極小曲面と Weierstrass–Enneper の表現公式

青山学院大学　理工学部　物理・数理学科
学籍番号:15116068　須永潤
指導教員 西山 享

目 次

1　序論

1.1　研究の背景

卒業研究では微分幾何学 [小七] について学び，曲面について興味を持った．曲面の中でも極小曲面という曲面があるのを知り，関数論との関係について勉強した．

私が本研究を始めた動機は，極小曲面は複素パラメータで現わすことができて正則関数 f と有利型関数 g で決まる．それを利用して f, g を変形すると極小曲面族が得られる．このような変形で第一基本形式がどう変化するかに興味を持った．

1.2　研究の主結果

極小曲面とは曲面積が変形によって極小 (極大) になるような曲面である．

卒業研究では極小曲面に関する次のような研究を行った．主結果は以下の 2 つである．

(1) 曲面 S の ε 変形を考えて，その面積を $A(\varepsilon)$ と表し，変分法により $A(\varepsilon)$ の一階微分係数，二階微分係数を求める (定理 1, 定理 2)．これによって極小曲面が特徴付けられることがわかった．

(2) 実パラメータ (u, v) を複素パラメータ $w = u + iv$ にとり替えて極小曲面を考えると，複素関数 $f(w), g(w)$ で表示できる．これを Weierstrass–Enneper の表現公式という (定理 5)．その詳細を証明をつけて紹介するする．複素関数 $f(w), g(w)$ を決め，Weierstrass–Enneper の表現公式を用いることで極小曲面が複素座標で表せることを示す．逆に $f(w), g(w)$ から極小曲面の実座標表で表す．

(3) (2) を利用して具体的な極小曲面族を構成することができた (§5.1, §5.2, §5.3)．

(1) ～ (3) についてもう少し具体的に説明する前に曲面の基本的な事項を説明する．

連結開集合 $D \subset \mathbb{R}^2$ に含まれる $(u, v) \in D$ に対して，空間内の曲面 S のパラメータ表示 $\boldsymbol{P}(u, v) \in \mathbb{R}^3$ を考える．S の接ベクトル $\boldsymbol{P}_u, \boldsymbol{P}_v$ 間の内積によって E, F, G を

$$E = \boldsymbol{P}_u \cdot \boldsymbol{P}_u, \qquad F = \boldsymbol{P}_u \cdot \boldsymbol{P}_v = \boldsymbol{P}_v \cdot \boldsymbol{P}_u, \qquad G = \boldsymbol{P}_v \cdot \boldsymbol{P}_v$$

このように定義する．$\boldsymbol{e}$ を S の単位法ベクトルとして L, M, N を

$$\begin{aligned} L &= \boldsymbol{P}_{uu} \cdot \boldsymbol{e} = -\boldsymbol{P}_u \cdot \boldsymbol{e}_u \\ M &= \boldsymbol{P}_{uv} \cdot \boldsymbol{e} = \boldsymbol{P}_{vu} \cdot \boldsymbol{e} = -\boldsymbol{P}_u \cdot \boldsymbol{e}_v = -\boldsymbol{P}_v \cdot \boldsymbol{e}_u \\ N &= \boldsymbol{P}_{vv} \cdot \boldsymbol{e} = -\boldsymbol{P}_v \cdot \boldsymbol{e}_v \end{aligned}$$

このように定義すると，ガウス曲率 K と平均曲率 H は

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \qquad H = \frac{EN + GL - 2FM}{2(EG - F^2)}$$

と定義される．平均曲率 $H=0$ のとき曲面 S を極小曲面と呼び，本研究は極小曲面について詳しく説明する．

(1) について説明する．

S を $D\subset\mathbb{R}^2$ 上で定義する．曲面の面積を計算するので有界領域 $W\subset D$ 考え，∂W を W の境界とし ∂W は区分的に滑らかな曲線と仮定する．$\overline{W}=W\cup\partial W$ を W の閉包と仮定すると $\overline{W}\subset D$ である．S の面積を変形するために境界 ∂W で 0 になるような関数 $f(u,v):\overline{W}\to\mathbb{R}$ を任意に選び，$\boldsymbol{P}(u,v)$ の単位法ベクトル $\boldsymbol{e}$ と十分小さな $\varepsilon\in\mathbb{R}$ に対して $\boldsymbol{P}$ の ε 変形

$$\overline{\boldsymbol{P}}=\overline{\boldsymbol{P}}(\varepsilon)=\boldsymbol{P}+\varepsilon f\boldsymbol{e}$$

を考える．$\overline{\boldsymbol{P}}(\varepsilon)$ の面積 $\displaystyle\iint_{\overline{W}}|\overline{\boldsymbol{P}}(u,v)_u\times\overline{\boldsymbol{P}}(u,v)_v|\,dudv$ を $A(\varepsilon)$ と書くとき

$$\left.\frac{d}{d\varepsilon}A(\varepsilon)\right|_{\varepsilon=0}=-2\iint_{\overline{W}}fH\sqrt{EG-F^2}\,dudv \tag{a}$$

$$\left.\frac{d^2}{d\varepsilon^2}A(\varepsilon)\right|_{\varepsilon=0}=\iint_{\overline{W}}(2f^2EK+{f_u}^2+{f_v}^2)\,dudv \tag{b}$$

が成り立つ．(a) の式より S が極小曲面すなわち $H=0$ であるとき $A'(0)=0$ だが (b) の式より $A''(0)$ の符号は $|K|$ によって決まるので，S の面積は極大値もしくは極小値をとる．

(2) について説明する．

曲面 S の実パラメータ表示 $\boldsymbol{P}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$ に対し複素パラメータ $w\in\mathbb{C}$ を考え， $w=u+iv$ とおく．複素関数 $\phi_1(w),\phi_2(w),\phi_3(w)$ を次のように決める．

$$\phi_1(w)=x_u-ix_v,\quad \phi_2(w)=y_u-iy_v,\quad \phi_3(w)=z_u-iz_v$$

$\phi_1(w)^2+\phi_2(w)^2+\phi_3(w)^2=0$ が成り立つので，複素関数 $f(w),g(w)$ を

$$f(w)=\phi_1-i\phi_2,\quad g(w)=\frac{\phi_3}{\phi_1-i\phi_2}$$

と定義する．この $f(w),g(w)$ を用いると次の Weierstrass–Enneper の表現公式と呼ばれる関係式が成り立つ．

$$\boldsymbol{P}(w)-\boldsymbol{P}(w_0)=\left(\mathrm{Re}\int_{w_0}^{w}\frac{1}{2}f(1-g^2)\,dw,\mathrm{Re}\int_{w_0}^{w}\frac{i}{2}f(1+g^2)\,dw,\mathrm{Re}\int_{w_0}^{w}fg\,dw\right)$$

(3) について説明する．

Weierstrass–Enneper の表現公式を用いると

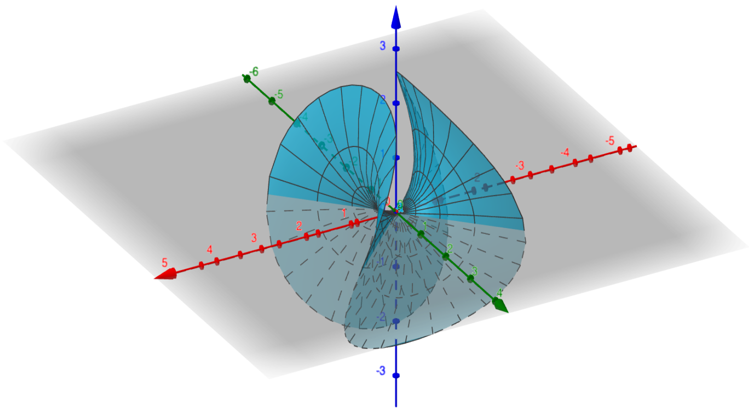
$$\boldsymbol{P}(x,y,z)=\begin{cases}x=3u+3uv^2-u^3\\ y=v^3-3v-3u^2v\\ z=3(u^2-v^2)\end{cases}$$

と表される Enneper 曲面は $w \in \mathbb{C}$ とし， $w = u + iv$ とおくと

$$\boldsymbol{P}(w) = \left(\mathrm{Re}\int_{w_0}^{w} 3(1-w^2)\ dw, \mathrm{Re}\int_{w_0}^{w} 3i(1-w^2)\ dw, \mathrm{Re}\int_{w_0}^{w} 6w\ dw\right)$$

というように書ける．

図： Enneper 曲面



極小曲面族については§5.3 で説明する．

1.3 本論文の構成

§2 では，曲面を理解するうえで重要な第一基本形式，第二基本形式，平均曲率，ガウス曲率について記す．

§3 では，変分法を用いて極小曲面の面積の変化，面積が極大値もしくは極小値をとることを説明する．また等温座標系の定義，等温座標系での極小曲面のパラメータ表示の各成分が調和関数になることを示す．

§4 では，極小曲面を複素座標で表すための複素関数の定義，満たす条件を示す．また，Weierstrass–Enneper の表現公式を用いることで極小曲面が複素座標で表せることを示す．

§5 では，Weierstrass–Enneper の表現公式を用いて，極小曲面を実座標表示から複素座標表示で表す．また，2 つの複素関数から極小曲面を実座標表示で表し，実数 t をパラメータとする極小曲面族も 2 つの複素関数から実座標表示で表す．

本文中の図は GeoGebra[Geo] を使用した．

2 曲面の基本形式と曲率

連結開集合 $D \subset \mathbb{R}^2$ に含まれる $(u, v) \in D$ に対して，空間内の曲面 S のパラメータ表示 $\boldsymbol{P}(u, v) \in \mathbb{R}^3$ を考える．u, v に関して $x(u, v), y(u, v), z(u, v) \in \mathbb{R}$ は C^∞ 級と仮定し $\boldsymbol{P}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ と書く．

S の接ベクトルを

$$\boldsymbol{P}_u = \boldsymbol{P}(u,v)_u = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right), \qquad \boldsymbol{P}_u = \boldsymbol{P}(u,v)_v = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right)$$

と表す.

定義 1. $\boldsymbol{P}_u,\ \boldsymbol{P}_v$ 間の内積によって

$$\begin{aligned} E &= \boldsymbol{P}_u \cdot \boldsymbol{P}_u = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 \\ F &= \boldsymbol{P}_u \cdot \boldsymbol{P}_v = \boldsymbol{P}_v \cdot \boldsymbol{P}_u = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right) + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial v}\right) \\ G &= \boldsymbol{P}_v \cdot \boldsymbol{P}_v = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 \end{aligned}$$

とおく.

$\boldsymbol{P}$ の外微分をとったもの $d\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}_u\ du + \boldsymbol{P}_v\ dv$ を用いて，Ⅰを

$$\begin{aligned} \mathrm{I} &= d\boldsymbol{P} \cdot d\boldsymbol{P} \\ &= Edudu + 2Fdudv + Gdvdv \end{aligned}$$

と定義するとⅠは C^∞ 級関数を係数とする二次微分形式である．このときⅠを**第一基本形式**と呼ぶ．点 $\boldsymbol{P}(u,v)$ において $\boldsymbol{e} \in \mathbb{R}^3$ を S の単位法ベクトルとし

$$\boldsymbol{e} = \frac{\boldsymbol{P}_u \times \boldsymbol{P}_v}{|\boldsymbol{P}_u \times \boldsymbol{P}_v|} \tag{1}$$

と定義する．このとき $\boldsymbol{P}(u,v)$ における $\mathbb{R}^3$ のベクトルの組 $\{\boldsymbol{P}_u, \boldsymbol{P}_v, \boldsymbol{e}\}$ は右手系をなす.

定義 2. 曲面 S のパラメータ表示 $\boldsymbol{P}(u,v)$ が正則であるとは

$$\boldsymbol{P}_u \times \boldsymbol{P}_v \neq \boldsymbol{0}$$

が成り立つことである．つまり $\boldsymbol{P}_u$ と $\boldsymbol{P}_v$ が一次独立であって接平面が一意に定まるとき正則であるという.

以下正則な曲面のみを考える．このとき S の法線方向が決まる (式 (1) 参照).

定義 3. 関数 $L,\ M,\ N$ を次のように与える.

$$\begin{aligned} L &= -\boldsymbol{P}_u \cdot \boldsymbol{e}_u \\ M &= -\boldsymbol{P}_u \cdot \boldsymbol{e}_v = -\boldsymbol{P}_v \cdot \boldsymbol{e}_u \\ N &= -\boldsymbol{P}_v \cdot \boldsymbol{e}_v \end{aligned}$$

$\boldsymbol{P}_u, \boldsymbol{P}_v$ と $\boldsymbol{e}$ は直交しているので

$$\boldsymbol{P}_u \cdot \boldsymbol{e} = 0, \qquad \boldsymbol{P}_v \cdot \boldsymbol{e} = 0 \tag{2}$$

が成り立つ．(2) の式を u, v で偏微分すると

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{P}_{uu} \cdot \boldsymbol{e} + \boldsymbol{P}_u \cdot \boldsymbol{e}_u = 0 \\
\boldsymbol{P}_{uv} \cdot \boldsymbol{e} + \boldsymbol{P}_u \cdot \boldsymbol{e}_v = 0 \\
\boldsymbol{P}_{vu} \cdot \boldsymbol{e} + \boldsymbol{P}_v \cdot \boldsymbol{e}_u = 0 \\
\boldsymbol{P}_{vv} \cdot \boldsymbol{e} + \boldsymbol{P}_v \cdot \boldsymbol{e}_v = 0
\end{aligned}$$

となるので L, M, N は

$$\begin{aligned}
L &= -\boldsymbol{P}_u \cdot \boldsymbol{e}_u = \boldsymbol{P}_{uu} \cdot \boldsymbol{e} \\
M &= -\boldsymbol{P}_u \cdot \boldsymbol{e}_v = -\boldsymbol{P}_v \cdot \boldsymbol{e}_u = \boldsymbol{P}_{uv} \cdot \boldsymbol{e} = \boldsymbol{P}_{vu} \cdot \boldsymbol{e} \\
N &= -\boldsymbol{P}_v \cdot \boldsymbol{e}_v = \boldsymbol{P}_{vv} \cdot \boldsymbol{e}
\end{aligned}$$

と表すことができる．ここで二次微分形式 II を

$$\begin{aligned}
\mathrm{II} &= -d\boldsymbol{P} \cdot d\boldsymbol{e} \\
&= Ldudu + 2Ndudv + Mdvdv
\end{aligned}$$

と定義して II を**第二基本形式**と呼ぶ.

定義 4. E, F, G, L, N, M を用いて以下の *2* つを定義する．

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} : \textbf{ガウス曲率,} \qquad H = \frac{EN + GL - 2FM}{2(EG - F^2)} : \textbf{平均曲率}$$

例 1. 定曲率の曲面の例.
(1) 平面 $S : \boldsymbol{P}(u, v) = (u, v, u + v)$, ガウス曲率 $K = 0$, 平均曲率 $H = 0$.
(2) 円柱面 $S : \boldsymbol{P}(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$, ガウス曲率 $K = 0$, 平均曲率 $H = -1$.
(3) 球面 $S : \boldsymbol{P}(u, v) = (\cos v \cos u, \cos v \sin u, \sin v)$, ガウス曲率 $K = 1$, 平均曲率 $H = -1$.

曲面の形はガウス曲率のみでは決まらないし，平均曲率のみでも決まらない．しかし第一基本形式，第二基本形式が決まると曲面の形は合同を除いて完全に決まることが知られている ([川崎] 定理 2.3)．K と H は I, II によって決まるから曲面の重要な性質を反映し

ていると考えられる．

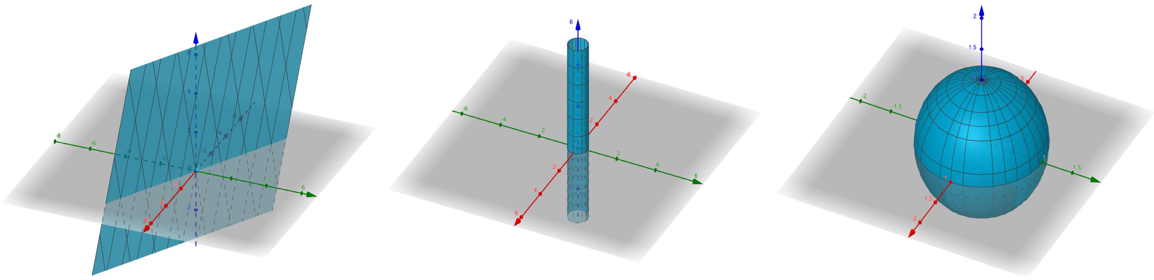


図 1　平面 (左)，円柱面 (中央)，球面 (右)

3　極小曲面

3.1　曲面の変分

$$H = \frac{EN + GL - 2FM}{2(EG - F^2)}$$

平均曲率は曲面の変分を考えるとき，曲面積の変化率に現れる．それを確かめてみよう．

S を $D \subset \mathbb{R}^2$ 上で定義する．曲面の面積を計算するので有界領域 $W \subset D$ 考え，∂W を W の境界とし ∂W は区分的に滑らかな曲線と仮定する．$\overline{W} = W \cup \partial W$ を W の閉包と仮定すると $\overline{W} \subset D$ である．S の面積を変形するために境界 ∂W で 0 になるような関数 $f(u,v) : \overline{W} \to \mathbb{R}$ を任意に選び，$\boldsymbol{P}(u,v)$ の単位法ベクトル $\boldsymbol{e}$ と十分小さな $\varepsilon \in \mathbb{R}$ に対して $\boldsymbol{P}$ の ε 変形

$$\overline{\boldsymbol{P}} = \overline{\boldsymbol{P}}(\varepsilon) = \boldsymbol{P} + \varepsilon f \boldsymbol{e}$$

を考える．

定理 1. $\overline{\boldsymbol{P}}(\varepsilon)$ の面積 $\displaystyle\iint_{W} |\overline{\boldsymbol{P}}(u,v)_u \times \overline{\boldsymbol{P}}(u,v)_v| \, dudv$ を $A(\varepsilon)$ と書くとき

$$\frac{d}{d\varepsilon} A(\varepsilon)\bigg|_{\varepsilon=0} = -2 \iint_{W} f H \sqrt{EG - F^2} \, dudv$$

が成り立つ．但し $A'(\varepsilon)$ は $A(\varepsilon)$ の ε に関する微分を表す．

[**証明**]. $\overline{\boldsymbol{P}}$ の第一基本形式を $\mathrm{I} = \overline{E}dudu + 2\overline{F}dudv + \overline{G}dvdv$ と表すと $\left|\overline{\boldsymbol{P}}_u \times \overline{\boldsymbol{P}}_v\right|^2$ は

$$\begin{aligned} \left|\overline{\boldsymbol{P}}_u \times \overline{\boldsymbol{P}}_v\right|^2 &= \left|\overline{\boldsymbol{P}}_u\right|^2 \left|\overline{\boldsymbol{P}}_v\right|^2 \sin^2\theta \\ &= \left|\overline{\boldsymbol{P}}_u\right|^2 \left|\overline{\boldsymbol{P}}_v\right|^2 (1 - \cos^2\theta) \\ &= (\overline{\boldsymbol{P}}_u \cdot \overline{\boldsymbol{P}}_u)(\overline{\boldsymbol{P}}_v \cdot \overline{\boldsymbol{P}}_v) - (\overline{\boldsymbol{P}}_u \cdot \overline{\boldsymbol{P}}_v)^2 \\ &= \overline{EG} - \overline{F}^2 \end{aligned}$$

と計算できるので，まず $\overline{\boldsymbol{P}}$ の第一基本形式 I を計算する．$d\overline{\boldsymbol{P}}$ は

$$\begin{aligned} d\overline{\boldsymbol{P}} &= \overline{\boldsymbol{P}}_u du + \overline{\boldsymbol{P}}_v dv \\ &= (\boldsymbol{P}_u + \varepsilon f_u \boldsymbol{e} + \varepsilon f \boldsymbol{e}_u)du + (\boldsymbol{P}_v + \varepsilon f_v \boldsymbol{e} + \varepsilon f \boldsymbol{e}_v)dv \\ &= d\boldsymbol{P} + \varepsilon df \boldsymbol{e} + \varepsilon f d\boldsymbol{e} \end{aligned}$$

となる．$(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{e})_u = 2\boldsymbol{e}_u\cdot\boldsymbol{e} = 0, (\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{e})_v = 2\boldsymbol{e}_v\cdot\boldsymbol{e} = 0$ より $\boldsymbol{e}\cdot d\boldsymbol{e} = 0$, また (2) の式より

$$\boldsymbol{e}\cdot d\boldsymbol{P} = \boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{P}_u du + \boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{P}_v = 0$$

であることに注意すると第一基本形式 I は

$$\begin{aligned} \mathrm{I} = d\overline{\boldsymbol{P}}\cdot d\overline{\boldsymbol{P}} &= d\boldsymbol{P}\cdot d\boldsymbol{P} + 2\varepsilon f d\boldsymbol{P}\cdot d\boldsymbol{e} + \varepsilon^2\{f^2 d\boldsymbol{e}\cdot d\boldsymbol{e} + (df)^2\} \\ &= \{Edudu + 2Fdudv + Gdvdv\} + 2\varepsilon f(-Ldudu - 2Mdudv - Ndvdv) \\ &\qquad +\varepsilon^2 f^2(\boldsymbol{e}_u\cdot\boldsymbol{e}_u dudu + 2\boldsymbol{e}_u\cdot\boldsymbol{e}_v dudv + \boldsymbol{e}_v\cdot\boldsymbol{e}_v dvdv) \\ &\qquad +\varepsilon^2({f_u}^2 dudu + 2f_u f_v dudv + {f_v}^2 dvdv) \\ &= \{E - 2\varepsilon fL + \varepsilon^2(f^2\boldsymbol{e}_u\cdot\boldsymbol{e}_u + {f_u}^2)\}dudu \\ &\qquad +2\{F - 2\varepsilon fM + \varepsilon^2(f^2\boldsymbol{e}_u\cdot\boldsymbol{e}_v + f_u f_v)\}dudv \\ &\qquad +\{G - 2\varepsilon fN + \varepsilon^2(f^2\boldsymbol{e}_v\cdot\boldsymbol{e}_v + {f_v}^2)\}dvdv \end{aligned}$$

である．よって

$$\begin{aligned} \overline{E} &= E - 2\varepsilon fL + \varepsilon^2(f^2\boldsymbol{e}_u\cdot\boldsymbol{e}_u + {f_u}^2) \\ \overline{F} &= F - 2\varepsilon fM + \varepsilon^2(f^2\boldsymbol{e}_u\cdot\boldsymbol{e}_v + f_u f_v) \\ \overline{G} &= G - 2\varepsilon fN + \varepsilon^2(f^2\boldsymbol{e}_v\cdot\boldsymbol{e}_v + {f_v}^2) \end{aligned}$$

となる．ここで

$$\begin{aligned} \delta_1 &= -2fLG - 2fNE + 4fMF \\ \delta_2 &= E(f^2\boldsymbol{e}_u\cdot\boldsymbol{e}_u + {f_v}^2) + G(f^2\boldsymbol{e}_v\cdot\boldsymbol{e}_v + {f_u}^2) \\ &\qquad -2F(f^2\boldsymbol{e}_u\cdot\boldsymbol{e}_v + f_u f_v) + 4f^2(LN - M^2) \end{aligned}$$

とおくと $|\overline{\boldsymbol{P}}_u \times \overline{\boldsymbol{P}}_v|$ は

$$|\overline{\boldsymbol{P}}_u \times \overline{\boldsymbol{P}}_v| = \sqrt{EG - F^2 + \varepsilon\delta_1 + \varepsilon^2\delta_2 + O(\varepsilon^3)} \tag{3}$$

と書ける．但し $O(\varepsilon^3)$ はランダウの記号である．ここで $\alpha = EG - F^2, \beta = \dfrac{\delta_1}{\alpha}, \gamma = \dfrac{\delta_2}{\alpha}$ とおいて (3) の式を $\varepsilon\delta_1 + \varepsilon^2\delta_2 + O(\varepsilon^3) = 0$ の近傍でテイラー展開すると

$$\begin{aligned} &\sqrt{EG - F^2 + \varepsilon\delta_1 + \varepsilon^2\delta_2 + O(\varepsilon^3)} \\ &\quad = \sqrt{\alpha}\left\{1 + \frac{1}{2}(\beta\varepsilon + \gamma\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3)) - \frac{1}{8}(\beta\varepsilon + \gamma\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3))^2 + O(\varepsilon^3)\right\} \qquad (4) \\ &\quad = \sqrt{\alpha}\left(1 + \frac{1}{2}\beta\varepsilon + O(\varepsilon^2)\right) \end{aligned}$$

となる．したがって $\overline{\boldsymbol{P}}$ の面積 $A(\varepsilon)$ は

$$A(\varepsilon) = \iint_{\overline{W}} \sqrt{\alpha} \left(1 + \frac{1}{2}\beta\varepsilon + O(\varepsilon^2)\right)\ dudv$$

となる．$\varepsilon = 0$ のときの面積 $A(\varepsilon)$ の一階微分係数は

$$\begin{aligned} A'(0) &= \iint_{\overline{W}} \frac{\delta_1}{2(EG-F^2)}\sqrt{EG-F^2}\ dudv \\ &= -2\iint_{\overline{W}}\ \frac{f(LG+NE-2MF)}{2(EG-F^2)}\sqrt{EG-F^2}\ dudv \\ &= -2\iint_{\overline{W}}\ fH\sqrt{EG-F^2}\ dudv \end{aligned}$$

である． □

上の式から $H=0$ であるとき $\forall f$ に対し $A'(0)=0$ である． 逆に $\forall f$ に対し $A'(0)=0$ のときは W の大部分で H, ∂W で 0 となる f をとって考えれば

$$0 \fallingdotseq -2\iint_{\overline{W}}\ H^2\sqrt{EG-F^2}\ dudv$$

となるので極限として $H=0$ を得る．

定義 5. $H=0$ のとき曲面 S を極小曲面と呼ぶ．

上の考察から，極小曲面の面積は微小な変形 ε で変化しないことがわかる．

3.2 等温座標系

定義 6. 連結開集合 $D \subset \mathbb{R}^2$ に含まれる $(u,v) \in D$ が**等温座標系**であるとは

$$E = G, \qquad F = 0$$

が成り立つことである．このとき曲面の第一基本形式は

$$\mathrm{I} = E(dudu + dvdv)$$

で与えられる．

どの曲面でも上手くパラメータをとれば等温座標系は存在する[1]ので，以下 (u,v) は常に等温座標系とする．
ここで次の定理 2 を証明するために，以下のことを定義する．

[1][川藤, 命題 1.49. , 注意 1.50.]

定理 2. 等温座標系 (u, v) に対して $\boldsymbol{P}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ でパラメータ表示された曲面 S が極小曲面であることと $\boldsymbol{P}(u, v)$ の各成分は**調和関数**であることは同値である．つまり

$$H = 0 \Longleftrightarrow \Delta \boldsymbol{P} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z) = \boldsymbol{0}$$

が成り立つ．

ただし $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial u^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial v^2}$ とし $\Delta f = 0$ となる関数 f のことを調和関数という．

[**証明**]. $E = G,\ F = 0$ より

$$\boldsymbol{P}_u \cdot \boldsymbol{P}_u = \boldsymbol{P}_v \cdot \boldsymbol{P}_v, \quad \boldsymbol{P}_u \cdot \boldsymbol{P}_v = 0 \tag{5}$$

(5) の最初の式を u で，二番目の式を v で微分して

$$\boldsymbol{P}_{uu} \cdot \boldsymbol{P}_u = \boldsymbol{P}_{vu} \cdot \boldsymbol{P}_v, \quad \boldsymbol{P}_{vu} \cdot \boldsymbol{P}_v + \boldsymbol{P}_u \cdot \boldsymbol{P}_{vv} = 0$$

したがって

$$\Delta \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{P}_u = 0$$

となる．(5) の最初の式を v で，二番目の式を u で微分して

$$\boldsymbol{P}_{uv} \cdot \boldsymbol{P}_u = \boldsymbol{P}_{vv} \cdot \boldsymbol{P}_v, \quad \boldsymbol{P}_{uu} \cdot \boldsymbol{P}_v + \boldsymbol{P}_u \cdot \boldsymbol{P}_{vu} = 0$$

したがって

$$\Delta \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{P}_v = 0$$

となる．$\boldsymbol{P}_u, \boldsymbol{P}_v$ は曲面 S の接ベクトルであり，接平面を与える．$\boldsymbol{P}_u, \boldsymbol{P}_v$ は $\Delta \boldsymbol{P}$ との内積が 0 なので Q を $\boldsymbol{P}_u, \boldsymbol{P}_v$ によって与えられた接平面とすると $\Delta \boldsymbol{P}$ が Q に直交することがわかる．曲面 S の単位方ベクトル $\boldsymbol{e}$ も Q と直交しているので $\Delta \boldsymbol{P}$ は $\boldsymbol{e}$ の実数倍である．$\Delta \boldsymbol{P}$ と $\boldsymbol{e}$ の内積は $L = \boldsymbol{P}_{uu} \cdot \boldsymbol{e},\ N = \boldsymbol{P}_{vv} \cdot \boldsymbol{e}$ なので

$$\Delta \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{e} = \boldsymbol{P}_{uu} \cdot \boldsymbol{e} + \boldsymbol{P}_{vv} \cdot \boldsymbol{e} = L + N$$

である．ここで H は等温座標系において

$$H = \frac{EN + GL - 2FM}{2(EG - F^2)} = \frac{E(L + N)}{2E^2} = \frac{1}{2E} \Delta \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{e}$$

だから

$$\Delta \boldsymbol{P} = 2EH\boldsymbol{e} \tag{6}$$

が成り立つ．

(6) の式より $H = 0$ のとき $\Delta \boldsymbol{P} = 0$.

逆に $\Delta \boldsymbol{P} = 0$ のとき，

$$E = \boldsymbol{P}_u \cdot \boldsymbol{P}_u > 0, \qquad \boldsymbol{e} = \frac{\boldsymbol{P}_u \times \boldsymbol{P}_v}{|\boldsymbol{P}_u \times \boldsymbol{P}_v|} \neq \boldsymbol{0}$$

なので (6) の式より $H = 0$ となる． $\square$

3.3　変分の二階微分係数

第2章の定理1では $\boldsymbol{P}(u,v)$ の ε 変分である $\overline{\boldsymbol{P}}$ の面積 $A(\varepsilon)$ の一階微分係数を考えたが，曲面 S が極小曲面で (u,v) が等温座標系の場合の $A(\varepsilon)$ の二階微分係数を考える．

定理 3. $\overline{\boldsymbol{P}}(\varepsilon)$ の面積 $\displaystyle\iint_{\overline{W}} |\overline{\boldsymbol{P}}(u,v)_u \times \overline{\boldsymbol{P}}(u,v)_v|\, dudv$ を $A(\varepsilon)$ と書くとき

$$\frac{d^2}{d\varepsilon^2}A(\varepsilon)\bigg|_{\varepsilon=0} = \iint_{\overline{W}} (2f^2EK + {f_u}^2 + {f_v}^2)\, dudv$$

が成り立つ．但し $A''(\varepsilon)$ は $A(\varepsilon)$ の ε に関する微分を表す.

[**証明**]. (4) の式から

$$\begin{aligned} &\sqrt{EG - F^2 + \varepsilon\delta_1 + \varepsilon^2\delta_2 + O(\varepsilon^3)} \\ &\quad = \sqrt{\alpha}\left\{1 + \frac{1}{2}(\beta\varepsilon + \gamma\varepsilon^2) - \frac{1}{8}\beta^2\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3)\right\} \end{aligned}$$

であるので，$\varepsilon = 0$ のときの面積 $A(\varepsilon)$ の二階微分は $\alpha = EG - F^2, \beta = \dfrac{\delta_1}{\alpha}, \gamma = \dfrac{\delta_2}{\alpha}$ より

$$\begin{aligned} A''(0) &= \iint_{\overline{W}} \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left\{\delta_2 - \frac{{\delta_1}^2}{4(EG-F^2)}\right\}\, dudv \\ &= \iint_{\overline{W}} \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left\{\delta_2 - \frac{-2f\delta_1(LG+NE-2MF)}{4(EG-F^2)}\right\}\, dudv \\ &= \iint_{\overline{W}} \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}(\delta_2 + f\delta_1 H)\, dudv \end{aligned}$$

となる． $H = 0$ なので $A''(0)$ については $\dfrac{\delta_2}{\sqrt{EG-F^2}}$ の項だけ考えればよい．(u,v) が等温座標系であるとき $E = G, F = 0$ ．さらに曲面 S が極小曲面なので $\Delta\boldsymbol{P} = 0$ であり $\Delta\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{e} = L + N = 0$ より $L = -N$ である．このことから δ_2 は

$$\begin{aligned} \delta_2 &= E(f^2\boldsymbol{e}_u\cdot\boldsymbol{e}_u + {f_v}^2) + G(f^2\boldsymbol{e}_v\cdot\boldsymbol{e}_v + {f_u}^2) - 2F(f^2\boldsymbol{e}_u\cdot\boldsymbol{e}_v + f_uf_v) \\ &\qquad +4f^2(LN - M^2) \\ &= E(f^2\boldsymbol{e}_u\cdot\boldsymbol{e}_u + f^2\boldsymbol{e}_v\cdot\boldsymbol{e}_v + {f_u}^2 + {f_v}^2) - 4f^2(L^2 + M^2) \end{aligned}$$

である．次にこの δ_2 の式を簡単な形にするため $\boldsymbol{e}_u, \boldsymbol{e}_v$ を具体的に計算する．まず $\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{e} = 1$ を u で微分すると $\boldsymbol{e}_u\cdot\boldsymbol{e} = 0$ となるので $\boldsymbol{e}_u$ は $\boldsymbol{e}$ と直交していることがわかり，実数 $A, B \in \mathbb{R}$ によって

$$\boldsymbol{e}_u = A\boldsymbol{P}_u + B\boldsymbol{P}_v$$

と書ける．この式と $\boldsymbol{P}_u, \boldsymbol{P}_v$ の内積を取ると

$$\begin{aligned} -L &= \boldsymbol{P}_u\cdot\boldsymbol{e}_u = EA + FB = EA \\ -M &= \boldsymbol{P}_v\cdot\boldsymbol{e}_u = FA + GB = EB \end{aligned}$$

を得る．この式を A, B について解いて

$$A = -\frac{L}{E}, \quad B = -\frac{M}{E}$$

となる．したがって $\boldsymbol{e}_u$ は

$$\boldsymbol{e}_u = -\frac{1}{E}(L\boldsymbol{P}_u + M\boldsymbol{P}_v)$$

である．同様に $\boldsymbol{e}_v$ についても $\boldsymbol{P}_u, \boldsymbol{P}_v$ で表すことができ

$$\boldsymbol{e}_v = -\frac{1}{E}(M\boldsymbol{P}_u + N\boldsymbol{P}_v)$$

である． $\boldsymbol{e}_u \cdot \boldsymbol{e}_u, \boldsymbol{e}_v \cdot \boldsymbol{e}_v$ を計算すると

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_u \cdot \boldsymbol{e}_u &= \frac{1}{E^2}(L^2\boldsymbol{P}_u \cdot \boldsymbol{P}_u + 2LM\boldsymbol{P}_u \cdot \boldsymbol{P}_v + M^2\boldsymbol{P}_v \cdot \boldsymbol{P}_v) \\
&= \frac{1}{E^2}(L^2E + 2LMF + M^2G) = \frac{L^2 + M^2}{E} \\
\boldsymbol{e}_v \cdot \boldsymbol{e}_v &= \frac{1}{E^2}(M^2\boldsymbol{P}_u \cdot \boldsymbol{P}_u + 2MN\boldsymbol{P}_u \cdot \boldsymbol{P}_v + N^2\boldsymbol{P}_v \cdot \boldsymbol{P}_v) \\
&= \frac{1}{E^2}(M^2E + 2MNF + N^2G) = \frac{M^2 + N^2}{E} = \frac{L^2 + M^2}{E}
\end{aligned}$$

なので δ_2 は

$$\begin{aligned}
\delta_2 &= E(f^2\boldsymbol{e}_u \cdot \boldsymbol{e}_u + f^2\boldsymbol{e}_v \cdot \boldsymbol{e}_v + {f_u}^2 + {f_v}^2) - 4f^2(L^2 + M^2) \\
&= E\left(2f^2\frac{L^2 + M^2}{E} + {f_u}^2 + {f_v}^2\right) - 4f^2(L^2 + M^2) \\
&= -2f^2(L^2 + M^2) + E({f_u}^2 + {f_v}^2)
\end{aligned}$$

となる．ここでガウス曲率 K は等温座標系において

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = -\frac{L^2 + M^2}{E^2}$$

であるので $\delta_2 = -2f^2E^2K + E({f_u}^2 + {f_v}^2)$ より $\varepsilon = 0$ のときの面積 $A(\varepsilon)$ の二階微分は

$$\begin{aligned}
A''(0) &= \iint_{\overline{W}} \frac{\delta_2}{\sqrt{EG - F^2}}\, dudv \\
&= \iint_{\overline{W}} (2f^2EK + {f_u}^2 + {f_v}^2)\, dudv
\end{aligned}$$

となる． $\square$

$\dfrac{L^2 + M^2}{E^2} > 0$ より $K < 0$ であるので $A''(0)$ の符号は $|K|$ が十分小さいときは正に，それ以外のときは負となる．このことと定理 1 から極小曲面の面積は極大値もしくは極小値をとることがわかる．面積が極小であるとき安定というが，安定であるための十分条件は Gauss 写像の像の面積が 2π より小さいことである [小磯, 定理 7.3.3].

4　極小曲面の複素座標表示

4.1　複素関数 $f(w), g(w)$ の定義と条件

極小曲面を調べる際, 複素パラメータを使うと表示がシンプルになり便利である．この章では複素パラメータで表すために複素関数を考える．

曲面 S の実パラメータ表示 $\boldsymbol{P}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ に対し複素パラメータ $w \in \mathbb{C}$ を考え，$w = u + iv$ とおく．複素関数 $\phi_1(w), \phi_2(w), \phi_3(w)$ を次のように決める．

$$\phi_1(w) = x_u - ix_v, \quad \phi_2(w) = y_u - iy_v, \quad \phi_3(w) = z_u - iz_v \tag{7}$$

ここで次の定理 3 を証明するためにコーシー · リーマンの関係式について述べる [神保, 定理 3.4].

定義 7. (コーシー · リーマンの関係式) 複素パラメータ $w \in \mathbb{C}$ を考え，$w = u+iv$ とおく．関数 $\xi(u,v), \eta(u,v) \in \mathbb{R}$ が C^2 級であると仮定すると，複素関数 $f(w) = \xi(u,v) + i\eta(u,v)$ が正則であるための必要十分条件は

$$\xi_u - \eta_v = 0, \quad \xi_v + \eta_u = 0$$

が成り立つことである．

これを用いて次の基本となる定理を証明しよう．

定理 4. 曲面 S のパラメータ表示 $\boldsymbol{P}(u,v)$ に対し $\phi_1(w), \phi_2(w), \phi_3(w)$ を (7) の式により定義する．

- (u,v) が等温座標系であるとき $\phi_1(w)^2 + \phi_2(w)^2 + \phi_3(w)^2 = 0$ が成り立つ．
- $\phi_1(w), \phi_2(w), \phi_3(w)$ が正則であるとき曲面 S は (u,v) を等温座標系とする極小曲面である．

[**証明**]. 以下 (u,v) を等温座標系とする．

- ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 を二乗して足すと

$$\begin{aligned}
{\phi_1}^2 + {\phi_2}^2 + {\phi_3}^2 &= (x_u - ix_v)^2 + (y_u - iy_v)^2 + (z_u - iz_v)^2 \\
&= ({x_u}^2 + {y_u}^2 + {z_u}^2) - ({x_v}^2 + {y_v}^2 + {z_v}^2) \\
&\qquad -2i(x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v) \\
&= E - G - 2iF
\end{aligned}$$

となる．(u,v) が等温座標系なので $E = G, F = 0$ が成り立つ．したがって ${\phi_1}^2 + {\phi_2}^2 + {\phi_3}^2 = 0$ である．逆についての証明は自明である．

- $\phi_1 = x_u - ix_v$ が正則であるとき，コーシー・リーマンの関係式より

$$(x_u)_u - (-x_v)_v = 0, \qquad (x_u)_v + (-x_v)_u = 0 \tag{8}$$

が成り立つ．(8) の最初の式から $\Delta x = 0$ となり ϕ_2, ϕ_3 に対しても同様に
$\Delta y = 0, \Delta z = 0$ を得るので

$$\Delta \boldsymbol{P} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z) = \boldsymbol{0}$$

が成り立つ．定理 2 より曲面 S は極小曲面である．曲面 S が極小曲面であるときは $\Delta \boldsymbol{P} = \boldsymbol{0}$ より $\Delta x = x_{uu} + x_{vv} = 0$ である．(8) の二番目の式は常に成り立っているので ϕ_1 は正則である．ϕ_2, ϕ_3 も同様にして正則であることがわかる．

□

以下極小曲面 S を $w = u + iv$ を用いて $\boldsymbol{P}(w)$ とパラメータ表示することにする．ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 が全て恒等的に 0 になる場合は一点になるので正則曲面にならない．したがって，その場合は除く．

関係式 ${\phi_1}^2 + {\phi_2}^2 + {\phi_3}^2 = 0$ から複素関数の数を 1 つ減らし，2 つの複素関数で極小曲面を表わす.

$$f(w) = \phi_1 - i\phi_2, \qquad g(w) = \frac{\phi_3}{\phi_1 - i\phi_2}$$

とおく．ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 は正則なので $f(w)$ は正則関数, $g(w)$ は有理型関数である．${\phi_1}^2 + {\phi_2}^2 + {\phi_3}^2 = 0$ より

$$\begin{aligned} -{\phi_3}^2 &= {\phi_1}^2 + {\phi_2}^2 = (\phi_1 + i\phi_2)(\phi_1 - i\phi_2) \\ \therefore \phi_1 + i\phi_2 &= -\frac{{\phi_3}^2}{\phi_1 - i\phi_2} = -fg^2 \end{aligned}$$

となり，$\phi_1 + i\phi_2$ は正則なので $-fg^2$ も正則である．したがって g の m 次の極は f の少なくとも $2m$ 次以上の零点である．逆に ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 は f, g を用いて

$$\phi_1 = \frac{1}{2} f(1 - g^2), \qquad \phi_2 = \frac{i}{2} f(1 + g^2), \qquad \phi_3 = fg$$

と表すことができる.

補題 1. 曲面 S の第一基本形式は計算すると

$$\begin{aligned} \mathrm{I} &= \frac{1}{2}(|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2 + |\phi_3|^2) dw d\overline{w} \\ &= \frac{1}{4} |f|^2 (1 + |g|^2)^2 \ dw d\overline{w} \end{aligned} \tag{9}$$

となる． ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 が全て恒等的に 0 にならないので，$|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2 + |\phi_3|^2 > 0$ より g の m 次の極は f のちょうど $2m$ 次の零点となる.

[**証明**]. $f \neq 0 \Longrightarrow g$ は正則で $|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2 + |\phi_3|^2 > 0$
$f = 0 \Longrightarrow \phi_1 = \dfrac{1}{2} f(1-g^2)$ より g が極を持たないと $\phi_1 = 0$ となる．同様に ϕ_2, ϕ_3 も g が極を持たないと $\phi_2, \phi_3 = 0$ である．
$\therefore g$ は極を持つ． g が w_0 で m 次の極を持つとする $(m \geq 1)$.

$$\begin{cases} 2\phi_1(w_0) &= f(w_0) - f(w_0)g(w_0)^2 = -f(w_0)g(w_0)^2 \\ -2i\phi_2(w_0) &= f(w_0) + f(w_0)g(w_0)^2 = f(w_0)g(w_0)^2 \\ \phi_3(w_0) &= f(w_0)g(w_0) = f(w_0)g(w_0)^2 \dfrac{1}{g(w_0)} = 0 \end{cases} \tag{10}$$

(10) の式より $|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2 + |\phi_3|^2 > 0$ が成り立つとき，$f(w_0)g(w_0)^2 \neq 0$ であるので f は $2m+1$ 次以上の零点を持たない． □

4.2 Weierstrass–Enneper の表現公式

定理 5. (Weierstrass–Enneper の表現公式) 極小曲面 S のパラメータ表示を $\boldsymbol{P} = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ をとする．$\boldsymbol{P}$ に対し複素パラメータ $w = u + iv$ をとり，正則関数 $f(w)$ と有利型関数 $g(w)$ を§4.1 のようにとると，曲面 S は w を用いて

$$\boldsymbol{P}(w) - \boldsymbol{P}(w_0) = \left(\mathrm{Re} \int_{w_0}^{w} \frac{1}{2} f(1-g^2)\, dw, \mathrm{Re} \int_{w_0}^{w} \frac{i}{2} f(1+g^2)\, dw, \mathrm{Re} \int_{w_0}^{w} fg\, dw \right)$$

とパラメータ表示できる．

[**証明**]. x 成分について示していく．

$$\begin{aligned} & \mathrm{Re} \int_{w_0}^{w} \phi_1(w)\, dw = \mathrm{Re} \int_{w_0}^{w} x_u - i x_v\ (du + i dv) \\ = \ & \mathrm{Re} \left\{ \int_{w_0}^{w} x_u\, du + \int_{w_0}^{w} x_v\, dv + i \int_{w_0}^{w} x_u\, du - i \int_{w_0}^{w} x_v\, dv \right\} \\ = \ & \int_{w_0}^{w} x_u\, du + \int_{w_0}^{w} x_v\, dv \end{aligned}$$

ここで $w(t) = u(t) + iv(t)$ とおいて $w(\alpha) = w_0, w(\beta) = w$ とすれば上の式は

$$\begin{aligned} & \int_{\alpha}^{\beta} \left\{ x_u(u(t), v(t)) \frac{du}{dt} + x_v(u(t), v(t)) \frac{dv}{dt} \right\} dt \\ = \ & \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx(u(t), v(t))}{dt} dt \\ = \ & x(u(\beta), v(\beta)) - x(u(\alpha), v(\alpha)) \\ = \ & x(w) - x(w_0) \end{aligned}$$

y, z 成分についても同じような計算で示せる． □

5　Weierstrass–Enneper の表現公式を用いた曲面の例

知られている実座標表示の極小曲面を Weierstrass–Enneper の表現公式を用いて複素座標表示する．

5.1　Enneper 曲面

Enneper の曲面は実パラメータ (u, v) によって次の形で知られている [小七, §2.3].

$$\boldsymbol{P}(x, y, z) = \begin{cases} x = 3u + 3uv^2 - u^3 \\ y = v^3 - 3v - 3u^2 v \\ z = 3(u^2 - v^2) \end{cases}$$

この曲面に対して ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 を (5) の式ように決め $w \in \mathbb{C}$, $w = u + iv$ とすると

$$\begin{aligned} \phi_1 &= 3 + 3v^2 - 3u^2 - 6iuv = 3(1 - w^2) \\ \phi_2 &= -6uv - i(3v^2 - 3 - 3u^2) = 3i(1 + w^2) \\ \phi_3 &= 6u + 6iv = 6w \end{aligned}$$

である．ここで $w_0 = 0$ と選ぶと，Enneper の曲面は Weierstrass–Enneper の表現公式で

$$\boldsymbol{P}(w) = \left(\mathrm{Re} \int_{w_0}^{w} 3(1 - w^2)\ dw, \mathrm{Re} \int_{w_0}^{w} 3i(1 - w^2)\ dw, \mathrm{Re} \int_{w_0}^{w} 6w\ dw \right)$$

というように書ける．積分を計算して書き直すと

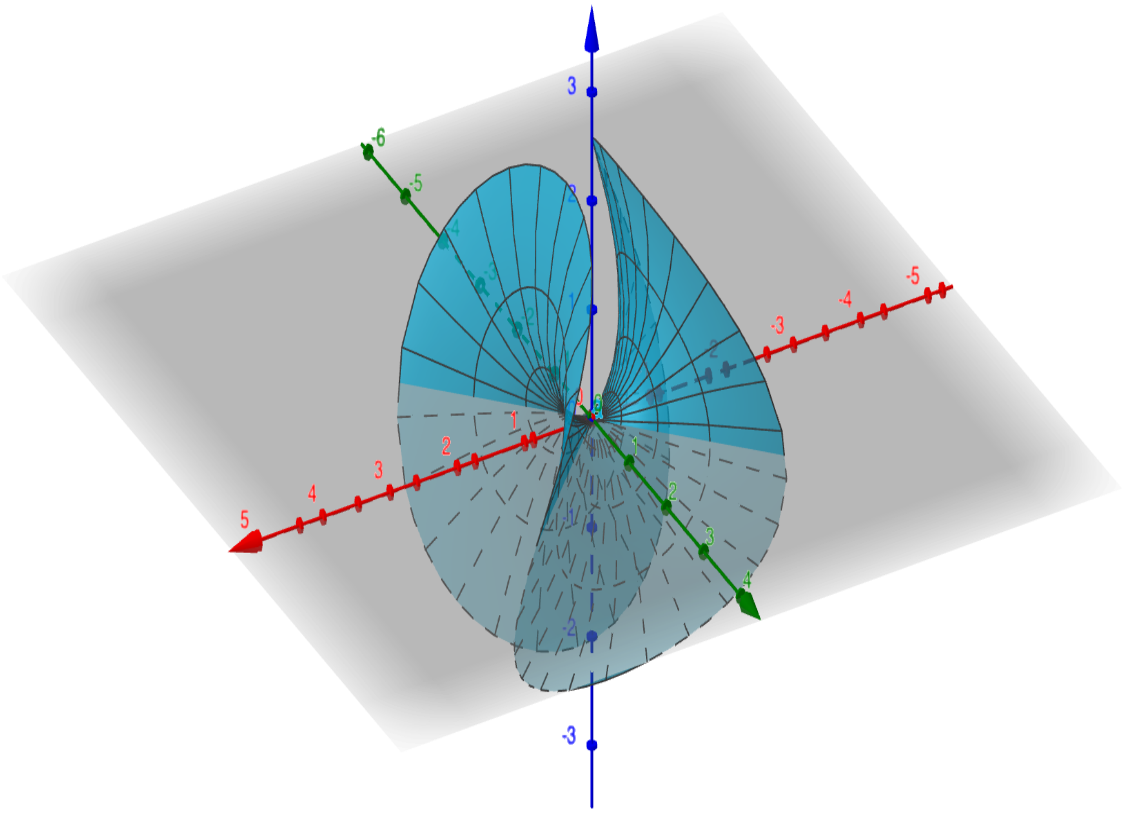
$$\boldsymbol{P}(w) = \big(\mathrm{Re}\ (3w - w^3)\ , \mathrm{Re}\ i(3w + w^3)\ , \mathrm{Re}\ (3w^2)\ \big)$$

x について計算すると

$$\begin{aligned} x &= \mathrm{Re}\ (3w - w^3) = \mathrm{Re}\ \{3(u + iv) - (u + iv)^3\} = \mathrm{Re}\ \left\{ 3u + 3iv - \left(\sum_{=0}^{3} \binom{3}{k} u^k (iv)^{3-k} \right) \right\} \\ &= \mathrm{Re}\ \left(3u + 3iv + iv^3 + 3uv^2 - 3iu^2 v - u^3 \right) = 3u + 3uv^2 - u^3 \end{aligned}$$

となり，元の x と一致する．y, z も計算すると元の y, z と一致する．

図： Enneper 曲面



5.2 Henneberg 曲面

Henneberg 曲面は複素パラメータによって次のように与えられている [剣荻丹, §2.2]. ここでは極小曲面を表す f, g から Weierstrass–Enneper の表現公式を計算して実パラメータを求める.

Henneberg 曲面の f, g が

$$f(w) = 2(1 - w^{-4}), \qquad g(w) = w$$

のように与えられているとする. f, fg, fg^2 は極を持ち $w \neq 0$ のときに正則である. よって $f, fgfg^2$ が正則になる単連結な領域を考えると $w \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}_{\leq 0}, w = e^{\psi + i\theta}$ に対し

$w_0 = 1$ と選べば

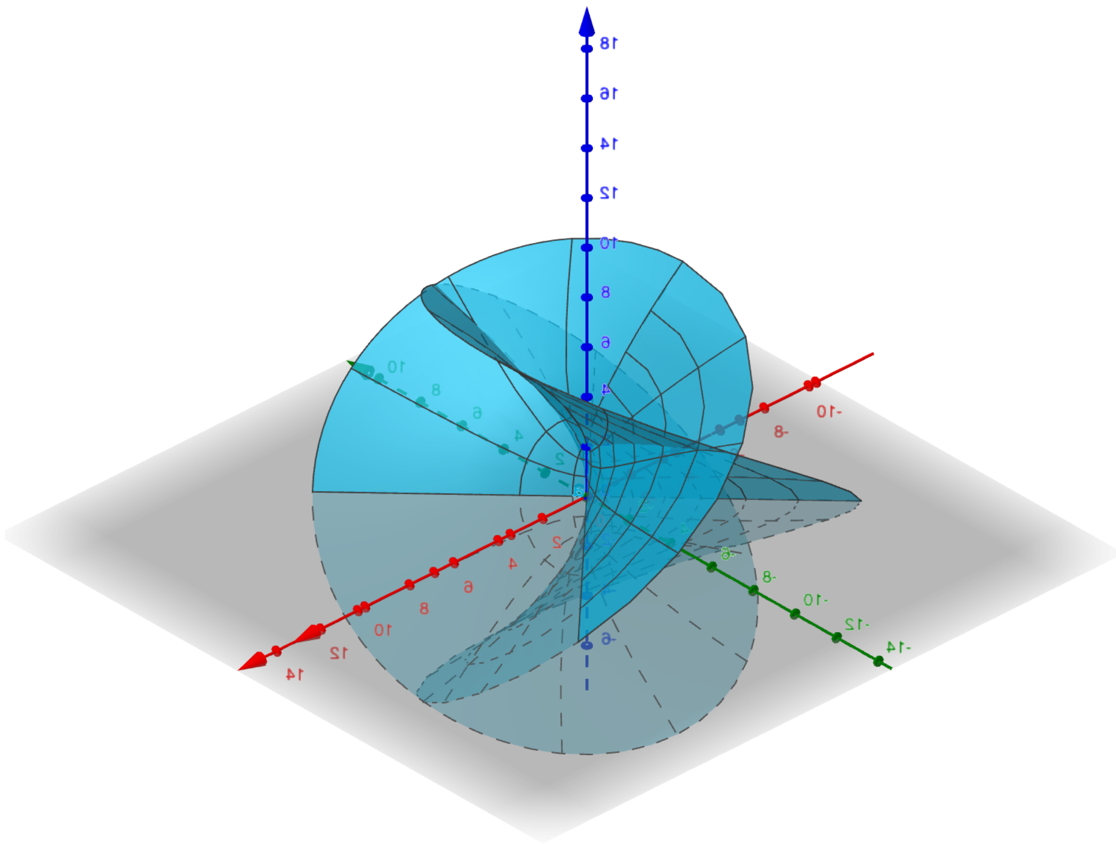
$$\boldsymbol{P}(w) - \boldsymbol{P}(w_0) = \begin{pmatrix} \mathrm{Re} \displaystyle\int_{w_0}^{w} (1 + w^{-2} - w^2 - w^{-4})\ dw \\ \mathrm{Re} \displaystyle\int_{w_0}^{w} i(1 - w^2 + w^2 - w^{-4})\ dw \\ \mathrm{Re} \displaystyle\int_{w_0}^{w} 2(w - w^{-3})\ dw \end{pmatrix}$$

というように書ける．$\boldsymbol{P}(w) - \boldsymbol{P}(w_0)$ の各成分は $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_{\leq 0}$ 上で積分径路によらず一致する．しかし，各成分の被積分関数の留数は 0 なので $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ 上で積分径路を考えればよい．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P}(w) - \boldsymbol{P}(w_0) &= \begin{pmatrix} \mathrm{Re} \displaystyle\int_{w_0}^{w} (1 + w^{-2} - w^2 - w^{-4})\ dw \\ \mathrm{Re} \displaystyle\int_{w_0}^{w} i(1 - w^2 + w^2 - w^{-4})\ dw \\ \mathrm{Re} \displaystyle\int_{w_0}^{w} 2(w - w^{-3})\ dw \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathrm{Re} \left\{ w + w^{-1} - \dfrac{1}{3}(w^3 - w^{-3}) \right\} \\ \mathrm{Re} \left\{ i(w + w^{-1}) + \dfrac{i}{3}(w^3 + w^{-3}) - \dfrac{8}{3} i \right\} \\ \mathrm{Re}(w^2 + w^{-2} - 2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta(e^{\psi} - e^{-\psi}) - \dfrac{1}{3}\cos 3\theta(e^{3\psi} - e^{-3\psi}) \\ -\sin\theta(e^{\psi} - e^{-\psi}) - \dfrac{1}{3}\sin 3\theta(e^{3\psi} - e^{-3\psi}) \\ \cos 2\theta(e^{2\psi} + e^{-2\psi}) - 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2\sinh\psi\cos\theta - \dfrac{2}{3}\sinh 3\psi\cos 3\theta \\ -2\sinh\psi\sin\theta - \dfrac{2}{3}\sinh 3\psi\sin 3\theta \\ 2\cosh 2\psi\cos 2\theta - 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となり，(ψ, θ) を実パラメータとする Henneberg 曲面の表示である．

図： Henneberg 曲面



5.3　パラメータ実数 t を用いた極小曲面族

§5.1 から $f=2, g=w$ のとき Weierstrass–Enneper の表現公式を用いると Enneper 曲面を得られる．これを極小曲面のまま変形することを考える．これは本論文の主要な結果の 1 つである．

実数 $t \in \mathbb{R}$ をパラメータとして f, g を t で変形することで極小曲面を変形できる．このようにして極小曲面族が得られる．

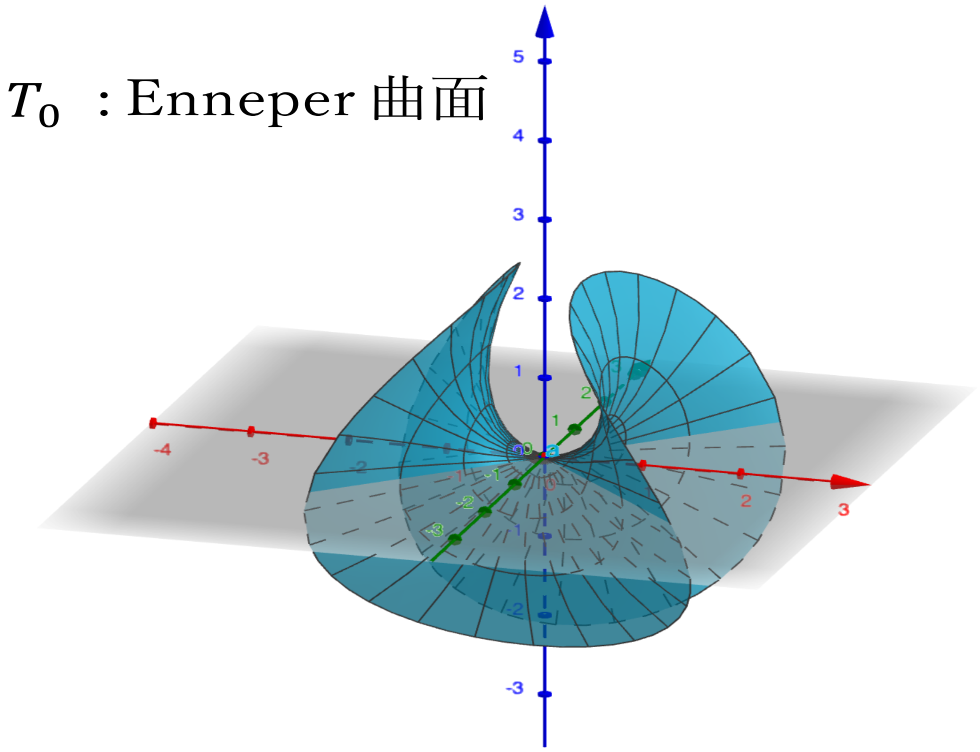
例えば $w \in \mathbb{C}, w = re^{i\theta}$ に対し，

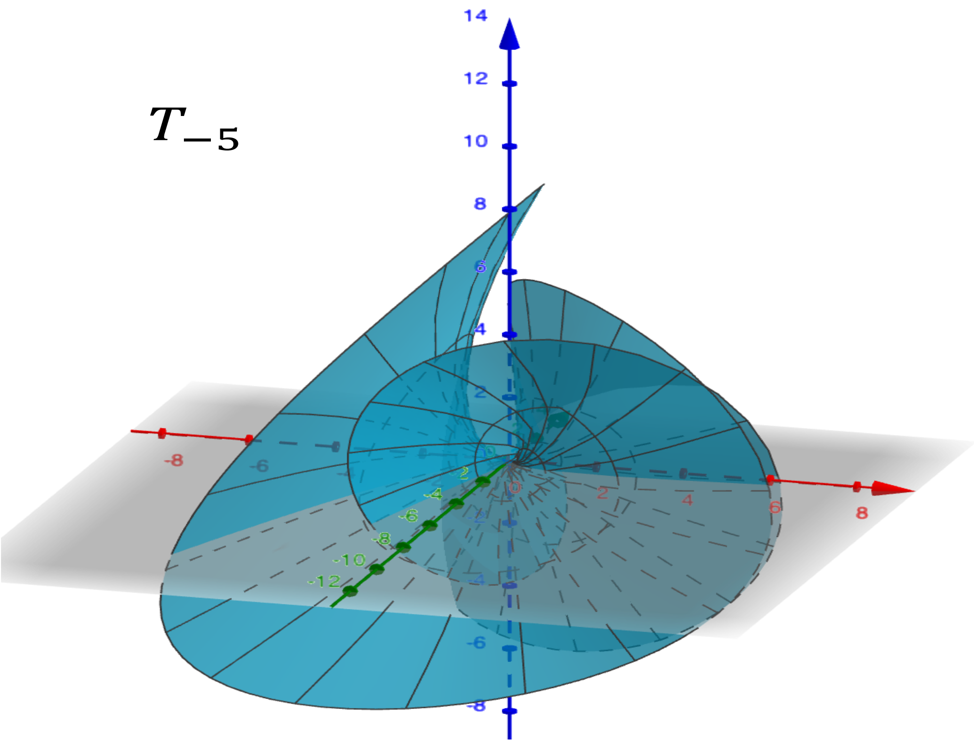
$$f(w) = 2 + tw, \qquad g(w) = w \qquad (t \in \mathbb{R})$$

と決め，$w_0 = 0$ と選べば

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{P}(w)-\boldsymbol{P}(w_0) &= \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\displaystyle\int_{w_0}^{w}\left(1-w^2+\frac{t}{2}w-\frac{t}{2}w^3\right)\,dw \\ \mathrm{Re}\displaystyle\int_{w_0}^{w} i\left(1+w^2+\frac{t}{2}w+\frac{t}{2}w^3\right)\,dw \\ \mathrm{Re}\displaystyle\int_{w_0}^{w}(2w-tw^2)\,dw \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\left(w-\dfrac{1}{3}w^3+\dfrac{t}{4}w^2-\dfrac{t}{8}w^4\right) \\ \mathrm{Re}\left(iw+\dfrac{i}{3}w^3+\dfrac{it}{4}w^2+\dfrac{it}{8}w^4\right) \\ \mathrm{Re}\left(w-\dfrac{t}{3}w^3\right) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} r\cos\theta-\dfrac{r^3}{3}\cos 3\theta+\dfrac{t}{4}r^2\cos 2\theta-\dfrac{t}{8}r^4\cos 4\theta \\ -r\sin\theta-\dfrac{r^3}{3}\sin 3\theta-\dfrac{t}{4}r^2\sin 2\theta-\dfrac{t}{8}r^4\sin 4\theta \\ r^2\cos 2\theta+\dfrac{t}{3}r^3\cos 3\theta \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

という (r,θ) をパラメータとする極小曲面族 T_t の実座標表示となる．





極小曲面 T_t の第一基本形式を計算すると

$$\mathrm{I} = \frac{1}{4}\{(2 + tr\cos\theta)^2 + (tr\sin\theta)^2\}(1 + r^2)^2 \; dw d\overline{w}$$

となる． 極小曲面族 T_t の $D = \{w \in \mathbb{C}; |w| \leq 1\}$ 上での面積を $A(t)$ とすると (9) の式より

$$\begin{aligned} A(t) &= \frac{1}{4}\iint_D |f|^2(1 + |g|^2)^2 dudv \\ &= \frac{1}{4}\iint_D |2 + tw|^2(1 + |w|^2)^2 \; dudv \\ &= \frac{1}{4}\iint_D \{4 + t(2\overline{w} + 2w) + t^2|w|^2\}(1 + |w|^2)^2 \; dudv \end{aligned}$$

であるので $A(t)$ の一階導関数は

$$A'(t) = \frac{1}{4}\iint_D \mathrm{Re}(\overline{w})(1 + |w|^2)^2 \; dudv + \frac{1}{4}\iint_D 2t|w|^2(1 + |w|^2)^2 \; dudv \tag{11}$$

となる．(11) の式の二項目に注目して $A'(t) = 0$ となるとき t は

$$t = \frac{-\displaystyle\iint_D \mathrm{Re}(\overline{w})(1 + |w|^2)^2 \; dudv}{2\displaystyle\iint_D |w|^2(1 + |w|^2)^2 \; dudv} \tag{12}$$

を満たす値である．(12) の式の分子に $\mathrm{Re}(\overline{w})$ があり，$D = \{w \in \mathbb{C}; |w| \leq 1\}$ 上での積分を考えるので $\mathrm{Re}(\overline{w})$ がちょうど打ち消し合うから $A'(t) = 0$ となるとき $t = 0$ となる．$A(t)$ の二階導関数は

$$A''(t) = \frac{1}{2} \iint_D |w|^2 (1 + |w|^2)^2 \; dudv$$

であり，被積分関数は正であるから $A''(t) > 0$ がわかる．したがって，極小曲面族 T_t で $t = 0$ のときの T_0 の単位円板上の面積が極小になり，上の図から T_0 は形がシンプルな極小曲面であることがわかる．

6　まとめ

6.1　将来の展望

本論文では極小曲面を複素関数 f, g から Weierstrass–Enneper の表現公式を用いて実パラメータで表した．それを利用して f, g を変形して得られた極小曲面族を実パラメータで表すところまでできた．今後は，このような変形で第一基本形式がどう変化するかを考える．またガウス曲率を計算し，第一基本形式にどのように関係しているのかを研究する．

6.2　卒業研究発表会での質問内容

- 面積が極大値をとる極小曲面の具体例はあるのか.(中山先生)
  [考察][小磯, 例 7.3.1]

- 極小曲面族 T_t についてガウス曲率は求めたか.(増田先生)
  [考察] 時間が足りずガウス曲率を計算することはできなかった．ガウス曲率は E, F, G を用いて表すことができるので第一基本形式との関係性を今後研究する．

6.3　謝辞

お忙しい中，１年間丁寧にご指導してくださった西山先生に御礼申し上げます．多忙である中，何度も相談や添削をしてくださり心より感謝いたします．研究が進まないとき，相談に乗っていただいた松田先生にも大変感謝いたします．また，卒業研究発表の場で助言をいただいた増田先生，中山先生にも深く感謝いたします．そして，一年間を共に過ごした西山研究室の秦くん，中川くんに感謝いたします．

7　参考文献

参考文献

[小七] 小林昭七:『曲線と曲面の微分幾何』, 裳華房，1977.

[川藤] 川上裕・藤原祥一:『極小曲面論入門 その幾何学的性質を探る』, サイエンス社, 2019.

[小真] 小林真平: 『曲面とベクトル解析』，日本評論社，2016.

[川崎] 川崎徹朗: 『曲面と多様体』，朝倉書店，2001.

[剣荻丹] 剣持勝衛 · 荻上紘一 · 丹野修吉:『Rports on Global Analysis IV Minimal Surfases (1) -極小曲面論の微分幾何的側面-』, 1982.

[神保] 神保道夫: 『複素関数入門』，岩波書店，2013.

[小磯] 小磯深幸:『曲面の変分問題-極小曲面論入門』. (https://www.jst.go.jp/crest/math/ja/suugakujuku/archive/text/3_Koiso_text.pdf)

[Geo] GeoGebra(https://www.geogebra.org).

[Wol] WolframAlpha 人工知能 (https://www.wolframalpha.com).