)$$

が成り立つ.

(ii)  $e := \gcd(a_1, a_2)$  より,

$$a_1 = ea_1'', \quad a_2 = ea_2'' \quad (2.4)$$

と書ける. (i) と同様に

$$a_0 = a_1q + a_2 = ea_1''q \quad \therefore \quad e \mid a_0 \quad (2.5)$$

以上より  $e$  は,  $a_0, a_1$  の公約数でもある. したがって

$$e \leq \gcd(a_0, a_1) \quad (2.6)$$

(i), (ii) より,

$$\gcd(a_0, a_1) = d \leq \gcd(a_1, a_2) = e \leq \gcd(a_0, a_1) = d \quad \therefore \quad \gcd(a_0, a_1) = \gcd(a_1, a_2)$$

が成り立つ. これで証明できた.  $\square$

またユークリッドの互除法と定理を用いて次の定理が示す事が出来る.  $\mathbb{Z}$  を整数の集合とする.

**定理 5** (拡張ユークリッドの互除法). 自然数の組  $a_0, a_1$  に対し,  $d = \gcd(a_0, a_1)$  を最大公約数とすると, 次の式を満たすある整数  $s, t$  が存在する.

$$sa_0 + ta_1 = d \quad (s, t \in \mathbb{Z}) \quad (2.7)$$

(証明). ユークリッドの互除法の一般式  $a_k = b_k a_{k+1} + a_{k+2}$  を次のように書き換える.

$$a_{k+2} = -b_k a_{k+1} + a_k \quad (2.8)$$

この式は次のように行列で表すことができる.

$$\begin{pmatrix} a_{k+1} \\ a_{k+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -b_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_k \\ a_{k+1} \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

$\begin{pmatrix} a_k \\ a_{k+1} \end{pmatrix}$  の部分に同様の操作をして

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -b_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -b_{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{k-1} \\ a_k \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

これを繰り返し行くと

$$\begin{aligned} &= \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -b_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -b_{k-1} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -b_0 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} s & t \\ s' & t' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sa_0 + ta_1 \\ s'a_0 + t'a_1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.11)$$



ただし  $\begin{pmatrix} s & t \\ s' & t' \end{pmatrix}$  は枠で囲っている行列を計算したものである.  $k+1 = m$  として第一成分を比較すると

$$sa_0 + ta_1 = d \text{ が得られる.} \quad (2.12)$$

□

### 2.3 ユークリッドの互除法の回数の評価

**定義 6** (フィボナッチ数列). フィボナッチ数列  $\{F_n\}$  を次のように漸化式で定義する.

$$\begin{cases} F_0 = 0, & F_1 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \end{cases}$$

フィボナッチ数列の一般項は

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} \quad (2.13)$$

と表す事が出来る [大島, 命題 11.1]. これをビネの公式という.

**補題 7.** 自然数の組  $a_0, a_1$  に対して互除法を行って §2.2 のように  $a_2, a_3, \dots$ , を決める (ただし  $a_{m+1} = 0$ ). すると  $a_m = \gcd(a_0, a_1)$  は最大公約数になるのであった.

この時, 任意の  $n \geq 1$  に対して次の不等式が成り立つ.

$$a_{m+1-n} \geq F_{n+1}, \quad \text{特に, } a_0 \geq F_{m+2} \quad (2.14)$$

が成り立つ.

(証明).  $n$  に関する帰納法で示す.

(1)  $a_{m-1} > a_m \geq 1$  より

$$\begin{aligned} a_m \geq 1 &= F_2 & (n = 1 \text{ の時}) \\ a_{m-1} \geq 2 &= F_3 & (n = 2 \text{ の時}) \end{aligned}$$

$\therefore n = 1, 2$  のとき成り立つ.

(2)  $n = k, k-1$  のとき成り立つと仮定する.

ユークリッドの互除法の一般式  $a_k = b_k a_{k+1} + a_{k+2}$  を用いて

$$a_{m-k} = b_{m-k} a_{m-k+1} + a_{m-k+2} \quad (2.15)$$

と表すことができ、さらに仮定より  $a_{m+1-k} \leq F_{k+1}$  が成り立つので、

$$((2.15) \text{ 式}) \geq 1 \cdot F_{k+1} + F_k = F_{k+2}$$

よって  $n = k + 1$  の時も成り立つ。

□

この補題を用いて、フィボナッチ数列と比較する事で、互除法の回数を評価できる。

**定理 8** (互除法の回数の評価). 自然数の組  $a_0, a_1$  に対してユークリッドの互除法を行い、割り算の回数を  $m$  とすると、次の不等式が成り立つ。ここで  $[x]$  はガウス記号である。

$$m \leq \left\lfloor \frac{\log(\sqrt{5}a_0 + \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^3)}{\log\left(\frac{1+\sqrt{5}}{3}\right)} \right\rfloor - 2 \quad (2.16)$$

(証明). フィボナッチ数列の評価には (2.13) のビネの公式を利用する。

$$\boxed{\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{m+2} - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^3}{\sqrt{5}} \leq \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{m+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{m+2}}{\sqrt{5}}} = F_{m+2} \leq a_0$$

枠内の不等式を  $m$  について解くと

$$m \leq \left\lfloor \frac{\log(\sqrt{5}a_0 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^3)}{\log\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)} \right\rfloor - 2 \quad (2.17)$$

となり、定理の証明ができた。

□

**例 9.**  $a_0 = 3421$  とする。式 2.16 の右辺に代入して計算すると、 $m \leq 14$  となる。 $(a_0, a_1)$  に互除法を行い回数を調べると、次のようになり、確かに定理は成り立っている。

$a_1 = 35$  の時

$$3421 = 97 \times 35 + 26$$

$$35 = 1 \times 26 + 9$$

$$26 = 2 \times 9 + 8$$

$$9 = 1 \times 8 +$$

$$8 = 8 \times$$

$$m = 5 (\leq 14)$$

$a_1 = 1506$  の時

$$3421 = 2 \times 1506 + 409$$

$$1506 = 3 \times 409 + 279$$

$$409 = 1 \times 279 + 130$$

$$279 = 2 \times 130 + 19$$

$$130 = 6 \times 19 + 16$$

$$19 = 1 \times 16 + 3$$

$$16 = 5 \times 3 + 1$$

$$3 = 3 \times 1$$

$$m = 8 (\leq 14)$$

### 3 互除法と連分数

ユークリッドの互除法の一般式

$$a_k = b_k a_{k+1} + a_{k+2} \quad (0 \leq a_{k+2} < a_{k+1}) \quad (3.1)$$

の両辺を  $a_{k+1}$  で割って

$$\frac{a_k}{a_{k+1}} = b_k + \frac{a_{k+2}}{a_{k+1}} \quad (3.2)$$

を得る. 式 (3.2) を使うと,  $a_{n+2} = 0$  の時, 次のような計算ができる.

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{a_1} &= b_0 + \frac{1}{\left(\frac{a_1}{a_2}\right)} \\ &= b_0 + \frac{1}{b_1 + \frac{1}{\left(\frac{a_2}{a_3}\right)}} = \dots \\ &= b_0 + \frac{1}{b_1 + \frac{1}{b_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{b_{n-1} + \frac{1}{b_n}}}}} \end{aligned} \quad (3.3)$$

式 (3.3) の様に分母の中にさらに分数が含まれるものを**連分数**と呼ぶが, ユークリッドの互除法の操作は  $\frac{a_0}{a_1}$  の連分数展開を求める計算と実質同じ操作をしている事がわかる.

この式 (3.3) の連分数を  $[b_0; b_1, b_2, \dots, b_n]$  と書くことにする.

## 4 連分数

### 4.1 単純連分数

**定義 10** (単純連分数). 自然数の列  $b_0, b_1, \dots, b_n$  に対して次の様な連分数を考える.

$$[b_0; b_1, b_2, \dots, b_n] := b_0 + \frac{1}{b_1 + \frac{1}{b_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{b_{n-1} + \frac{1}{b_n}}}}} \quad (4.1)$$

式 (4.1) の様に分子が全て 1 の連分数を**単純連分数**という. 連分数といえば単純連分数を指すことも多い.

**定義 11.** 連分数を計算して

$$[b_0; b_1, b_2, \dots, b_n] = \frac{p_n(b_0, \dots, b_n)}{q_n(b_0, \dots, b_n)} \quad (4.2)$$

と表すと, 分母・分子は  $b_0$  から  $b_n$  の多項式になる. これを**連分多項式**という. 連分多項式は多数の面白い性質を持っており, 例えば以下で示す漸化式や和公式を満たしていることが証明できる.

$b_0, b_1, \dots, b_n$  が明らかな場合は  $p_n(b_0, \dots, b_n)$  を  $p_n$ ,  $q_n(b_0, \dots, b_n)$  を  $q_n$  と書く.

**定理 12** (漸化式). 連分数  $[b_0; b_1, \dots, b_n]$  の連分多項式  $p_n(b_0, \dots, b_n), q_n(b_0, \dots, b_n)$  は次の漸化式を満たす.

初項は  $p_0 = b_0, p_1 = b_0 b_1 + 1, q_0 = 1, q_1 = b_1$  であって, 一般式は

$$\begin{cases} p_n = b_n p_{n-1} + p_{n-2} \\ q_n = b_n q_{n-1} + q_{n-2} \end{cases} \quad (n \geq 2). \quad (4.3)$$

(証明).  $n$  に関する帰納法で示す.

(i)  $n = 2$  は明らか.

(ii)  $(n - 1)$  まで真と仮定する.

$$[b_0; b_1, \dots, b_n] = b_0 + \frac{1}{b_1 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{\boxed{b_{n-1} + \frac{1}{b_n}}}}}$$

枠内を  $y$  と置くと

$$\begin{aligned}
\frac{p_{n-1}(b_0, \cdot, b_{n-2}, y)}{q_{n-1}(b_0, \cdot, b_{n-2}, y)} &= \frac{yp_{n-2} + p_{n-3}}{yq_{n-2} + q_{n-3}} \\
&= \frac{\left(b_{n-1} + \frac{1}{b_n}\right) p_{n-2} + p_{n-3}}{\left(b_{n-1} + \frac{1}{b_n}\right) q_{n-2} + q_{n-3}} \\
&= \frac{\left(\frac{b_n(b_{n-1}p_{n-2} + p_{n-3}) + p_{n-2}}{b_n}\right)}{\left(\frac{b_n(b_{n-1}q_{n-2} + q_{n-3}) + q_{n-2}}{b_n}\right)} \\
&= \frac{b_n p_{n-1}(b_0, \dots, b_{n-1}) + p_{n-2}}{b_n q_{n-1}(b_0, \dots, b_{n-1}) + q_{n-2}}
\end{aligned}$$

となり，分子が  $p_n$ ，分母が  $q_n$  である。  $\square$

**定理 13** (隣接関係式). 連分数  $[b_0; b_1, \dots, b_n]$  の連分多項式  $p_n(b_0, \dots, b_n), q_n(b_0, \dots, b_n)$  は互いに素であって，次の等式を満たす。

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{q_n q_{n-1}} \quad (4.4)$$

(証明).  $A = \begin{pmatrix} b_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  と書くと，漸化式 (4.3) より

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} p_n \\ p_{n-1} \end{pmatrix} &= A \begin{pmatrix} p_{n-1} \\ p_{n-2} \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} q_n \\ q_{n-1} \end{pmatrix} &= A \begin{pmatrix} q_{n-1} \\ q_{n-2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

である。これを用いると，

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} p_n & q_n \\ p_{n-1} & q_{n-1} \end{vmatrix} &= \det \left( A \begin{pmatrix} p_{n-1} \\ p_{n-2} \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} q_{n-1} \\ q_{n-2} \end{pmatrix} \right) = \det A \begin{vmatrix} p_{n-1} & q_{n-1} \\ p_{n-2} & q_{n-2} \end{vmatrix} \\
&= (-1) \begin{vmatrix} p_{n-1} & q_{n-1} \\ p_{n-2} & q_{n-2} \end{vmatrix} = \dots = (-1)^{n-k} \begin{vmatrix} p_{n-k} & q_{n-k} \\ p_{n-k-1} & q_{n-k-1} \end{vmatrix} \\
&= \dots = (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_0 & q_0 \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} b_0 b_1 + 1 & b_1 \\ b_0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} p_n & q_n \\ p_{n-1} & q_{n-1} \end{vmatrix} = p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n \text{ より}$$

$$p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n-1} \quad (4.5)$$

式 (4.5) より,  $p_n, q_n$  が互いに素であることがわかる. 式 (4.5) の両辺を  $q_{n-1} \cdot q_n$  で割ると

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n}{q_{n-1} q_n} = \frac{(-1)^{n-1}}{q_{n-1} q_n} \quad (4.6)$$

を得る. □

**定理 14.**  $p_n, q_n$  は次の和公式を満たす.

$$\begin{aligned} \frac{p_n}{q_n} &= \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{q_{k-1} q_k} + b_0 \\ &= b_0 + \frac{(-1)^0}{q_0 q_1} + \frac{(-1)^1}{q_1 q_2} + \cdots + \frac{(-1)^{n-2}}{q_{n-2} q_{n-1}} + \frac{(-1)^{n-1}}{q_{n-1} q_n} \end{aligned}$$

(証明). (5.4) より

$$\begin{aligned} \frac{p_n}{q_n} &= \frac{(-1)^{n-1}}{q_{n-1} q_n} + \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{q_{n-1} q_n} + \frac{(-1)^{n-2}}{q_{n-2} q_{n-1}} + \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} \\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{q_{n-1} q_n} + \frac{(-1)^{n-2}}{q_{n-2} q_{n-1}} + \cdots + \frac{(-1)^1}{q_1 q_2} + \frac{(-1)^0}{q_0 q_1} + \frac{p_0}{q_0} \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{p_n}{q_n} = b_0 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{q_{k-1} q_k} \quad \square$$

以上の連分数の性質については [安福, 命題 5.5.2] を参考にした.

## 5 単純連分数の一般化

### 5.1 分子を 1 から $m$ に一般化した場合

これまで単純連分数という分子が全て 1 の連分数について考えてきたが, 1 を自然数  $m$  に変えたとき既に証明した基本関係式や既約分数表示が成り立つことを予想して, それを証明することができた. この §5 ではそれを紹介する.

**定義 15.** 以下のような連分数を考える.

自然数  $m$ , 自然数の列  $b_0, b_2, \dots, b_k, \dots, b_n \in \mathbb{N}$  に対して  $(b_k, m) = 1$ , つまり  $b_k$  と  $m$  は互いに素とする. このとき, 連分数

$$[b_0; b_1, b_2, \dots, b_n]^m = b_0 + \frac{m}{b_1 + \frac{m}{b_2 + \frac{m}{\ddots + \frac{m}{b_{n-1} + \frac{m}{b_n}}}}} \quad (5.1)$$

を考える. 以下式 (5.1) の連分数を  $[b_0; b_1, b_2, \dots, b_n]^m$  のように指数  $m$  をつけて表す.

$$p_n(b_0, \dots, b_n), q_n(b_0, \dots, b_n) \quad (5.2)$$

を連分多項式という ( $m$  も含まれているが明示的には書かないことにする). これまで同様  $b_0, \dots, b_n$  も省略して書くことがある.

また, 式 (5.1) を計算して

$$\frac{p_n(b_0, \dots, b_n)}{q_n(b_0, \dots, b_n)}$$

と書いたとき,

式 (5.1) の  $b_1 \dots, b_n$  の部分を  $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$  と書いて計算すれば明らかに次の式が成り立つ.

$$q_n(b_0, \dots, b_n) = p_{n-1}(b_1, \dots, b_n) \quad (5.3)$$

単純連分数の時の定理 12, 13, 14 の一般化として次の定理が成り立つ.

**定理 16** (基本関係式).

$$(1) \text{ 漸化式: } \begin{cases} p_n = b_n p_{n-1} + m p_{n-2} \\ q_n = b_n q_{n-1} + m q_{n-2} \end{cases} \quad (n \geq 2)$$

$$(2) \text{ 隣接関係式: } \frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1} m^n}{q_n q_{n-1}} \quad (n \geq 1)$$

$$(3) \text{ 和公式: } \begin{aligned} \frac{p_n}{q_n} &= a_0 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} m^k}{q_{k-1} q_k} \\ &= b_0 + \frac{(-1)^0 m^1}{q_0 q_1} + \frac{(-1)^1 m^2}{q_1 q_2} + \dots + \frac{(-1)^{n-2} m^{n-1}}{q_{n-2} q_{n-1}} + \frac{(-1)^{n-1} m^n}{q_{n-1} q_n} \end{aligned}$$

以下この定理の等式を順番に証明する.

## 5.2 漸化式の証明

**定理 17** (基本関係式その 1 漸化式). 連分数  $[b_0; b_1, \dots, b_n]^m$  の連分多項式  $p_n, q_n$  は初項を  $p_0 = b_0, p_1 = b_0 b_1 + m, q_0 = 1, q_1 = b_1$  として, 次の漸化式を満たす.

$$\begin{cases} p_n = b_n p_{n-1} + m p_{n-2} \\ q_n = b_n q_{n-1} + m q_{n-2} \end{cases} \quad (n \geq 2)$$

(証明).

$$[b_0; b_1, \dots, b_n]^m = b_0 + \frac{m}{b_1 + \frac{m}{\dots + \boxed{b_{n-1} + \frac{m}{b_n}}}} \quad (5.4)$$

$n$  に関する帰納法で示す.  $n = 2$  の時は明らかに成り立つ.

$n - 1$  以下で定理が成り立つと仮定する. 式 (5.4) の枠内を  $y$  と置く.

$$\begin{aligned} \frac{p_{n-1}(b_0, \cdot, b_{n-2}, y)}{q_{n-1}(b_0, \cdot, b_{n-2}, y)} &= \frac{y p_{n-2} + m p_{n-3}}{y q_{n-2} + m q_{n-3}} \\ &= \frac{\left(b_{n-1} + \frac{m}{b_n}\right) p_{n-2} + m p_{n-3}}{\left(b_{n-1} + \frac{m}{b_n}\right) q_{n-2} + m q_{n-3}} \\ &= \frac{\left(\frac{b_n(b_{n-1} p_{n-2} + m p_{n-3}) + m p_{n-2}}{b_n}\right)}{\left(\frac{b_n(b_{n-1} q_{n-2} + m q_{n-3}) + m q_{n-2}}{b_n}\right)} \\ &= \frac{b_n p_{n-1}(b_0, \dots, b_{n-1}) + m p_{n-2}}{b_n q_{n-1}(b_0, \dots, b_{n-1}) + m q_{n-2}} \end{aligned}$$

最後の式の分子は  $p_n$ , 分母は  $q_n$  なので, 漸化式が成り立つことが分かった.  $\square$

## 5.3 隣接関係式の証明

**定理 18** (基本関係式その 2 隣接関係式). 自然数  $m$  と連分数  $[b_0; b_1, \dots, b_n]^m$  の連分多項式  $p_n, q_n$  は次の等式を満たす.

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1} m^n}{q_n q_{n-1}}$$



(証明). 定理 17 の漸化式を行列を用いて表すと

$$\begin{pmatrix} p_n & q_n \\ p_{n-1} & q_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_n & m \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{n-1} \\ p_{n-2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q_{n-1} \\ q_{n-2} \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

$A = \begin{pmatrix} b_n & m \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  として

$$\begin{vmatrix} p_n & q_n \\ p_{n-1} & q_{n-1} \end{vmatrix} = \det A \begin{vmatrix} p_{n-1} & q_{n-1} \\ p_{n-2} & q_{n-2} \end{vmatrix} \quad (5.6)$$

$A$  の行列式を計算すると

$$\det A \begin{vmatrix} p_{n-1} & q_{n-1} \\ p_{n-2} & q_{n-2} \end{vmatrix} = (-m) \begin{vmatrix} p_{n-1} & q_{n-1} \\ p_{n-2} & q_{n-2} \end{vmatrix} \quad (5.7)$$

新たに出てくる行列式に対しても同様の操作を初項が出てくるまで繰り返す

$$\begin{aligned} &= \dots = (-m)^k \begin{vmatrix} p_{n-k} & q_{n-k} \\ p_{n-k-1} & q_{n-k-1} \end{vmatrix} = \dots \\ &= (-m)^{n-1} \begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_0 & q_0 \end{vmatrix} = (-m)^{n-1} \begin{vmatrix} b_0 b_1 + m & b_1 \\ b_0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (-m)^{n-1} m \\ \therefore p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n &= (-1)^{n-1} m^n \end{aligned} \quad (5.8)$$

(5.8) を代入すると

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n}{q_{n-1} q_n} = \frac{(-1)^{n-1} m^n}{q_{n-1} q_n}$$

となって, 隣接関係式の証明ができた. □

## 5.4 和公式の証明

**定理 19** (基本関係式その 3 和公式).

$$\frac{p_n}{q_n} = b_0 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{q_{k-1} q_k} = a_0 + \frac{(-1)^0 m}{q_0 q_1} + \frac{(-1)^1 m^2}{q_1 q_2} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} m^n}{q_{n-1} q_n} \quad (5.9)$$

(証明).  $\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}m^n}{q_{n-1}q_n}$  を移項して

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^{n-1}m^n}{q_{n-1}q_n} + \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \quad (5.10)$$

$\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$  に対しても同様の操作を繰り返す.

$$\frac{(-1)^{n-1}m^n}{q_{n-1}q_n} + \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}m^n}{q_{n-1}q_n} + \frac{(-1)^{n-2}m^{n-1}}{q_{n-2}q_{n-1}} + \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} \quad (5.11)$$

$\frac{p_0}{q_0}$  が現れるまで繰り返すと

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^{n-1}m^n}{q_{n-1}q_n} + \frac{(-1)^{n-2}m^{n-1}}{q_{n-2}q_{n-1}} + \cdots + \frac{(-1)^1m^2}{q_1q_2} + \frac{(-1)^0m^1}{q_0q_1} + \frac{p_0}{q_0} \quad (5.12)$$

$$\therefore \frac{p_n}{q_n} = b_0 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}m^k}{q_{k-1}q_k} \quad \square$$

**定理 20.**  $(p_n, q_n)$  は互いに素. つまり  $\frac{p_n}{q_n}$  は既約分数である.

定理 20 を証明するために, まず 2 つの補題を示す.

**補題 21.**  $d := \gcd(p_n, q_n)$  と置くと  $d|m^n$

(証明). 定義より

$$p_n = dp'_n, \quad q_n = dq'_n \quad (5.13)$$

と表せる. 式 (5.13) を式 (5.8) に代入すると

$$\begin{aligned} (-1)^{n-1}m^n &= p_nq_{n-1} - p_{n-1}q_n \\ &= dp'_nq_{n-1} - dp_{n-1}q'_n \\ &= d(p'_nq_{n-1} - p_{n-1}q'_n) \end{aligned}$$

$\therefore m^n$  は  $d$  で割りきれれる. □

**補題 22.**  $(p_n, m) = (q_n, m) = 1$  ( $p_n$  と  $m$ ,  $q_n$  と  $m$  は互いに素)

(証明).  $p_n$  を漸化式で表し,  $m$  を法として考えると

$$p_n = b_np_{n-1} + mp_{n-2} \equiv b_np_{n-1} \pmod{m} \quad (5.14)$$

同様の操作を  $p_0$  が現れるまで繰り返すと

$$\begin{aligned} p_n &\equiv b_n p_{n-1} = b_n(b_{n-1} p_{n-2} + m p_{n-3}) \equiv b_n b_{n-1} p_{n-2} \equiv \cdots \\ &\equiv b_n \cdots b_1 p_0 \equiv b_n \cdots b_0 \not\equiv 0 \pmod{m} \end{aligned}$$

$(b_k, m) = 1$  より  $b_0 b_1 \cdots b_n$  は  $m$  と共通因数を持たないので  $(p_n, m) = 1$  がわかる。  
 $q_n$  についても同様に示すことができる。 □

**(定理 20 の証明)** . 最大公約数を  $d = \gcd(p_n, q_n)$  として  $d = 1$  を背理法で示す。  
 $d \geq 1$  としてその素因数を  $x \geq 2$  とすると,

$$x | p_n, x | m^n \implies x | m \quad \therefore x \text{ は } p_n \text{ と } m \text{ の共通因数.} \quad (5.15)$$

これは  $(p_n, m) = 1$  に矛盾する。  $\therefore d = 1$  である。 □

**定理 23.** 無理数  $\alpha$ , 自然数  $b \in \mathbb{N}$  に対して無限連分数

$$[b; \dot{b}]^m = [b; b, b, \dots]^m$$

の連分多項式を  $p_n, q_n$  とすると, 次の極限式を満たす。

$$\frac{p_n}{q_n} \rightarrow \frac{b + \sqrt{b^2 + 4m}}{2} =: \alpha \quad (n \rightarrow \infty)$$

**(証明).**  $q_n = p_{n-1}$  より  $\frac{p_n}{p_{n-1}} \rightarrow \alpha$  を示す。  $A = \begin{pmatrix} b & m \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  として,

$$\begin{pmatrix} p_n \\ p_{n-1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} p_{n-1} \\ p_{n-2} \end{pmatrix} = A^2 \begin{pmatrix} p_{n-2} \\ p_{n-3} \end{pmatrix} = \cdots = A^{n-1} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_0 \end{pmatrix}$$

$A$  の固有値を求めると, 一つは  $\alpha$ , もう一つは  $\beta$  になる。

$$\alpha = \frac{1}{2}(b + \sqrt{b^2 + 4m}), \quad \beta = \frac{1}{2}(b - \sqrt{b^2 + 4m})$$

$A$  を対角化して,  $p_n$  の一般項を求めると

$$p_n = \frac{p_1(\alpha^n - \beta^n) + p_0(\alpha^{n-1} - \beta^{n-1})}{\alpha - \beta} \quad (5.16)$$

$\frac{p_n}{p_{n-1}}$  を式 (5.16) を用いてまとめると

$$\frac{p_n}{p_{n-1}} = \frac{p_1(\alpha - \beta(\frac{\beta}{\alpha})^{n-1}) + m p_0(1 - (\frac{\beta}{\alpha})^{n-1})}{p_1(1 - (\frac{\beta}{\alpha})^{n-1}) + m p_0(\alpha^{-1} - \beta^{-1}(\frac{\beta}{\alpha})^{n-1})} \quad (5.17)$$

$\therefore \left| \frac{\beta}{\alpha} \right| < 1$  より

$$\frac{p_n}{q_n} \rightarrow \alpha = \frac{b + \sqrt{b^2 + 4m}}{2} \quad (n \rightarrow \infty) \quad (5.18)$$

が成り立つ。これが示したかった事である。 □

## 6 循環連分数

定義 24. 自然数の列  $a_0, \dots, a_n$  に対して, 循環連分数を

$$[a_0; a_1, \dots, a_n, a_1, \dots, a_n, \dots] = [a_0; \dot{a}_1, \dots, \dot{a}_n] \quad (6.1)$$

と表す. このとき循環節は  $(a_1, \dots, a_n)$  で長さは  $n$  である.

定理 25 (ラグランジュの定理 [安福, 定理 5.5.6]).  $\alpha$  を無理数とする.  $\alpha$  が循環連分数展開を持つならば,  $\alpha$  は整数係数 2 次多項式の根であり, 逆に  $\alpha$  が整数係数 2 次多項式の根ならば,  $\alpha$  は循環連分数展開を持つ.

定理 26. 自然数  $a$  に対して

$$\sqrt{a^{2k} + 1} = [a^k, (2\dot{a}^k)]$$

が成り立つ.

(証明). 無理数を整数部分と小数部分に分ける.

$$\sqrt{a^{2k} + 1} = a^k + (\sqrt{a^{2k} + 1} - a^k) \quad (6.2)$$

(6.2) の小数部分を分数で表す.

$$\sqrt{a^{2k} + 1} - a^k = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{a^{2k} + 1} - a^k}} \quad (6.3)$$

(6.3) の枠内を有理化すると,

$$\frac{1}{\sqrt{a^{2k} + 1} - a^k} = \frac{\sqrt{a^{2k} + 1} + a^k}{a^{2k} + 1 - a^{2k}} = \sqrt{a^{2k} + 1} + a^k = 2a^k + (\sqrt{a^{2k} + 1} - a^k) \quad (6.4)$$

式 (6.2), 式 (6.4) において下線部が等しいので

$$\begin{aligned} \sqrt{a^{2k} + 1} &= a^k + (\sqrt{a^{2k} + 1} - a^k) \\ &= a^k + \frac{1}{2a^k + \sqrt{a^{2k} + 1} - a^k} \\ &= a^k + \frac{1}{2a^k + \frac{1}{2a^k + \frac{1}{2a^k + \sqrt{a^{2k} + 1} - a^k}}} \\ &= \dots \end{aligned}$$

$\therefore \sqrt{a^{2k} + 1} = [a^k, (2\dot{a}^k)]$  が分かった. □

例 27. 定理 26 を適用した例を挙げる.

$$a = 2$$

$$\begin{aligned}\sqrt{5} &= \sqrt{2^{2 \cdot 1} + 1} = [2, \dot{4}] \\ \sqrt{17} &= \sqrt{2^{2 \cdot 2} + 1} = [4, \dot{8}] \\ \sqrt{65} &= \sqrt{2^{2 \cdot 3} + 1} = [8, \dot{16}]\end{aligned}$$

$$a = 3$$

$$\begin{aligned}\sqrt{10} &= \sqrt{3^{2 \cdot 1} + 1} = [3, \dot{6}] \\ \sqrt{82} &= \sqrt{3^{2 \cdot 2} + 1} = [9, \dot{18}] \\ \sqrt{730} &= \sqrt{3^{2 \cdot 3} + 1} = [27, \dot{54}]\end{aligned}$$

## 7 まとめ

### 7.1 今後の課題

本研究では、ユークリッドの互除法から初めて連分数について考え、連分数については単純連分数を一般化した場合を導くことが出来た。

しかし、まだまだ示すことのできていない部分も多く、今後の課題としては次の三つが挙げられる。

- 循環節の長さが 2 となる連分数の満たす整数係数多項式を研究したい。  
また、整数係数二次多項式の根を連分数で表すことはできる。しかし、その連分数の長さは分からないので今後考えたい。
- 分子が全て  $m$  の循環連分数の無理数への収束を証明したが、全て  $b$  ではなく、自然数の列  $b_0, b_1, \dots$  とした場合の収束の証明はどのように示すのか。
- 分子において全てが  $m$  で無い場合の一般の連分数では、本研究で示した漸化式などの 3 つの定理 (基本関係式) は成り立つのか。

また、本研究では取り上げなかったが  $e$  や  $\pi$  の連分数もあるのでそれらについても考えてみたい。

### 7.2 卒業研究発表会での質問

- 連分数展開を求める際にコンピュータを使ったか?(増田先生)  
→ 最初は手計算で求めていたが、計算量が多かったため途中からコンピュータも使用した。また計算には次のサイトを利用した。  
(WolframAlpha . <https://ja.wolframalpha.com>)

- 連分数の一般化において、分子が全て  $m$  ではなく、それぞれ異なっている場合には基本関係式は成り立つのか?(増田先生)

→ 漸化式については証明ができた。次のような連分数を考える。

$$b_0 + \frac{m_0}{b_1 + \frac{m_1}{b_2 + \frac{m_2}{\ddots + \frac{m_{n-2}}{b_{n-2} + \frac{m_{n-1}}{b_{n-1} + \frac{m_{n-1}}{b_n}}}}}}$$

このとき、漸化式は

$$\begin{cases} p_n = b_n p_{n-1} + m_{n-1} p_{n-2} \\ q_n = b_n q_{n-1} + m_{n-1} q_{n-2} \end{cases} \quad (n \geq 2)$$

となると予想して、定理 17 と同様に帰納法で示すことができた。他の定理については時間がなかったためできなかったが、§5 で示した定理を修整した等式になると予想する。

- 整数係数 2 次多項式から循環節の長さを決めるのは難しいと本研究で言ったが、連分数を勉強して何か整数係数 2 次多項式と循環節の長さについて予想できることはあったか? (松田先生)

→ 卒業研究発表会では、循環節が長ければ長いほど整数係数 2 次多項式の係数が大きくなると予想したが、

$$[1; \dot{1}, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 1, \dot{2}]$$

のように循環節に 1 が多く含まれている場合、係数はさほど大きくはならないので私の予想が誤っていた。他に予想ができることはないかを考察することは今後の課題である。

最後に、本研究を行うにあたり一年間熱心にご指導して下さった西山亨先生に感謝を申し上げます。また卒業研究発表会で質問して下さった増田哲先生、松田能文先生にも御礼申し上げます。

## 参考文献

[安福] 安福悠, 『発見・予想を積み重ねる — それが整数論』, オーム社 (2016).

[大島] 大島利雄, 『個数を数える』, 数学書房 (2019).

[塩川] 塩川宇賢, 『無理数と超越数』, 森北出版 (2021).