

# グラフに関する組み合わせ論

青山学院大学 理工学部 物理・数理学科

学籍番号:15117083 中川和樹

指導教員 西山 享

2021年2月19日

# 目次

<b>1</b>	<b>序論</b>	<b>4</b>
1.1	研究の背景	4
1.2	研究の主結果	4
1.3	本論文の構成	6
<b>2</b>	<b>全射, 単射, 全単射</b>	<b>6</b>
<b>3</b>	<b>グラフ</b>	<b>7</b>
<b>4</b>	<b>グラフの頂点探索法</b>	<b>8</b>
4.1	深さ優先探索	8
4.2	幅優先探索	9
<b>5</b>	<b>Catalan 数と数字括弧列</b>	<b>9</b>
5.1	Catalan 数	9
5.2	数字括弧列と Catalan 数	12
<b>6</b>	<b>二分木と数字括弧列の全単射対応</b>	<b>12</b>
6.1	二分木の集合 $\mathcal{T}_n$ から数字括弧列の集合 $W_n$ への写像	12
6.2	数字括弧列の集合 $W_n$ から二分木の集合 $\mathcal{T}_n$ への写像	13
6.3	写像 $P$ が全単射であることの証明	13
<b>7</b>	<b>数列と Catalan 数</b>	<b>14</b>
7.1	二分木の集合 $\mathcal{T}_n$ から数列の集合 $A_{4n-2}$ への写像	14
7.2	数列の集合 $A_{4n-2}$ から二分木の集合 $\mathcal{T}_n$ への写像	16
7.3	写像 $S$ が全単射であることの証明	16
7.4	数列と Catalan 数	17
<b>8</b>	<b>ヤング図形と Catalan 数</b>	<b>19</b>
8.1	ヤング図形の定義	19
8.2	数列の集合 $A_{4n-2}$ からヤング図形の集合 $\Lambda_n$ への写像	20
8.3	ヤング図形の集合 $\Lambda_n$ から数列の集合 $A_{4n-2}$ への写像	21
8.4	写像 $K$ が全単射であることの証明	21
8.5	ヤング図形と Catalan 数	21
<b>9</b>	<b>まとめ</b>	<b>23</b>
9.1	研究成果	23
9.2	卒業研究発表会での質問内容について	24
9.3	今後の課題	24



# 1 序論

## 1.1 研究の背景

4年生の前期からグラフの頂点探索について勉強し、グラフの中に木と呼ばれる特別なグラフがあるということを知った。さらに“木”と数列 [牧野, §2.4], 数列とヤング図形 [講義] が対応する事も勉強した。私が本研究を始めた動機は木の中でもさらに特別な二分木と呼ばれるグラフでは個数が明確にわかり、その個数が Catalan 数になるということ、従って二分木に対応する数列、ヤング図形の個数も Catalan 数で与えられるという事実に興味を持ったからである。

## 1.2 研究の主結果

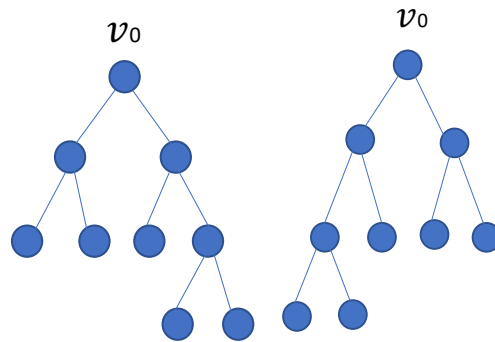
本研究の主結果は次の3つの集合が全単射対応していることである。

- (1)  $(2n - 1)$  頂点の二分木の集合  $\mathcal{T}_n$
- (2)  $0, 1$  で構成される長さ  $(4n - 2)$  である数列の部分集合  $A_{4n-2}$
- (3)  $(2n - 1) \times (2n - 1)$  の長方形内のヤング図形の部分集合  $\Lambda_n$

ここで木とは閉路を持たない連結なグラフであって、 $(2n - 1)$  頂点の二分木は木であり、次の条件を満たすものである。

- 葉が  $n$  個あり、根と呼ばれる  $\deg(v_0) = 2$  (次数 2) の頂点  $v_0$  が唯一つ存在し、 $v_0$  を除く頂点  $v$  の次数は  $\deg(v) = 1$  または 3 である。

ここで  $(2n - 1)$  頂点の二分木の集合を  $\mathcal{T}_n$  で表わす。例えば、次の図は 9 頂点の二分木の例である。この2つは鏡像になっているが、この論文では別の二分木とみなす。



(2) の“数列”は 0 と 1 の列  $a = (a_1, a_2, \dots, a_{4n-2})$  であって、以下のような特徴を持つものを考える。

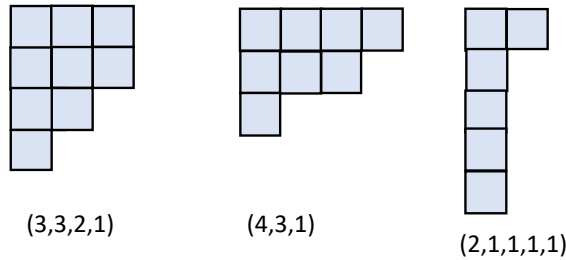
- 数列  $a$  に現れる 0 の個数は  $(n - 1)$  個、1 の個数は  $(n - 1)$  個、01 の個数は  $n$  個である。

- 最後尾, 101 を除き, 01 の後は 1 である. (又, 111 は現れない.)

- $$\begin{cases} Z_k(a) = \#\{i | 1 \leq i \leq k, a_i = 0\} & (k = 1, 2, 3, \dots) \\ O_k(a) = \#\{i | 1 \leq i \leq k, a_i = 1\} \end{cases}$$
 とおくと,  $T_k(b) \leq Z_k(b)$  が成り立つ.

このような数列の全体を  $A_{4n-2}$  で表わす. 主結果の最初のものは二分木の集合  $\mathcal{T}_n$  と数列の集合  $A_{4n-2}$  が全単射対応していることである. (定理 7.1)

次に (3) のヤング図形について説明する. **ヤング図形**とは同じ大きさの箱を上詰め, 左詰めで並べて表す次のような図式のことである.



このヤング図形は自然数の分割と対応している. 例えば, 上のヤング図形は

$$9 = 3 + 3 + 2 + 1, \quad 8 = 4 + 3 + 1, \quad 6 = 2 + 1 + 1 + 1 + 1$$

に対応している.

ヤング図形を分割で表わして  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l)$  と書くとき, 以下のような特徴を持つような図形を考え, その全体を  $\Lambda_n$  で表わす. 但し  $l$  は  $\lambda$  の長さである.

- $n - 1 \leq l \leq 2n - 3$
- $\lambda_i \in 2\mathbb{N} \ (1 \leq i \leq l)$
- $\lambda_i \leq 2n - 1 - i$
- $\{2, 4, \dots, 2n - 2\} \subset \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l\}$

定理 8.1 では数列の集合  $A_{4n-2}$  とヤング図形の集合  $\Lambda_n$  が全単射対応していることを証明する. このようにして, 3つの集合  $\mathcal{T}_n, A_{4n-2}, \Lambda_n$  は全単射対応していることを示すことができる. またこれらは全単射対応しているので, すべて個数が同じであり, その個数は Catalan 数と呼ばれる数であり,  $C_{n-1}$  で表わされる. §5 では Catalan 数の性質を説明し, 別の方法でも 2つの集合  $A_{4n-2}, \Lambda_n$  の個数が Catalan 数になっていることを証明する.

## 1.3 本論文の構成

§2では、集合論の基礎である全射、単射、全単射について説明する。

§3では、グラフに関する基本用語や木および二分木の定義について説明する。

§4では、グラフの頂点探索法について説明する。

§5では、Catalan数について説明する。また数列  $1 \cdots n$  に  $(n-1)$  組の括弧をつけた数字括弧列の集合を  $W_n$  とし、 $W_n$  の個数が Catalan 数であることを示す。

§6では、 $(2n-1)$  頂点の二分木の集合  $\mathcal{T}_n$  の個数が Catalan 数であることを  $(2n-1)$  頂点の二分木の集合  $\mathcal{T}_n$  と  $1 \cdots n$  の数列に  $(n-1)$  組の括弧をつけた数字括弧列の集合  $W_n$  が全単射対応していることから説明する。

§7では、 $(2n-1)$  頂点の二分木の集合  $\mathcal{T}_n$  と  $0, 1$  で構成される長さ  $(4n-2)$  である数列の部分集合  $A_{4n-2}$  の全単射対応について示す。また数列  $a \in A_{4n-2}$  の特徴を用いて、個数が Catalan 数であることを直接示す。

§8では、数列の集合  $A_{4n-2}$  と  $(2n-1) \times (2n-1)$  の正方形内のヤング図形の部分集合  $\Lambda_n$  の全単射対応について示す。またヤング図形  $\lambda \in \Lambda_n$  の特徴を用いて、個数が Catalan 数であることを直接示す。

## 2 全射、単射、全単射

この章では、後の章で必要になるので集合論の基礎である単射、全射、全単射について説明する。この章の定義は教科書 [内田, §6] より引用した。さらに詳しいことは [内田] を参照してほしい。以下、 $A, B$  は集合とする。

**定義 2.1** (単射). 写像  $f: A \rightarrow B$  を考える。  $f$  が**単射**であるとは、  $a_1, a_2 \in A$  に対して  $a_1 \neq a_2$  ならば  $f(a_1) \neq f(a_2)$  が成り立つことである。

**定義 2.2** (全射). 写像  $f: A \rightarrow B$  を考える。  $f$  が**全射**であるとは、任意の  $b \in B$  に対して  $b = f(a)$  となる  $a \in A$  が常に存在することである。

**定義 2.3** (全単射). 写像  $f$  が全射かつ単射であるとき  $f$  を**全単射**という。

**定義 2.4.**  $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow A$  を2つの写像とする。また**恒等写像**を  $1_A: A \rightarrow A$  と書くことにする。このとき  $f \circ g = 1_B, g \circ f = 1_A$  が成り立つならば  $f$  と  $g$  は互いに**逆写像**であるといい、  $g = f^{-1}$  と表す。

**定理 2.1.**  $f$  が全単射であることと逆写像  $g = f^{-1}$  を持つことは同値である。

[証明].  $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow A$  を2つの写像とする。

( $\Rightarrow$  の証明)  $f$  は全単射である。特に  $f$  は全射であるので、任意の  $b \in B$  に対し  $b = f(a)$  となる  $a \in A$  が常に存在する。また  $f$  は単射であるので、  $b = f(a)$  となる  $a$  は1つに決まる。以上より、  $b \in B$  に対し  $b = f(a)$  となる元  $a \in A$  を対応させることによって集合  $B$  から集合  $A$  への写像が定まり、逆写像  $f^{-1}: B \rightarrow A$  となることが証明できる。よって、逆写像が存在する。

( $\Leftarrow$  の証明)  $f$  と  $g$  は互いに逆写像であるので,  $f \circ g = 1_B, g \circ f = 1_A$  である.  $\forall b \in B$  に対し  $a = g(b)$  とおけば

$$f(a) = f(g(b)) = (f \circ g)(b) = b$$

となる. よって,  $f$  は全射である.

次に  $a_1, a_2 \in A$  について  $f(a_1) = f(a_2)$  であるとすれば

$$a_1 = (g \circ f)(a_1) = g(f(a_1)) = g(f(a_2)) = (g \circ f)(a_2) = a_2$$

となる. よって,  $f$  は単射である. 以上より,  $f$  は全単射である.  $\square$

### 3 グラフ

この章では, グラフの基本用語について述べたあと, 木および二分木の定義について説明する. より詳しくは [牧野] を参照してほしい.

**グラフ**  $G$  とは, 有限個の頂点の集まりである頂点集合  $V$  と 2 頂点を結ぶ辺の集合  $E \subset V \times V$  を合わせて考えるもので,  $G = (V, E)$  と表す. この論文では無向グラフのみを考えることにする.

次にグラフに関する基本的な用語を列挙する.

- **路** ... 頂点と辺の交互列  $v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, v_{k-1}, e_k, v_k$  ( $v_k \in V, e_k \in E$ ) であり, 辺  $e_i$  の端点が頂点  $v_{i-1}$  と  $v_i$  である.
- **サーキット** ...  $v_0 = v_k$  (始点と終点が一致する) であって, この 2 つの頂点を除くと, すべての頂点が相異なるような路

$$v_0 (= v_k), e_1, v_1, e_2, \dots, e_{k-1}, v_{k-1}, e_k, v_k$$

である.

- **次数** ... ある頂点  $v$  を端点とする辺の本数を頂点  $v$  の次数といい,  $\deg(v)$  と書く.
- **連結** ... グラフ  $G = (V, E)$  において, 任意の 2 つの頂点  $v, w \in V$  の間に始点が  $v$ , 終点が  $w$  である路 ( $v-w$  路) が存在することである.
- **葉** ... 次数 1 の頂点.

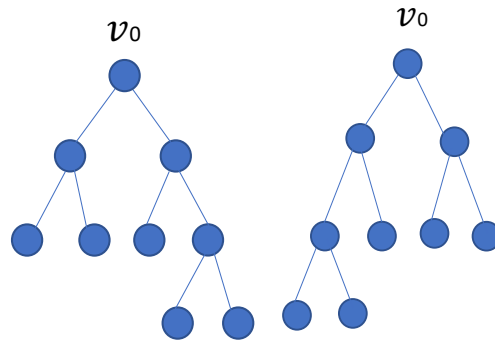
**定義 3.1 (木).** 木とはサーキットを持たない連結なグラフである. ラベル付き木とは木の頂点に数字 (ラベル) をつけたグラフである.

**定義 3.2 (二分木).** 二分木は木であり, かつ次の条件を満たすものである.

- 葉が  $n$  個あり, 頂点数が  $(2n - 1)$  個である.

- 根と呼ばれる次数が  $\deg(v_0) = 2$  の頂点  $v_0$  が唯一つ存在する.
- $v_0$  を除く頂点  $v$  の次数は  $\deg(v) = 1$  または  $3$  である.

この論文では、二分木は枝の左右を区別して考える。例えば、以下のような2つの二分木は別のグラフである。



## 4 グラフの頂点探索法

この章では、グラフ  $G$  の2種類の頂点探索法について説明する。この章では、 $G = (V, E)$  を一般のグラフとする。

### 4.1 深さ優先探索

深さ優先探索では以下のルールに従って探索を行う。始点  $s \in V$  に接続する辺  $e = (s, w) \in E$  を任意に選び、その辺に沿って、頂点  $w \in V$  を訪問し、 $w$  からさらに探索を続ける。このとき訪問順に頂点にラベル  $(1, 2, 3, \dots)$  を付ける。このとき訪問した任意の頂点  $v \in V$  にいるとする。このとき2種類の状況がある。

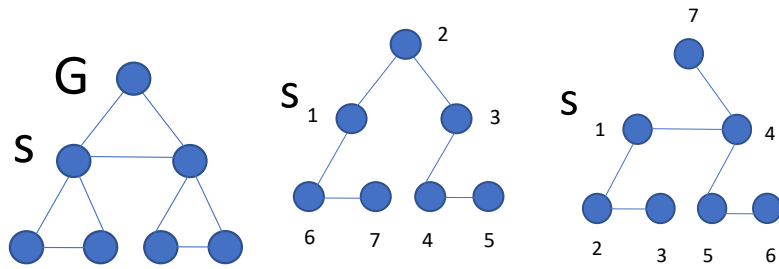
1.  $v$  に接続する辺で訪問していない頂点を終点に持つ辺が存在する。
2.  $v$  に接続する辺の終点がすべて訪問済みである。

1の場合、訪問していない頂点を終点に持つ辺  $e = (v, u) \in E$  を任意の一つ選び、その辺をたどり、頂点  $u \in V$  を訪問する。そして頂点  $u$  からさらに探索を続ける。

2の場合、頂点  $v$  から1つ前の頂点に戻り、その頂点から同様に探索を続ける。このような操作を続け、頂点  $s$  に戻り、2の条件を満たすとき探索を終了する。

例えば、下の図は深さ優先探索の2つの例である。左のグラフは探索に使用するグラフ  $G$  である。





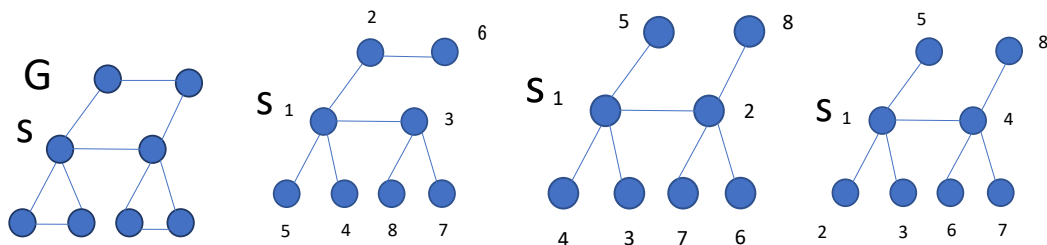
後の §7 で出てくる二分木の頂点を辿る順序は深さ優先探索に条件を加えたものである。

## 4.2 幅優先探索

幅優先探索では以下のルールに従って探索を行う。

1. まず始点  $s$  に接続している辺をすべて辿り、頂点を順に訪問する。このとき訪問順に頂点にラベル  $(1, 2, 3, \dots)$  を付ける。
2. 次にこれまでに訪問した未探索な頂点の中で訪問順が最も小さい頂点を  $v$  とし、頂点  $v$  から同様に探索する。以下この操作を繰り返す。

例えば、下の図は幅優先探索の 3 つの例である。左のグラフは探索に使用するグラフ  $G$  である。



## 5 Catalan 数と数字括弧列

この章では、まず Catalan 数について説明する。そして数列  $1 \dots n$  に  $(n-1)$  組の括弧をつけた数字括弧列の集合を  $W_n$  とし、 $W_n$  の個数が Catalan 数であることを説明する。

### 5.1 Catalan 数

この節では、Catalan 数について説明する。

**定理 5.1.** 漸化式

$$\begin{aligned} C_n &= C_{n-1}C_0 + C_{n-2}C_1 + \cdots + C_1C_{n-2} + C_0C_{n-1} \quad (n \geq 2) \\ C_0 &= 1, C_1 = 1 \end{aligned}$$

を満たす数列は唯一つに決まり、それは

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} \quad (n \geq 0)$$

で与えられる. この  $C_n$  を **Catalan 数** と呼ぶ.

まず証明の前に定義を一つ準備する.

**定義 5.1** (母関数). 数列  $(a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)$  に対して, 形式的に冪級数  $A(x)$  を考える.

$$A(x) = a_0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots$$

この  $A(x)$  を数列  $(a_n)$  の **母関数** という.

定理 5.1 の証明は [仙波, §6.2] を参考にして行う.

[証明]. 母関数を用いて, Catalan 数の母関数  $F(x)$  を次のように決める.

$$F(x) = C_0 + C_1x + \cdots + C_nx^n + \cdots$$

すると,  $F(x)^2$  は次のように計算できる.

$$\begin{aligned} F(x)^2 &= C_0C_0 + (C_0C_1 + C_1C_0)x + (C_0C_2 + C_1C_1 + C_2C_0)x^2 + \cdots \\ &\quad \cdots + (C_0C_{n-1} + C_1C_{n-2} + \cdots + C_{n-1}C_0)x^n \\ &= \frac{1}{x} \sum_{n=2}^{\infty} (C_{n-1}C_0 + \cdots + C_0C_{n-1})x^n + C_0^2 \end{aligned} \tag{1}$$

また Catalan 数の漸化式より

$$F(x) - C_0 - C_1x = \sum_{n=2}^{\infty} C_nx^n = \sum_{n=2}^{\infty} (C_{n-1}C_0 + \cdots + C_0C_{n-1})x^n \tag{2}$$

が成り立つ. このとき, (1) と (2) より

$$F(x) - C_0 - C_1x = x(F(x)^2 - C_0^2)$$

ここで  $C_0 = 1, C_1 = 1$  であることより

$$xF(x)^2 - F(x) + 1 = 0 \tag{3}$$

が成り立つ。(3)を解くと,

$$F(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}$$

となる. ここで  $F(x) = \frac{1 + \sqrt{1-4x}}{2x}$  のときは

$$\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sqrt{1-4x}}{2x} = \infty$$

となるので不適であるが,  $F(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}$  のときは

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} F(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \sqrt{1-4x})(1 + \sqrt{1-4x})}{2x(1 + \sqrt{1-4x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{2x(1 + \sqrt{1-4x})} = 1 \end{aligned}$$

となって  $F(0) = C_0 = 1$  を満たす. 従って,  $F(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}$  である.

ここで  $F(x)$  を一般二項係数を用いて, 冪級数展開すると,

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2x} \left\{ 1 - 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2) \cdots (\frac{1}{2}-n+1)}{n!} (-4)^n x^n \right\} \\ &= -\frac{1}{2x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{2^n} 1(-3)(-5) \cdots (-2n+3)(-4)^n x^n \\ &= \frac{1}{2x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3) 2^n x^n \\ &= \frac{1}{2x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-3)}{(n-1)!} \frac{(n-1)! 2^{n-1}}{(n-1)!} x^n \\ &= \frac{1}{2x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \binom{2n-2}{n-1} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1} x^{n-1} \\ &= 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1} x^{n-1} \end{aligned}$$

$n-1$  の代わりに  $n$  を考えると,

$$F(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} x^n \quad \therefore C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

となることがわかる. □

## 5.2 数字括弧列と Catalan 数

数列  $1 \cdots n$  に  $(n-1)$  組の括弧をつけた数字括弧列の集合を  $W_n$  と書く. このとき  $W_n$  の括弧は 2 組の数字または数字括弧列を括弧括弧しているものとする. 例えば, 以下の数字括弧列は  $n=5$  のときの例である.

$$(1((23)(45))), \quad (((12)3)(45)), \quad (((12)(34))5)$$

しかし  $(1)(2)(34)$  や  $((123)(4))$  などは許されない. (2 組のものを括弧で括弧していない.)

次に  $W_n$  の個数が  $C_{n-1} = \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1}$  であることを示す.  $\#W_n$  は集合  $W_n$  の元の個数を表す.

**定理 5.2.**  $\#W_n = C_{n-1}$  である.

[証明].  $\#W_n = f_n$  において,  $f_n$  と  $C_{n-1}$  が一致することを示そう. 数列  $123 \cdots n$  を  $1 \cdots i$  と  $(i+1) \cdots n$  の部分に分けてそれぞれの括弧の付け方を考えると, 括弧の付け方は  $f_i \times f_{n-i}$  となる. ここで  $W_1$  において, 1つの数字に 0 組の括弧がついていると考え,  $\#W_1 = 1$  とする. したがって  $f_1 = 1, f_2 = 1$  なので, 次の Catalan 数の漸化式が成り立つ.

$$f_n = f_1 f_{n-1} + f_2 f_{n-2} + \cdots + f_i f_{n-i} + \cdots + f_{n-1} f_1 \quad (n \geq 3)$$

この漸化式を解くと  $f_n = C_{n-1}$  となる (定理 5.1). よって,  $\#W_n = C_{n-1}$  ( $n \geq 1$ ) であることがわかった.

□

## 6 二分木と数字括弧列の全単射対応

$(2n-1)$  頂点の二分木の集合を  $\mathcal{T}_n$  と書く. この章では,  $(2n-1)$  頂点の二分木の集合  $\mathcal{T}_n$  と数列  $1 \cdots n$  に  $(n-1)$  組の括弧をつけた数字括弧列の集合  $W_n$  が全単射対応していることを示す.

### 6.1 二分木の集合 $\mathcal{T}_n$ から数字括弧列の集合 $W_n$ への写像

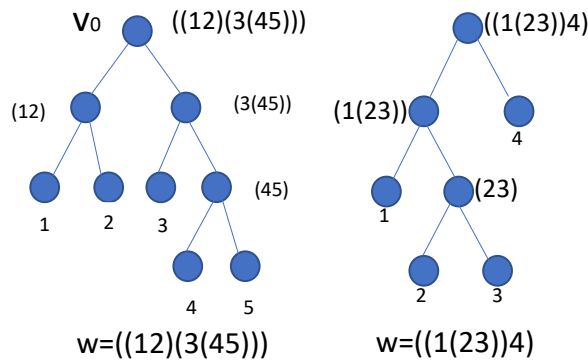
二分木の集合  $\mathcal{T}_n$  から数字括弧列の集合  $W_n$  への写像  $P$  を構成する.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T}_n & \xrightarrow{P} & W_n \\ \cup & & \cup \\ \mathcal{T}_n & \longmapsto & w \end{array}$$

—————  $P(T_n) = w$  の構成アルゴリズム —————

- Step1** 二分木の葉に左から  $1, \dots, n$  のラベル付けを行う。
- Step2** 二分木は1つの頂点 (親) の下に2つの頂点 (子) がある。子のラベルが左から  $(\alpha), (\beta)$  ならば, 親のラベルは  $((\alpha)(\beta))$  となる。
- Step3** ラベル付けの操作を根まで行う。この時の根のラベルが  $w$  である。

例えば, 下の図は 9, 7 頂点の二分木から数字括弧列への変換の例である。



## 6.2 数字括弧列の集合 $W_n$ から二分木の集合 $\mathcal{T}_n$ への写像

次に数字括弧列の集合  $W_n$  から二分木の集合  $\mathcal{T}_n$  への写像  $Q$  を構成する。

$$\begin{array}{ccc} W_n & \xrightarrow{Q} & \mathcal{T}_n \\ \Psi & & \Psi \\ w & \longmapsto & T_n \end{array}$$

—————  $Q(w) = T_n$  の構成アルゴリズム —————

- Step1** グラフの根を作り,  $w$  をラベル付けする。
- Step2** 頂点の親から子へ2組の数字括弧列  $w = ((\alpha)(\beta))$  を二つの子に左から  $(\alpha), (\beta)$  とラベル付けし, 辺と頂点を配置する。
- Step3** 頂点のラベルが数字だけになるまでこの操作を行う。

## 6.3 写像 $P$ が全単射であることの証明

**定理 6.1.** 写像  $Q$  は写像  $P$  の逆写像である。従って,  $P: \mathcal{T}_n \rightarrow W_n$  は全単射である。

[証明]. 写像  $Q$  で行われている操作は  $(n-1)$  回数字括弧列の外側の括弧を 1 組取り去り, 2 組に分け, 左と右にラベル付けした頂点を配置するものである. この操作は写像  $P$  で行われている操作と逆のことを行なっていて, 行う操作は  $(n-1)$  回で同じ回数であり, ラベル付けの左右も変わっていない. よって, 写像  $Q$  は写像  $P$  の逆写像である.  $\square$

系 6.1.  $\#\mathcal{T}_n = C_{n-1}$

[証明]. 定理 6.1 より,  $1 \cdots n$  の数列に  $(n-1)$  組の括弧をつけた数字括弧列の集合  $W_n$  と  $(2n-1)$  頂点の二分木の集合  $\mathcal{T}_n$  は全単射対応している. また  $\#W_n = C_{n-1}$  であることより,  $(2n-1)$  頂点の二分木の集合  $\mathcal{T}_n$  の個数は Catalan 数  $C_{n-1}$  である. 以上より, 系 6.1 を示せた.  $\square$

## 7 数列と Catalan 数

$0, 1$  で構成された長さ  $(4n-2)$  である数列の部分集合を  $A_{4n-2}$  と書く. この章では,  $(2n-1)$  頂点の二分木の集合  $\mathcal{T}_n$  と  $0, 1$  で構成された長さ  $(4n-2)$  である数列の部分集合  $A_{4n-2}$  が全単射対応していることを示し, また数列  $a \in A_{4n-2}$  の特徴を用いて, 個数が Catalan 数  $C_{n-1}$  であることを直接示す.

### 7.1 二分木の集合 $\mathcal{T}_n$ から数列の集合 $A_{4n-2}$ への写像

この節では, 二分木の集合  $\mathcal{T}_n$  から数列の集合  $A_{4n-2}$  への写像を示す. そのためにまず二分木の頂点を辿る順序について説明する.

二分木の頂点を辿る順序

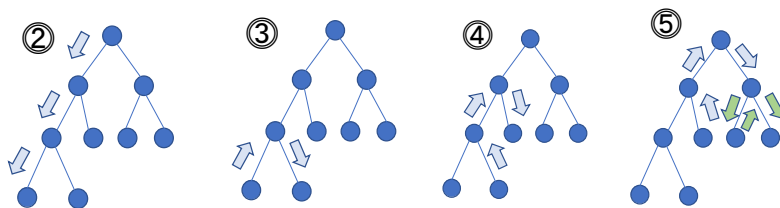
Step1 根を訪れる.

Step2 左の部分木を葉にたどりつくまで辿る.

Step3 葉の 1 つ前の頂点の右の部分木を辿る.

Step4 Step3 で右の部分木を訪問済みであれば, さらに 1 つ前に戻り, 右の部分木を辿る. 右の部分木が訪問済みであれば, この操作を繰り返す.

下の図は番号に合わせた操作である. 5 は繰り返した後の図である.



次に二分木の集合  $\mathcal{T}_n$  から数列の集合  $A_{4n-2}$  への写像  $S$  を構成する.

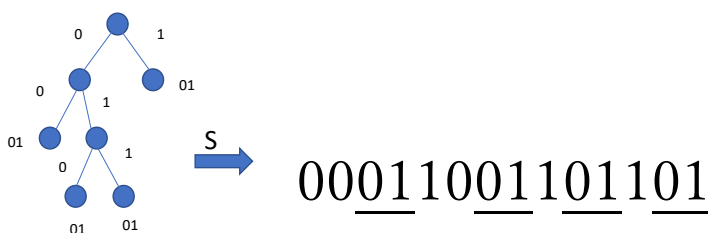
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T}_n & \xrightarrow{S} & A_{4n-2} \\ \cup & & \cup \\ \mathcal{T}_n & \mapsto & a \end{array}$$

—  $S(\mathcal{T}_n) = a$  の構成アルゴリズム —

二分木において、頂点を辿る順序に従い、以下のように数列を作成する.

- 頂点から左に辺を辿るならば、0 とする.
- 頂点から右に辺を辿るならば、1 とする.
- 訪問した頂点が葉ならば、01 とする.

例えば、下の図は 7 頂点の二分木から長さ 14 の数列への変換である.



このとき、写像  $P$  により作られた二分木と対応する数列  $a \in A_{4n-2}$  は以下の性質を持つ.

1. 葉は  $n$  個であることより 01 の組は  $n$  個出てくる. また葉以外の頂点は  $(n-1)$  個あり、その頂点は左右に辺を出している. よって左に  $(n-1)$  回、右に  $(n-1)$  回辿れるので 0 と 1 は  $(n-1)$  個出てくる.
2. 二分木の最後は右に辿り、葉で終わるので数列の最後尾は 101 となる. また二分木の頂点を辿る順序より、葉の後は右に辿るので 01 の後は 1 である.
3. 二分木の頂点を辿る順序により、左に辿る回数が右に辿る回数以上であるので、数列のどの場所においても、0 の個数が 1 の個数以上になる.

これをまとめると、数列  $a \in A_{4n-2}$  の特徴は次のように表される. 数列を  $a = (a_1, a_2, \dots, a_{4n-2})$  とする.

1. 数列に現れる 0 の個数は  $n-1$  個、1 の個数は  $n-1$  個、01 の個数は  $n$  個である.
2. 最後尾 101 を除き、01 の後は 1 である. 又 1,1,1 は現れない.
3. 
$$\begin{cases} Z_k(a) = \#\{i | 1 \leq i \leq k, a_i = 0\} & (k = 1, 2, 3, \dots) \\ O_k(a) = \#\{i | 1 \leq i \leq k, a_i = 1\} \end{cases}$$
とおくと、 $O_k(a) \leq Z_k(a)$  が成り立つ.

## 7.2 数列の集合 $A_{4n-2}$ から二分木の集合 $\mathcal{T}_n$ への写像

次に数列の集合  $A_{4n-2}$  から二分木の集合  $\mathcal{T}_n$  への写像  $N$  を構成する.

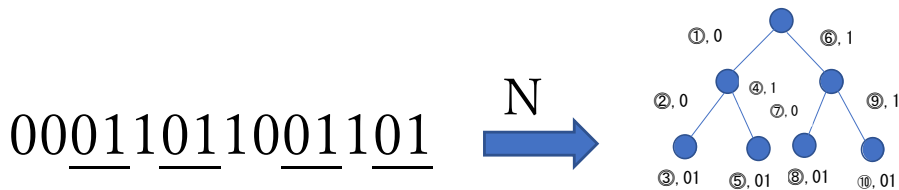
$$\begin{array}{ccc} A_{4n-2} & \xrightarrow{N} & \mathcal{T}_n \\ \Psi & & \Psi \\ a & \mapsto & T_n \end{array}$$

—  $N(a) = T_n$  の構成アルゴリズム —

二分木の頂点を辿る順序を利用し、二分木を作成する.

- グラフの根を決める.
- 0 が出てきたら、頂点から左に下り、新しい頂点と辺を作る.
- 1 が出てきたら、頂点から右に下り、新しい頂点と辺を作る.
- 01 の組が出てきたら、今いる頂点を葉とし、一つ前の頂点に戻る.

例えば、下の図は長さ 14 の数列から 7 頂点の二分木への変換である.



## 7.3 写像 $S$ が全単射であることの証明

**定理 7.1.** 写像  $N$  は写像  $S$  の逆写像である. 従って,  $S: \mathcal{T}_n \rightarrow A_{4n-2}$  は全単射である.

[証明]. 写像  $N$  では数列  $a$  において 01 の後は 1 であること, 0 と 1 の個数関係より二分木を辿る順序と同じ順序で数列  $a$  を使い, 二分木を作成することができる. また頂点数に関しても数列  $a$  の 0 と 1 と 01 の個数より葉の個数は  $n$  個, 葉以外の頂点は  $(n-1)$  個現れる. よって, 写像  $N$  は写像  $S$  の逆写像である.  $\square$

**系 7.1.**  $\#A_{4n-2} = C_{n-1}$

[証明]. 定理 7.1 より,  $(2n-1)$  頂点の二分木の集合  $\mathcal{T}_n$  と  $0, 1$  で構成される長さ  $(4n-2)$  である数列の集合  $A_{4n-2}$  は全単射対応している. よって, 数列の集合  $A_{4n-2}$  の個数は Catalan 数  $C_{n-1}$  である. 以上より, 系 7.1 を示せた.  $\square$



## 7.4 数列と Catalan 数

$0, 1$  で構成される長さ  $(4n-2)$  である数列の集合  $A_{4n-2}$  の個数が Catalan 数  $C_{n-1}$  であることはすでに示したが、この節では数列  $a \in A_{4n-2}$  の特徴を用いて、直接示そう。

以下の Step 1, 2, 3 のように数列  $a$  を変える。

**Step1** 数列  $a$  から  $a_{4n-3}a_{4n-2} = 01$  を除く。

**Step2**  $011$  の組を右括弧とおく。

**Step3**  $0$  を左括弧とおく。

この時、作られた括弧列の集合を  $B$  とする。括弧列  $b \in B$  は以下の性質をもつ。括弧列  $b$  を  $b = (b_1, b_2, \dots, b_{2n-2})$  とする。

1. 数列  $a$  において、 $0$  が  $(n-1)$  個あるので数列  $b$  において、左括弧の個数は  $(n-1)$  個、数列  $a$  において、 $01$  が  $n$  個、 $1$  が  $(n-1)$  個あり、上の Step 1, 2, 3 により、 $01$  が  $1$  個なくなったので、 $011$  の組み合わせが  $(n-1)$  個あり、右括弧の個数は  $(n-1)$  個になる。
2. 数列  $a$  の  $0, 1$  の順序の条件より、括弧列のどの場所においても、左括弧の個数が右括弧の個数以上である。

これをまとめると、括弧列  $b \in B$  の特徴は次のように表される。

1. 数列  $b$  において、左括弧の個数は  $(n-1)$  個、右括弧の個数は  $(n-1)$  個になる。
2. 
$$\begin{cases} Z_k(b) = \#\{i | 1 \leq i \leq k, b_i = (\text{左括弧})\} & (k = 1, 2, 3, \dots) \\ T_k(b) = \#\{i | 1 \leq i \leq k, b_i = (\text{右括弧})\} \end{cases}$$
とおくと  $T_k(b) \leq Z_k(b)$  が成り立つ。

このとき  $(n-1)$  組の括弧列の集合  $B$  の個数は Catalan 数  $C_{n-1}$  である。(命題 7.1)

**命題 7.1.**  $\#B = C_{n-1}$

$\#B = C_{n-1}$  を示すために補題を一つ準備する。

$xy$  平面上の  $k \times k$  の整数格子を考える ( $[0, k] \times [0, k]$  に含まれるもの)。この時、 $A(0, 0)$  から  $B(i, j)$  ( $i \leq j \leq k$ ) までの最短格子路の数を  $f_{i,j}$  とする。また  $B$  へ最短で辿り着くためには  $C(i-1, j)$  または  $D(i, j-1)$  を通る。よって  $f_{i,j} = f_{i-1,j} + f_{i,j-1}$  と表せる。

**補題 7.1.**  $1 \leq i \leq j$  に対し、漸化式  $f_{i,j} = f_{i-1,j} + f_{i,j-1}$  の解は

$$f_{i,j} = \binom{i+j}{j} - \binom{i+j}{j+1}$$

である。ただし  $f_{0,j} = 1$  ( $1 \leq j$ )

この補題 7.1 の証明は [仙波, 定理 8.1] を参考にして行う.

[補題の証明]. 数学的帰納法で解いていく.

(I)  $i + j = 2, i = 1, j = 1$  のとき

$$f_{1,1} = \binom{2}{1} - \binom{2}{2} = 1$$

よって,  $i = 1, j = 1$  のときは成り立つ.

(II)  $i + j = 2k$  ( $k \geq 1$ ) のとき成り立つと仮定し,  $i + j = 2k + 1$  のとき, 成り立つか示す. まず  $i + j = 2k + 1$  より,  $i = 2k + 1 - j$  である. このとき  $F(2k + 1 - j, j)$  を通る最短格子路を考える.  $F$  の一つ手前の頂点は  $G(2k - j, j), H(2k + 1 - j, j - 1)$  である. 頂点  $G, H$  は頂点の和が偶数であるので, 仮定より成り立つ.

$j(k + 1 \leq j \leq 2k)$  について考えると

$$\begin{aligned} f_{2k+1-j,j} &= f_{2k-j,j} + f_{2k+1-j,j-1} \\ &= \binom{2k}{j} - \binom{2k}{j+1} + \binom{2k}{j-1} - \binom{2k}{j} \\ &= \binom{2k}{j} + \binom{2k}{j-1} - \binom{2k}{j+1} - \binom{2k}{j} \\ &= \binom{2k+1}{j} - \binom{2k+1}{j+1} \end{aligned}$$

以上より  $i + j = 2k + 1$  のとき, 成り立つ.

(III)  $i + j = 2k + 1$  ( $k \geq 1$ ) のとき成り立つと仮定し,  $i + j = 2k + 2$  のとき, 成り立つか示す. また  $i + j = 2k + 2$  より  $i = 2k + 2 - j$  である. このとき  $J(2k + 2 - j, j)$  を通る最短格子路を考える.  $J$  の一つ手前の頂点は  $K(2k + 1 - j, j), L(2k + 2 - j, j - 1)$  である. 頂点  $K, L$  は頂点の和が奇数であるので, 仮定より成り立つ.

$j(k + 1 \leq j \leq 2k + 1)$  について考えると

$$\begin{aligned} f_{2k+2-j,j} &= f_{2k+1-j,j} + f_{2k+2-j,j-1} \\ &= \binom{2k+1}{j} - \binom{2k+1}{j+1} + \binom{2k+1}{j-1} - \binom{2k+1}{j} \\ &= \binom{2k+1}{j} + \binom{2k+1}{j-1} - \binom{2k+1}{j+1} - \binom{2k+1}{j} \\ &= \binom{2k+2}{j} - \binom{2k+2}{j+1} \end{aligned}$$

以上より  $i + j = 2k + 2$  のとき, 成り立つ.

(I),(II),(III) より, 補題 7.1 を示せた. □

[命題 7.1 の証明]. この補題より  $(i, j) = (n, n)$  の時

$$f_{n,n} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = C_n$$

となる．よって， $n \times n$  の格子において  $A(0,0)$  から  $B(n,n)$  において，途中の頂点は  $(i,j)$  ( $0 \leq i \leq j \leq n$ ) を満たす最短格子路の数は Catalan 数  $C_n$  となる．

以上より，括弧列の並びの通りは  $(n-1) \times (n-1)$  の格子において  $(0,0)$  から  $(n-1,n-1)$  までで途中の頂点は  $(i,j)$  ( $0 \leq i \leq j \leq n-1$ ) を満たす最短格子路の辺と対応させると左括弧は  $y$  軸方向の辺，右括弧は  $x$  軸方向の辺と考えることができ，Catalan 数  $C_{n-1}$  と一致する．よって，命題 7.1 は示せた．□

したがって，数列  $a \in A_{4n-2}$  の特徴から個数が Catalan 数  $C_{n-1}$  であることを示せた．

## 8 ヤング図形と Catalan 数

$(2n-1) \times (2n-1)$  の正方形内のヤング図形の部分集合を  $\Lambda_n$  と書く．この章では，ヤング図形の定義を説明する．そして数列の集合  $A_{4n-2}$  と  $(2n-1) \times (2n-1)$  の正方形内のヤング図形の部分集合  $\Lambda_n$  が全単射対応していることを示し，またヤング図形  $\lambda \in \Lambda_n$  の特徴を用いて，個数が Catalan 数  $C_{n-1}$  であることを直接示す．

### 8.1 ヤング図形の定義

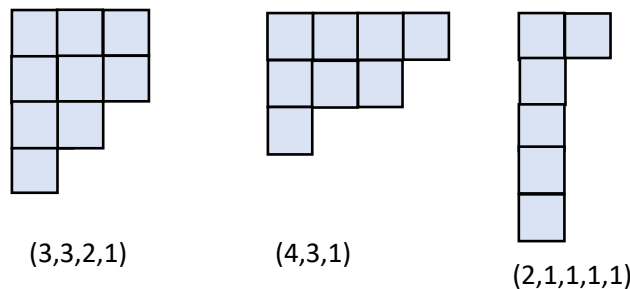
非負整数  $n \geq 0$  に対して，

$$n = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_l \quad (\lambda_j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}) \quad (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_l \geq 0)$$

と表されるとき， $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l)$  を  $n$  の分割と呼び，記号で  $\lambda \vdash n$  と表す．分割を図示するのにヤング図形を用いる．

**定義 8.1** (ヤング図形)．ヤング図形とは自然数  $n$  の分割を同じ大きさの  $n$  個の箱を上詰め，左詰めで並べて表す図式である．

例えば，下の図はヤング図形の例である．対応する分割を下に記しておく．



ヤング図形については教科書 [F] を参照してほしい．

## 8.2 数列の集合 $A_{4n-2}$ からヤング図形の集合 $\Lambda_n$ への写像

この節では、数列の集合  $A_{4n-2}$  から  $(2n-1) \times (2n-1)$  の正方形内のヤング図形の部分集合  $\Lambda_n$  への写像を示す。

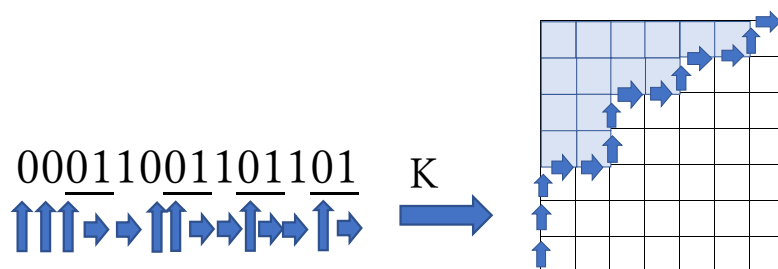
数列の集合  $A_{4n-2}$  からヤング図形の集合  $\Lambda_n$  への写像  $K$  を構成する。

$$\begin{array}{ccc} A_{4n-2} & \xrightarrow{K} & \Lambda_n \\ \Psi & & \Psi \\ a & \mapsto & \lambda \end{array}$$

—————  $K(a) = \lambda$  の構成アルゴリズム —————

$(2n-1) \times (2n-1)$  の格子を考える。数列  $a$  に対して、一番左下の格子点から 0 は上一つ ( $\uparrow$ )、1 は右一つ ( $\rightarrow$ ) 進み、ヤング図形  $\lambda$  の境界を作る。

例えば、下の図は長さ 14 の数列からヤング図形  $(6, 4, 2, 2)$  への変換である。



このとき、写像  $K$  により作られた数列と対応するヤング図形  $\lambda \in \Lambda$  は以下の性質を持つ。

1. 数列  $a$  において、011 の組みと 01 の組において、最初の 1 から最後の 1 までの間に 0 が最小でも  $(n-1)$  回挟まれているので、ヤング図形の行数の最小は  $(n-1)$  である。また数列  $a$  の先頭の 0 の個数の最小は 2 個であるので、ヤング図形の行数の最大は  $(2n-3)$  である。
2. 数列  $a$  において、1 は最後尾を除き、11 の組み合わせでしか出てこず、11 の組の間には 0 が必ず挟まれている。
3. 数列  $a$  の 0 と 1 の順序関係より、上に 1 マスと右に 1 マス行くのでは、上に行く回数が右に行く回数以上である。
4. 数列  $a$  において、1 は 11 の組み合わせでしか出てこず、また 11 の組の間には必ず 0 が挟まれているので、1 回で右に 2 つ進む。そしてその行為が  $(n-1)$  回行われる。

これを数式で表すと、ヤング図形  $\lambda$  の特徴は次のように表される。ヤング図形を  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l)$  とする。ここで  $l$  は  $\lambda$  の長さである。

1.  $n - 1 \leq l \leq 2n - 3$
2.  $\lambda_i \in 2\mathbb{N} \quad (1 \leq i \leq l)$
3.  $\lambda_i \leq 2n - 1 - i$
4.  $\{2, 4, \dots, 2n - 2\} \subset \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l\}$

### 8.3 ヤング図形の集合 $\Lambda_n$ から数列の集合 $A_{4n-2}$ への写像

次にヤング図形の集合  $\Lambda_n$  から数列の集合  $A_{4n-2}$  への写像  $L$  を構成する.

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_n & \xrightarrow{L} & A_{4n-2} \\ \cup & & \cup \\ \lambda & \mapsto & a \end{array}$$

—————  $L(\lambda) = a$  の構成アルゴリズム —————

$(2n - 1) \times (2n - 1)$  の格子の一番左下の格子点からヤング図形の境界を通る. このとき上に一つ進むならば 0, 右に一つ進むならば 1 とし, 数列を作成する.

### 8.4 写像 $K$ が全単射であることの証明

**定理 8.1.** 写像  $L$  は写像  $K$  の逆写像である. 従って,  $K : A_{4n-2} \rightarrow \Lambda_n$  は全単射である.

[証明]. 写像  $L$  で行われている操作は写像  $K$  で行なっている操作と順序は同じであり, 操作が逆になっている. ヤング図形  $\lambda$  の行の長さは偶数であり, 各偶数が出てくることより, 1 は最後尾を除き 11 の組だけがでてくるので, 数列  $a$  の特徴を満たす. また上と右に行く回数は  $(2n - 1)$  回であること, また上に行く回数が右に行く回数以上であることより, 数列  $a$  の 0 と 1 の順序関係を満たす. よって, 写像  $L$  は写像  $K$  の逆写像である.  $\square$

**系 8.1.**  $\#\Lambda_n = C_{n-1}$

[証明]. 定理 8.1 より, 数列の集合  $A_{4n-2}$  と  $(2n - 1) \times (2n - 1)$  の正方形内のヤング図形の部分集合  $\Lambda_n$  は全単射対応している. よって, ヤング図形の集合  $\Lambda_n$  の個数は Catalan 数  $C_{n-1}$  である. 以上より, 系 8.1 を示せた.  $\square$

### 8.5 ヤング図形と Catalan 数

ヤング図形の集合  $\Lambda_n$  の個数が Catalan 数  $C_{n-1}$  であることはすでに示したが, この節ではヤング図形  $\lambda \in \Lambda_n$  の特徴を用いて, 直接示そう.

以下の Step1, 2 のようにヤング図形  $\lambda$  を変形する.

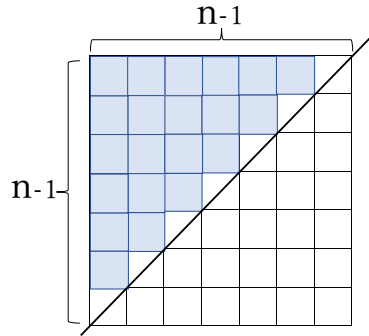
**Step1**  $\lambda \setminus (2n-2, 2n-4, \dots, 4, 2) = \lambda''$  とおく.

**Step2**  $\lambda''$  の各要素を  $\frac{1}{2}$  倍する.

このとき作られたヤング図形の集合を  $\Lambda'_n$  とする. ヤング図形  $\lambda' \in \Lambda'_n$  は以下のような性質を持つ. ヤング図形を  $\lambda' = (\lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_j)$  とする.

1.  $\lambda_l$  では  $(n-1) \leq l \leq (2n-3)$  であったが,  $\lambda'_j$  では  $(n-1)$  行抜かれているので  $0 \leq j \leq (n-2)$  となる.
2.  $\lambda_i$  においては行の長さが偶数であるので,  $\lambda'_j$  の行の長さは自然数となる.
3. ヤング図形  $\lambda$  の大きさの最大は長さ  $(2n-2)$  の行が 1 行であり, 長さ  $(2n-4), (2n-6), \dots, 4, 2$  の行がすべて 2 行である. このときに上の Step1, 2 の操作を行うと, 以下の図のヤング図形  $\lambda'$  を構成することができる. よってヤング図形  $\lambda'$  は  $(n-1) \times (n-1)$  の格子を考え, 格子において一番左下の格子点から一番右上の格子点への対角線を超えない.

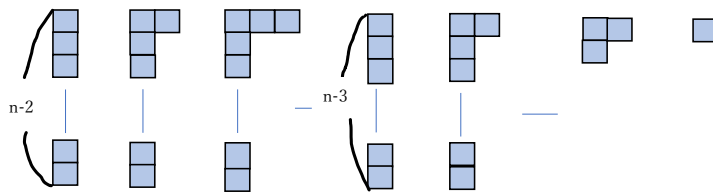
3において, 構成されるヤング図形  $\lambda'$  の図



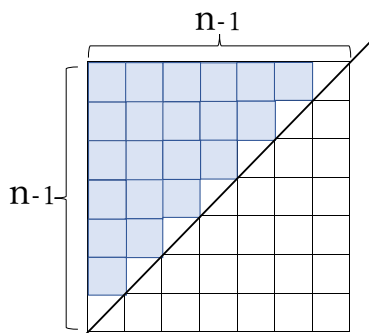
これを数式で表すと, ヤング図形  $\lambda' \in \Lambda'_n$  の特徴は次のように表される. ヤング図形を  $\lambda' = (\lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_j)$  とする. ここで  $j$  は  $\lambda'$  の長さである.

1.  $0 \leq j \leq n-2$
2.  $\lambda'_j \in \mathbb{N}$
3.  $\lambda'_j \leq (n-1-j)$

以上の特徴より, ヤング図形  $\lambda'$  の行を構成し, 計算をする. まずヤング図形の行の長さの最大行数は  $(n-2)$  は 1 行,  $(n-3)$  は 2 行,  $\dots$ , 2 は  $(n-3)$  行, 1 は  $(n-2)$  行であるので, 図のように 1 が  $(n-2)$  行の場合, 1 が  $(n-3)$  行の場合  $\dots$  と考える.



このとき以下の図の  $(n-2)$  行のヤング図形内に含まれるヤング図形をすべて作ることができる. (0 行の場合も含む.)



以上より, ヤング図形  $\lambda'$  の境界は  $xy$  平面上の  $(n-1) \times (n-1)$  の格子において  $(0,0)$  から  $(n-1, n-1)$  まで途中の頂点は  $(i, j)$  ( $0 \leq i \leq j \leq n-1$ ) を満たす最短格子路をすべて作ることができる. よって,  $\#\Lambda'_n = C_{n-1}$  である. (補題 7.1)

したがって, ヤング図形の集合  $\Lambda_n$  から個数が Catalan 数  $C_{n-1}$  であることを示せた.

## 9 まとめ

### 9.1 研究成果

以下の4つの集合は全単射対応していて, 元の個数はすべて  $C_{n-1}$  であることがわかった.

- $1 \cdots n$  の数列に  $(n-1)$  組の括弧をつけた数字括弧列の集合  $W_n$  (定理 5.2).  
このとき  $W_n$  の括弧は 2 組の数字または数字括弧列を括っているものとする.
- $(2n-1)$  頂点の二分木の集合  $\mathcal{T}_n$ . (定理 6.1)
- $0, 1$  で構成される長さ  $(4n-2)$  である数列の部分集合  $A_{4n-2}$ . (定理 7.1)
- $(2n-1) \times (2n-1)$  の正方形内のヤング図形の部分集合  $\Lambda_n$ . (定理 8.1)

この4つの集合の個数はすべて Catalan 数だが, 別の方法で直接, 次の2つの事実を示した.

- $0, 1$  で構成される長さ  $(4n-2)$  である数列の部分集合  $A_{4n-2}$  を用いなくて, 代わりに括弧のみの列の集合  $B$  を考えることができる. この個数も Catalan 数である. (§ 7.4)
- $(2n-1) \times (2n-1)$  の正方形内のヤング図形を考える代わりに,  $(n-1) \times (n-1)$  の格子において  $(0,0)$  から  $(n-1, n-1)$  まで対角線より上の部分 (対角線を含む) のみを通る最短格子路を考えると, その個数は Catalan 数である. (§ 8.5)

## 9.2 卒業研究発表会での質問内容について

- 数列と Catalan 数の対応を 0 と 2 を使わないで、直接示すことはできないのか. (増田先生)

[考察] Catalan 数を求めるときに 0 と 2 ではなく、左括弧と右括弧で対応を行えば、そのまま Catalan 数と繋げることが可能でした. 7章で利用させていただきました.

- 数列の集合  $A_{4n-2}$  の条件は何を意味はしているのか. (川上先生)

[考察] 数列の集合  $A_{4n-2}$  の条件は二分木に対応する数列を特徴付けるためのもので、それは 7章で説明しています.

その他、中山先生からもためになる質問をいただきました. ありがとうございます.

## 9.3 今後の課題

- ヤング図形  $\lambda \in \Lambda_n$  から  $(2n-1)$  頂点の二分木  $T_n$  を直接構成する.
- 数列  $a \in A_{4n-2}$  と凸  $(n+1)$  角形の三角形分割の間の対応 (教科書 [D] に二分木と三角形分割の対応が記されている. )

以上の二つは構成のルールはおぼろげにわかっているが、正確な説明をうまくつけることができなかった.

お忙しい中、1年間丁寧にご指導してくださった西山先生に御礼申し上げます. 多忙である中、何度も相談や添削をしてくださり心より感謝致します. また、卒業研究発表の場で助言をいただいた増田先生、川上先生、中山先生にも深く感謝いたします. そして、一年間を共に過ごした西山研究室の秦くん、須永さんに感謝します.

## 10 参考文献

### 参考文献

[牧野] 牧野和久:『基礎系 数学 離散数学』, 丸善出版, 2019.

[仙波] 仙波一郎:『組合せ数学』, コロナ社, 1999.

[内田] 内田伏一:『集合と位相』, 裳華房, 2013.

[F] W.フルトン (池田岳・井上玲・岩尾慎介訳):『ヤング・タブロー: 表現論と幾何への応用』, 丸善出版, 2019.

[D] Donald E.Knuth (青木孝・笈一彦・鈴木健一・長尾高弘訳):『The Art of Computer Programming Volume 1 Fundamental Algorithms Third Edition』, ドワンゴ, 2015.