射影ねじれ3次曲線とベズーの定理

青山学院大学　理工学部　物理・数理学科
学籍番号:15116082　辻 駿太
指導教員 西山 享

2020 年 2 月 18 日

目 次

1　序論

1.1　研究の背景

私が本研究をしようと思ったきっかけは，セミナーで射影空間を学び，池田岳著「数え上げ幾何学講義」を勉強して，さらに理解を深めたいと思ったからである．射影空間は通常の $\mathbb{C}^n$ に無限遠点と呼ばれる点を付け加えてできる空間である．例えば, ユークリッド平面上の平行な 2 直線は交わらないが，射影空間で考えると無限遠点で交わる．私の全く想像できない内容だったので興味が湧いた．なかでも，射影空間で考えることで，ベズーの定理と呼ばれる曲線の交点に関する定理が場合分けをしないでも統一的に記述できることを学んだ．

その後，論文 [L] を勉強してみて，ねじれ 3 次曲線と呼ばれる空間 3 次曲線を射影空間で考えると，興味深い性質を持っていることが分かり，さらに研究に熱が入った．

1.2　研究の主結果

主結果を述べるために，まずベズーの定理を簡単に紹介しておく．空間におけるベズーの定理とは，既約な曲線 X と既約な曲面 Y の次数を，$\deg X$ ，$\deg Y$ とするとき，その交点の個数が $\#(X \cap Y) = \deg X \deg Y$ で与えられる定理である．ここで，曲線 X の次数が m であるとは，パラメータ表示が m 次式で書けることであり，曲面 Y の次数はその定義方程式の次数である．(ここでは空間で述べたが，パラメータそのものは一般次元で定式化できる [池田，定理 1.7])

ベズーの定理を用いて，空間における既約な曲線と平面の交点を求めるには,「複素数」「重複度」「無限遠点」を考慮する．平面とねじれ 3 次曲線を用いる簡単な例により示すことができた．このとき，ねじれ 3 次曲線を射影化する必要があるが，射影ねじれ 3 次曲線のパラメータ表示や斉次方程式から，射影ねじれ 3 次曲線は，元のアフィン曲線に無限遠点 1 点を追加したものということが理解できた．

論文 [L] には，ねじれ 3 次曲線の性質が証明なしに多数紹介されている．その中から 7 つの性質を選び，その内容を証明して，理解することができた．7 つの性質とは，具体的に

1. 「ねじれ 3 次曲線は平面に含まれない既約曲線のうち，最小次数のものである.」

2. 「ねじれ 3 次曲線 C 上の 4 点は射影空間を生成する」

3. 「$\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ および $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ の座標の線形変換でねじれ 3 次曲線 C は、射影的に同値な曲線に写る」

4. 「平面に含まれない次数 3 の既約な空間曲線は C と射影的に同値である」

5. 「ねじれ 3 次曲線 C と 3 点で交わる直線はない」

6. 「ねじれ 3 次曲線 C 上の 1 点を通る全ての割線の族は C を含む 2 次円錐になる」

7. 「一般の 6 点を通るねじれ 3 次曲線 C がただ 1 つある」

である．

1.3 本論文の構成

§2 では, 射影空間を定義して連比の性質を紹介する．§3 では, ベズーの定理を平面の場合と空間の場合それぞれで例を用いて紹介をする．§4 では, ねじれ 3 次曲線について定義をし，ねじれ 3 次曲線を射影化して，射影ねじれ 3 次曲線のパラメータ表示や斉次方程式について考察する．また, 平面とねじれ 3 次曲線の交点を求める．§5 では，ねじれ 3 次曲線の 7 つの性質について考察する．

2 射影空間

ここでは，射影空間を定義する．また，連比と直線の方向との関係を用いて射影空間の点を連比 (斉次座標) で表すことを考える．

2.1 射影空間

定義 1 (射影空間). $\mathbb{C}^{n+1}$ を $(n+1)$ 次元の複素ベクトル空間とするとき，$\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ によって，$\mathbb{C}^{n+1}$ の原点を通る直線，すなわち 1 次元線形部分空間 ℓ 全体の集合を表す．つまり $\ell_{\boldsymbol{v}}$ を原点を通る方向 $\boldsymbol{v}$ の直線とすると，$\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ は

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = \left\{ \ell_{\boldsymbol{v}} \;\middle|\; \boldsymbol{v} = (x_i)_{0 \le i \le n} \in \mathbb{C}^{n+1} \backslash \{0\} \right\}$$

により定義される．これを $\boldsymbol{n}$ **次元射影空間**と呼ぶ．

以下 $n = 3$ の場合を主に考えることにする．

2.2 連比（斉次座標）

$\mathbb{C}^3$ には通常の座標が入っているが，$\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ にも斉次座標が定義されていると便利である．そこで射影空間の斉次座標をここで導入する．

定義 2 (斉次座標)**.** $x_0, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ に対し,$(x_0, x_1, x_2, x_3) \neq 0$ のとき，

$$[x_0, x_1, x_2, x_3] = [\lambda x_0, \lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3] \quad (\lambda \neq 0)$$

という同値関係を考えて，その同値類を **連比** と呼ぶ．連比と直線の方向は 1 対 1 に対応するので，$\ell_{\boldsymbol{v}}\,(\boldsymbol{v} = (x_0, x_1, x_2, x_3))$ に対応する $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ の点を $[x_0, x_1, x_2, x_3]$ で表し，このとき連比を **斉次座標** という．

斉次座標を用いると射影空間は，

$$\mathbb{P}^3(\mathbb{C}) = \left\{[x_0, x_1, x_2, x_3] \;\middle|\; \boldsymbol{v} = (x_i)_{0 \leq i \leq 3} \in \mathbb{C}^4 \backslash \{0\}\right\}$$

と表せる．

2.3 $\mathbb{C}^3$ と $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ の関係

$x_0 \neq 0$ のときの $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ の部分集合を $\mathscr{U}_1$ とする．$\mathscr{U}_1$ を

$$\mathscr{U}_1 = \left\{[1, x_1, x_2, x_3] \mid \boldsymbol{v} = (1, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^4\right\}$$

で与える．$\mathscr{U}_1$ の直線を 1 つ決めれば，$\mathbb{C}^3$ の座標も 1 つに決まるので，$\mathscr{U}_1$ と $\mathbb{C}^3$ は同一視できる．よって，

$$\mathbb{P}^3(\mathbb{C}) \supset \mathscr{U}_1 \cong \mathbb{C}^3 \supset C$$

$$[1, x_1, x_2, x_3] \in \mathscr{U}_1 \longleftrightarrow (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3$$

となる．よって，$x_0 \neq 0$ の斉次座標とアフィン座標は 1 対 1 に対応する (図 1)．この $\mathbb{C}^3$ を $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ のアフィン部分とか有限部分と呼ぶ．

斉次座標で $x_0 = 0$ となる点を集めると $\{[0, x_1, x_2, x_3] \,|\, (x_i) \neq 0\}$ となり，これは $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ と同じものになる．つまり，$\mathbb{P}^3(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^3 \cup \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ と分解される．$\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ を無限平面，その点を無限遠点と呼ぶ．

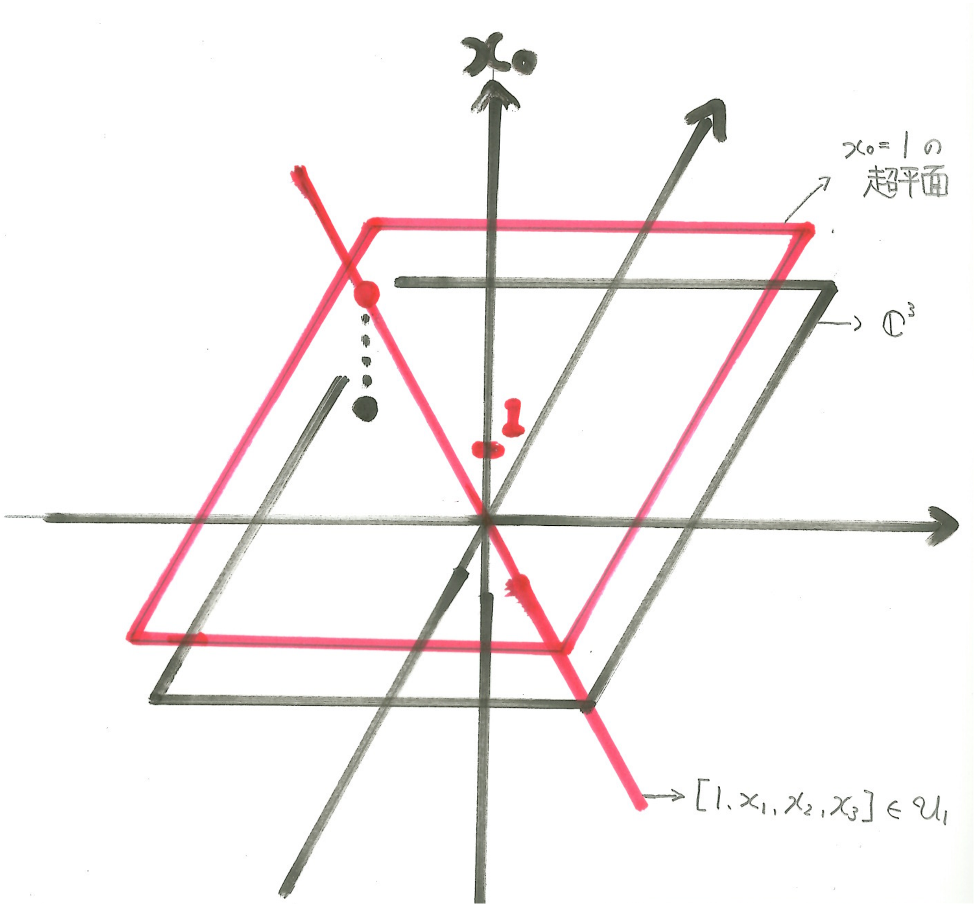

図 1: $\mathbb{C}^3$ と $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ の関係図

3 ベズーの定理

ここでは，ベズーの定理の紹介とともに，ベズーの定理を使うにあたっての考え方や簡単な例を用いて理解を深める．

3.1 平面におけるベズーの定理

射影平面 $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ における曲線 X は，斉次多項式 $f(x_0, x_1, x_2)$ によって，$f(x_0, x_1, x_2) = 0$ と与えられるが，f の **次数** を X の次数と呼び $\deg X$ で表す．また，$f(x_0, x_1, x_2)$ が既約多項式のとき X を **既約** という．

定理 3 (ベズーの定理 [池田, 定理 1.7]). X，Y がそれぞれ相異なる既約な平面曲線である

とき，次数を $\deg X = m, \deg Y = n$ とすると，交点の数は

$$\#(X \cap Y) = mn = \deg X \deg Y$$

で与えられる．

例 4. 2 つの既約な 2 次曲線が相異なる 5 点で交わればそれは一致する．

背理法を用いて示す．相異なる既約な 2 次曲線 X，Y が 5 点以上で交わったと仮定する．ベズーの定理を用いると，$\#\,(X \cap Y) = 4$ となるので，矛盾する．よって，2 つの既約な 2 次曲線が 5 点以上で交わると，それは一致する．

3.2 空間におけるベズーの定理

射影空間内の曲線 X は，2 つ以上の斉次方程式で定義される．これをパラメータ表示したとき，各成分がパラメータの m 次式になるなら，X の **次数** は m であり，$\deg X = m$ と書く．パラメータ表示をされていない場合は，X と一般の平面 H との交点の数を X の次数と定義する．([池田 p.31] 参照．)

射影空間内の曲面 Y は，斉次方程式により $f(x_0, x_1, x_2) = 0$ と定義されている．Y の **次数** は f の次数である．また，f が既約多項式のとき Y を **既約** という．

曲線 X の場合は既約の概念を一般化する必要があり，X が既約であるとは X が空でない 2 つのザリスキー閉集合 X_0, X_1 によって，$X = X_0 \cup X_1$ と表されたとき，$X_0 = X$ は $X_1 = X$ となることをいう．(ザリスキー閉集合とは多項式の零点集合のことである．詳しくは ([池田 p.24]) 参照．)

定理 5 (ベズーの定理 [池田, 定理 1.14])**.** X を空間内の既約な曲線で次数が m，Y を空間の既約な曲面で次数が n であって，X が Y に含まれないとすれば，

$$\#(X \cap Y) = mn = \deg X \deg Y$$

が成り立つ．

例 6. 既約な 2 次曲線 Q と既約な平面 H に対して，ベズーの定理を用いると，Q が H に含まれないときは，

$$\#(Q \cap H) = 2$$

となる．

注意 7. ベズーの定理を用いる際に下記の 3 つの考え方が必要である．

1. $\mathbb{C}$ で考える（$\mathbb{R}$ ではなく）．

2. 重複度を考慮する（例えば，接している場合）.

3. 無限遠点を考慮する（例えば，平面上の平行な 2 直線は交わらない）.

この 3 つを考慮することで，正しい交点数が出てくる.

これについては §4 で説明する.

4　ねじれ3次曲線とその射影化

ここでは，ねじれ 3 次曲線 C についての紹介と，射影空間で考えたねじれ 3 次曲線のパラメータ表示および斉次方程式について考察する．また，ベズーの定理をねじれ 3 次曲線 C に対して使ってみる.

4.1　ねじれ3次曲線

定義 8 (アフィンねじれ 3 次曲線). パラメータ $t \in \mathbb{C}$ を用いて，

$$C : \vec{x}(t) = (t, t^2, t^3) \in \mathbb{C}^3$$

により定義された $\mathbb{C}^3$ 内の曲線を **アフィンねじれ 3 次曲線** と呼ぶ (図 2).

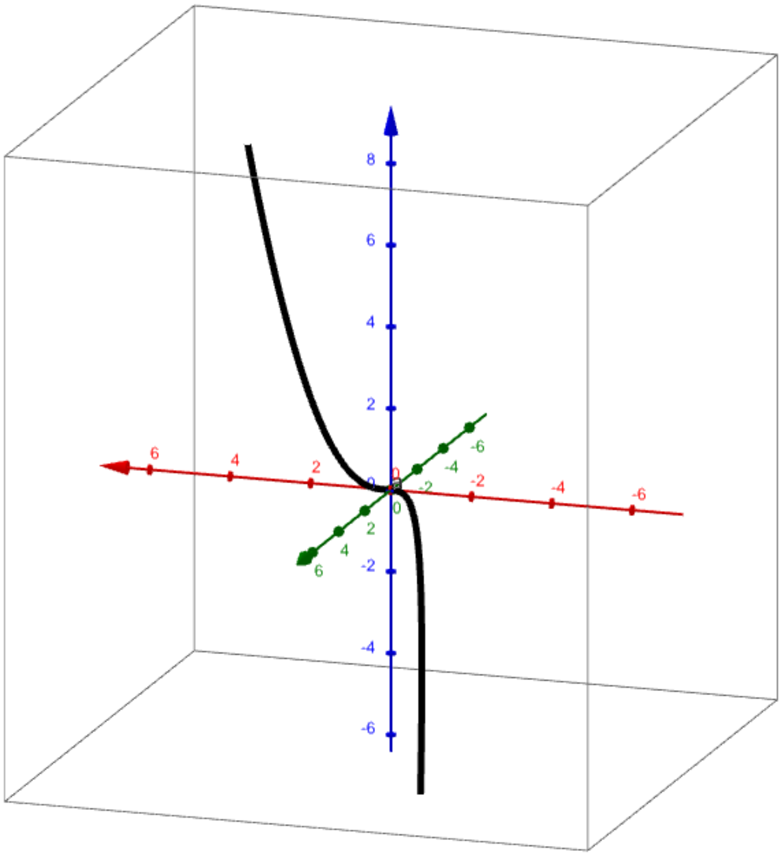

図 2: ねじれ 3 次曲線の図

曲線 C は 3 次元空間のどの平面 H にも含まれない．この事実を「ねじれ」ているという．

定理 9. アフィンねじれ 3 次曲線を含む平面 H は存在しない．

(証明). 背理法を用いて示す．平面 $H : ax + by + cz + d = 0$ にねじれ 3 次曲線 C が含まれたと仮定する．平面 H の方程式に $\vec{x}(\mathrm{t}) = (t, t^2, t^3)$ を代入すると，

$$at + bt^2 + ct^3 + d = 0$$

となり，t の 3 次方程式である．解は 3 つ以下となるので，対応する曲線上の点は平面内にあるが，この 3 点以外の点は平面 H には含まれない．よって，矛盾する． □

4.2 射影ねじれ 3 次曲線のパラメータ表示

射影曲線のパラメータは $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ に値をとるので，$[t_0, t_1] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ がパラメータである．

定義 10 (射影ねじれ 3 次曲線のパラメータ表示)**.** 射影ねじれ 3 次曲線のパラメータ表示は

$$\begin{aligned} \nu : \quad & \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{P}^3(\mathbb{C}) \\ & [t_0, t_1] \longmapsto [t_0^3, t_0^2 t_1, t_0 t_1^2, t_1^3] \end{aligned} \tag{1}$$

で与えられる．

射影ねじれ 3 次曲線のパラメータ表示が与えられたのでそのアフィン部分と無限遠点について考えてみる．そこで $t_0 = 0$ かどうかによって場合分けを行う．

1. $t_0 \neq 0$ の場合（アフィンの場合）
   連比の性質より，$[t_0, t_1] = [1, \dfrac{t_1}{t_0}]$ となる．そこで $t = \dfrac{t_1}{t_0}$ とおくと，$[1, \dfrac{t_1}{t_0}] = [1, t]$ と表せる．$[t_0^3, t_0^2 t_1, t_0 t_1^2, t_1^3]$ も同様に考えると，

   $$[t_0^3, t_0^2 t_1, t_0 t_1^2, t_1^3] = [1, \frac{t_1}{t_0}, \frac{t_1^2}{t_0^2}, \frac{t_1^3}{t_0^3}] = [1, t, t^2, t^3]$$

   と表せる．斉次座標 $[1, t, t^2, t^3]$ はアフィン座標 (t, t^2, t^3) と 1 対 1 に対応してる，よって $t_0 \neq 0$ のとき，ねじれ 3 次曲線を表す.

2. $t_0 = 0$ の場合（無限遠点の場合）
   $t_0 = 0$ を (1) に代入し，連比の性質を用いると，

   $$[t_0^3, t_0^2 t_1, t_0 t_1^2, t_1^3] = [0, 0, 0, t_1^3] = [0, 0, 0, 1]$$

   となり，無限遠点が 1 点だけ現れる．

$[t_0^3, t_0^2 t_1, t_0 t_1^2, t_1^3]$ のパラメータ表示より，射影ねじれ 3 次曲線は, ねじれ 3 次曲線に無限遠点 1 点を付け加えたものということが示された.

4.3 射影ねじれ 3 次曲線の斉次方程式

x_0, x_1, x_2, x_3 を不定元として連立斉次方程式 (T)

$$(\mathrm{T}) \qquad \begin{cases} x_0 x_2 - x_1^2 = 0 \\ x_0 x_3 - x_1 x_2 = 0 \\ x_1 x_3 - x_2^2 = 0 \end{cases}$$

を考える．

定理 11. 射影ねじれ 3 次曲線は連立方程式 (T) によって定義される．

(証明). $x_0 = 0$ かどうかによって場合分けを行う．

1. $x_0 \neq 0$ の場合（アフィンの場合）
   連比の性質より，斉次座標 $[x_0, x_1, x_2, x_3] = [1, \frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}, \frac{x_3}{x_0}]$ と表すことができる．ここで，$t_1 = \frac{x_1}{x_0}, t_2 = \frac{x_2}{x_0}, t_3 = \frac{x_3}{x_0}$ とおくと，$[x_0, x_1, x_2, x_3] = [1, t_1, t_2, t_3]$ となる．これを射影ねじれ3次曲線の斉次方程式に代入すると，

$$\begin{cases} t_2 - t_1^2 = 0 & (2) \\ t_3 - t_1 t_2 = 0 & (3) \\ t_1 t_3 - t_2^2 = 0 & (4) \end{cases}$$

   (2),(3) より，$t_2 = t_1^2, t_3 = t_1^3$ となる．$t_1 = t$ とし，斉次座標に代入すると，

$$[1, t_1, t_1^2, t_1^3] = [1, t, t^2, t^3]$$

   と変形でき，ねじれ3次曲線になる．

2. $x_0 = 0$ の場合（無限遠点の場合）
   斉次座標 $[0, x_1, x_2, x_3]$ を射影ねじれ3次曲線の斉次方程式に代入すると

$$\begin{cases} -x_1^2 = 0 & (5) \\ -x_1 x_2 = 0 & (6) \\ x_1 x_3 - x_2^2 = 0 & (7) \end{cases}$$

   (5),(7) より，$x_1 = 0, x_2 = 0$ となる．斉次座標に代入すると，

$$[0, 0, 0, x_3] = [0, 0, 0, 1]$$

   となり，無限遠点ただ1点になる．

1，2より斉次方程式で定めた曲線が射影ねじれ3次曲線と一致することがわかった． □

4.4 平面とねじれ3次曲線の交点数

§3で「$\mathbb{C}$ で考える」「重複度を考慮する」「無限遠点を考慮する」という3つの考え方が重要であると述べたが，ねじれ3次曲線を例にしてこの3つの問題を考える．ベズーの定理を確認するために，平面 H とねじれ3次曲線 C の交点数を場合分けをして考察する．

問題 12. 平面 H とねじれ3次曲線 C との交点を求める．

ベズーの定理を用いると，$\#(H \cap C) = 3$ となる．しかし，$\#(H \cap C) = 2,1,0$ になる場合がある．その場合の原因について考える．

例 13 ($\mathbb{C}$ で考える). $H : x - 2y + z - 2 = 0$ と C の交点を求める.

1. $t \in \mathbb{R}$ の場合
   $H : x - 2y + z - 2 = 0$ に $C : \vec{x} = (t, t^2, t^3)$ を代入すると，$(t^2 + 1)(t - 2) = 0$．$t \in \mathbb{R}$ の場合は $t = 2$ しか解がないので交点は，$(2, 4, 8)$ で 1 つしかない.

2. $t \in \mathbb{C}$ の場合
   $(t^2 + 1)(t - 2) = (t + i)(t - i)(t - 2) = 0$. $t \in \mathbb{C}$ の場合は解が $t = \pm i, 2$ の 3 つあり交点も 3 つ存在する.

$\mathbb{C}$ で考えることで，ベズーの定理が成り立つ.

例 14 (重複度を考慮する). $H : x - 5y + 8z - 4 = 0$ と C の交点を求める.
$H : x - 5y + 8z - 4 = 0$ に $C : \vec{x} = (t, t^2, t^3)$ を代入すると，$(t - 2)^2(t - 1) = 0$．$t = 2$ のとき C と H は接しているので，$t = 2$ のときの重複度を考慮して交点は 3 つ存在する.

重複度を考慮すると，ベズーの定理が成り立つ.

例 15 (無限遠点を考慮する). 無限遠点を通る平面 H と射影ねじれ 3 次曲線 C の交点を求める.

無限遠点を通る平面 H を考える．斉次座標で表した平面の方程式 $H : ax_0 + bx_1 + cx_2 + dx_3 = 0$ に無限遠点 $[0, 0, 0, 1]$ を代入すると，$d = 0$ となる．よって, 無限遠点を通る平面 H は,

$$H : ax_0 + bx_1 + cx_2 = 0$$

になる．実際この平面 H は，$[0, 0, 0, 1]$ を通る.

H と射影ねじれ 3 次曲線の交点を求める．上で求めた平面 H に射影ねじれ 3 次曲線のパラメータ $[t_0^3, t_0^2 t_1, t_0 t_1^2, t_1^3] \in \mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ を代入すると，

$$t_0^3(a + b(t_1/t_0) + c(t_1/t_0)^2) = 0$$

この式の解を $t_0 = 0$ かどうかで場合分けする.

1. $t_0 = 0$ のとき

   解は無限遠点 $[0, 0, 0, 1]$ の 1 つ.

2. $t_0 \neq 0$ のとき

   $a + b(t_1/t_0) + c(t_1/t_0)^2 = 0$ より，2 次方程式なので解は 2 つ.

1，2 から無限遠点を考慮することで交点は 3 つになり，ベズーの定理は成り立つ.

5　ねじれ3次曲線の性質

序文では，論文 [L] のに書いてあるねじれ 3 次曲線の 7 つの性質を箇条書きにして紹介した．以下それぞれの問題について考える．

定理 16. ねじれ 3 次曲線 C は平面に含まれない既約曲線のうち，最小次数のもの. つまり既約な 1 次曲線と 2 次曲線はある平面に含まれ，C 自身はどの平面にも含まれることはない．

補題 17. 2 次曲線 Q が平面 H に含まれる．

(証明). 2 次曲線 Q が平面 H に含まれないと仮定する．既約な 2 次曲線 Q と既約な平面 H に対して，ベズーの定理を用いると，$\#(Q \cap H) = 2$.

ここで，Q 上の 3 点をとる．3 点を通る H は必ず存在するので，Q 上の 3 点を通る H は存在する．この H をとると，

$$\therefore \#(Q \cap H) \geq 3$$

これは矛盾．したがって，$Q \subset H$. □

1 次曲線 (直線) の場合も同様に示せる．

命題 18. ねじれ 3 次曲線 C 上の 4 点は射影空間を生成する．

$\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ の点 $\{Q_1, Q_2, \cdots, Q_k\}$ が $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ を生成するとは，$Q_1, Q_2, \cdots Q_k$ に対応する $\mathbb{C}^4$ のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots \boldsymbol{v}_k$ を考え，これらのベクトルが $\mathbb{C}^4$ の生成元であるときにいう．

(証明). 1. 4 点がすべてアフィン空間に含まれているときをまず考える．

$(t, t^2, t^3) \in \mathbb{C}^3$ と $[1, t, t^2, t^3] \in \mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ は，1 対 1 に対応してる．斉次座標をベクトルとみなし，4 つのベクトルを並べた行列で表して，行列式 $\neq 0$ になることを示す．

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ t_1 \\ t_1^2 \\ t_1^3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ t_2 \\ t_2^2 \\ t_2^3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ t_3 \\ t_3^2 \\ t_3^3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ t_4 \\ t_4^2 \\ t_4^3 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{C}^4 \quad (t_i \neq t_j)$$

が基底であることを示す．それを示すにはこのベクトルを並べてできる行列が正則行列であればよい．行列式を計算すると，

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \\ t_1^2 & t_2^2 & t_3^2 & t_4^2 \\ t_1^3 & t_2^3 & t_3^3 & t_4^3 \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq 4} (t_j - t_i) \neq 0$$

だから，示せた．

2. 1点が無限遠点の場合を考える．

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ t_1 \\ t_1^2 \\ t_1^3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ t_2 \\ t_2^2 \\ t_2^3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ t_3 \\ t_3^2 \\ t_3^3 \end{pmatrix} \right\} \ (t_i \neq t_j)$$

をとる．行列式を計算すると，

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & t_1 & t_2 & t_3 \\ 0 & t_1^2 & t_2^2 & t_3^2 \\ 1 & t_1^3 & t_2^3 & t_3^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ t_1 & t_2 & t_3 \\ t_1^2 & t_2^2 & t_3^2 \end{vmatrix} = \prod_{1\leq i<j\leq 3} (t_j - t_i) \neq 0$$

だから，示せた．

よって，ねじれ3次曲線 C 上の4点は射影空間を生成することがわかった． □

定理 19. $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ および $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ の座標の線形変換でねじれ3次曲線 C は，射影的に同値な曲線に写る．その族は12次元ある．

(証明). 射影ねじれ3次曲線のパラメータ表示は，

$$\begin{aligned} \nu : \quad & \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^3(\mathbb{C}) \\ & [t_0, t_1] \mapsto [t_0^3, t_0^2 t_1, t_0 t_1^2, t_1^3] \end{aligned}$$

と表せる．

1. $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ の場合に2次正則行列で線形変換による，パラメータ t_0, t_1 の取り替えを行うと，

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_0 \\ t_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} at_0 + bt_1 \\ ct_0 + dt_1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \text{正則行列}$$

となる．よって，

$$[t_0, t_1] \to [at_0 + bt_1, ct_0 + dt_1]$$

となる．ここで，$s_0 = at_0 + bt_1$, $s_1 = ct_0 + dt_1$ とおく．

$$[s_0, s_1] \mapsto [s_0^3, s_0^2 s_1, s_0 s_1^2, s_1^3]$$

と表せる．$[s_0^3, s_0^2 s_1, s_0 s_1^2, s_1^3]$ は，射影ねじれ3次曲線を異なるパラメータ表示で表示したものになる．

2. $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ の場合に 4 次正則行列で線形変換による，ねじれ 3 次曲線の変形を行うと，

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_0^3 \\ t_0^2 t_1 \\ t_0 t_1^2 \\ t_1^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} at_0^3 + bt_0^2 t_1 + ct_0 t_1^2 + dt_1^3 \\ et_0^3 + ft_0^2 t_1 + gt_0 t_1^2 + ht_1^3 \\ it_0^3 + jt_0^2 t_1 + kt_0 t_1^2 + lt_1^3 \\ mt_0^3 + nt_0^2 t_1 + ot_0 t_1^2 + pt_1^3 \end{pmatrix} \tag{8}$$

となる. よって (8) は，ねじれ 3 次曲線を変形したものになる.

つまり，$\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ には，$15-3=12$ 次元のねじれ 3 次曲線の族があり，すべて射影的に同値である．ここで 15 とは，$15=4^2-1$ である.（$4^2=4\times 4$ 行列の次元，$1=$ スカラー行列の次元）. □

定理 20. 平面に含まれない次数 3 の既約曲線は C と射影的に同値である.

ベズーの定理を使うと，次数 3 の既約曲線が，どの平面にも含まれないことと，どの 4 点を取っても同一平面上にないことは同値であることがわかる.

(証明). 命題20 より，一般の 3 次曲線 $\psi(t)$ は 4 次正則行列 A と射影ねじれ 3 次曲線 $\phi(t)=[t_0^3, t_0^2 t_1, t_0 t_1^2, t_1^3]$ を用いて，

$$\psi(t) = A\phi(t)$$

とパラメータ表示できる．A が正則でないならば，$\exists \boldsymbol{u} \in \mathbb{C}^4$ が存在し，${}^t\boldsymbol{u} = (u_0, u_1, u_2, u_3)$ とおくと，

$${}^t\boldsymbol{u}A = 0$$

となり，

$${}^t\boldsymbol{u}\psi(t) = {}^t\boldsymbol{u}A\phi(t) = 0$$

が成り立つ．$\psi(t) = [\psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_3]$ とおくと，この式は，

$$u_0\psi_0 + u_1\psi_1 + u_2\psi_2 + u_3\psi_3 = 0$$

となり，$\psi(t)$ は平面 : $u_0x_0 + u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$ 上にある．これは矛盾．したがって，平面に含まれない次数 3 の既約曲線は C と射影的に同値である. □

定理 21. ねじれ 3 次曲線 C と 3 点で交わる直線はない.

(証明). C 上の 2 点を通る直線を考え，その直線がこの 2 点以外で交わることはないということを示す.

(ア)2 点がどちらも無限遠点ではない場合：この 2 点を

$$P([1,t]) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}, P([1,s]) = \begin{pmatrix} 1 \\ s \\ s^2 \\ s^3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^4$$

とする．この 2 点と 1 対 1 に対応するアフィン空間 $\mathbb{C}^3$ の点は,

$$Q(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}, Q(s) = \begin{pmatrix} s \\ s^2 \\ s^3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$$

である．2 点 $Q(t), Q(s)$ を通る直線の方程式 ℓ は，パラメータ $h \in \mathbb{C}$ を用いて

$$\ell : (1-h)Q(t) + hQ(s) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t + h(s-t) \\ t^2 + h(s^2 - t^2) \\ t^3 + h(s^3 - t^3) \end{pmatrix} \tag{9}$$

$$h = \frac{x_1 - t}{s - t} = \frac{x_2 - t^2}{s^2 - t^2} = \frac{x_3 - t^3}{s^3 - t^3} \tag{10}$$

と表すことができる．ℓ を射影ねじれ 3 次曲線の斉次方程式の 1 つ

$$x_1 x_3 - x_2^2 = 0$$

に代入すると，

$$h(1-h)(s-t)^2 st = 0$$

となる (§4.3 参照)．ここで，$h = \dfrac{x_1 - t}{s - t}$ を代入すると，

$$-(x_1 - t)(x_1 - s)st = 0$$

となる．よって，解は $x_1 = s, t$ または $st = 0$ である．

ここで，$st = 0$ のときを考える．$t = 0$ または $s = 0$ なので，点を入れ替えることによって $t = 0$ としても一般性を失わない．すると (9) より，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} hs \\ hs^2 \\ hs^3 \end{pmatrix}$$

である．よって，

$$hs^2 = (hs)^2 = h^2 s^2$$

である．$t = 0$,$s \neq 0$ であるので，

$$h(1-h) = 0$$

となり，解が $h = 0, 1$ である．これを (10) に代入すると，$x_1 = s$ となる．

よって，射影ねじれ3次曲線の1つ $x_1x_3 - x_2^2 = 0$ と直線 ℓ は $P(t)$，$P(s)$ の2点でしか交わらないことが示せた．

$x_0x_2 - x_1^2 = 0$，$x_0x_3 - x_1x_2 = 0$ に直線 ℓ を代入しても同様の結果が得られる．よってねじれ3次曲線 C と ℓ は $P(t)$，$P(s)$ の2点でしか交わらない．

(イ)1点が無限遠点の場合：2点を

$$P([0,1]) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, P([1,s]) = \begin{pmatrix} 1 \\ s \\ s^2 \\ s^3 \end{pmatrix}$$

とおくと，この2点を通る直線 ℓ は，パラメータ $h \in \mathbb{C}$ を用いて，

$$\ell : (1-h)P([0,1]) + hP([1,s]) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \\ hs \\ hs^2 \\ 1-h+hs^3 \end{pmatrix} \tag{11}$$

と表すことができる．射影ねじれ3次曲線の斉次方程式は，

$$\begin{cases} x_0x_2 - x_1^2 = 0 \\ x_0x_3 - x_1x_2 = 0 \\ x_1x_3 - x_2^2 = 0 \end{cases}$$

であったので，(11) はこの方程式を全て満たす．$x_0x_2 - x_1^2 = 0$ に代入すると，

$$h^2s^2 - (hs)^2 = 0$$

となり，これは，ℓ が円錐面 $x_0x_2 - x_1^2 = 0$ に含まれることを意味する．次に

(11) を $x_0x_3 - x_1x_2 = 0$ に代入すると，

$$h(1-h) = 0$$

となり，$h = 0, 1$ で ℓ と円錐面 $x_0x_3 - x_1x_2 = 0$ は2点で交わることがわかる．さらに

(11) を $x_1x_3 - x_2^2 = 0$ に代入すると，

$$hs(1-h) = 0$$

だから，$s = 0$ (1 点が原点) か，または，$h = 0, 1$ で ℓ と円錐面 $x_1x_3 - x_2^2 = 0$ は 2 点で交わる．

$\therefore$ これらを全て満たすので，$h = 0$ または 1 でなければならない．

1 点が無限遠点の場合も C と ℓ は 2 点でしか交わらない．この 2 点は，$P([0,1])$ と $P([1,s])$ である．

C 上の 2 点を通る直線を考え，その直線がこの 2 点以外で交わることはないということを示せた． □

定理 22. ねじれ 3 次曲線 C 上の 1 点を通る全ての割線の族は C を含む 2 次円錐になる．

(証明). まず，C 上の 1 点を $P(a) = \begin{pmatrix} a \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix}$ とし，固定する．$P(a)$ と $P(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$ を通る直線 ℓ はパラメータ $t, h \in \mathbb{C}$ を用いて，

$$\ell : (1-h)P(a) + hP(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-h)a + ht \\ (1-h)a^2 + ht^2 \\ (1-h)a^3 + ht^3 \end{pmatrix} \tag{12}$$

と表せる．次に ℓ からパラメータ t, h を消去する．
まず，(12) の第 1 成分を変形すると，

$$h = \frac{x-a}{t-a}$$

となる．これを

$$y = (1-h)a^2 + ht^2$$

に代入し t を求めると，

$$t + a = \frac{y - a^2}{x - a}$$

と変形できる．これを

$$z = (1-h)a^3 + ht^3$$

に代入すると，

$$(z - a^3)(x-a) - (y-a^2)^2 + a(y-a^2)(x-a) - a^2(x-a)^2 = 0 \tag{13}$$

と表すことができる．ここで，$X = x - a, Y = y - a^2, Z = z - a^3$ とおくと，

$$ZX - Y^2 + aYX - a^2X^2 = 0 \tag{14}$$

これは (X, Y, Z) の斉次 2 次方程式になり 2 次円錐となる．(13) は (14) を $P(a) = \begin{pmatrix} a \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix}$ 方向に平行移動させたものである． $\square$

定理 23. 一般の 6 点を通るねじれ 3 次曲線 C がただ 1 つ存在する．

(証明). 6 点 $[\boldsymbol{p}_1], [\boldsymbol{p}_2], [\boldsymbol{p}_3], [\boldsymbol{p}_4], [\boldsymbol{p}_5], [\boldsymbol{p_6}] \in \mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ をとり，これに対応するベクトル $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3, \boldsymbol{p}_4, \boldsymbol{p}_5, \boldsymbol{p_6} \in \mathbb{C}^4$ をとる．この 6 個のベクトルを並べた行列を

$$P = (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3, \boldsymbol{p}_4, \boldsymbol{p}_5, \boldsymbol{p}_6) : 4 \times 6 \text{ 行列}$$

とする．$Q = (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3, \boldsymbol{p}_4)$ とおくと，$\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3, \boldsymbol{p}_4$ が同一平面上にないので Q は 4 次正則行列で逆行列が存在する．そこで，

$$Q^{-1}P = (\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}, \mathbf{e_4}, \boldsymbol{p}'_5, \boldsymbol{p}'_6)$$

とアフィン変換できる．ここで，$\boldsymbol{p}'_5, \boldsymbol{p}'_6$ の成分は 0 であることに注意する．

実際 $\boldsymbol{p}'_5$ の第 1 成分が 0 だと仮定して，$(\mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}, \mathbf{e_4}, \boldsymbol{p}'_5)$ を選んで行列式を求めると，行列式 $= 0$ となる．従ってこの 4 点は，同一平面上にあり，矛盾である．同様に議論して，$\boldsymbol{p}'_5$, $\boldsymbol{p}'_6$の成分 $\neq 0$ でなければならないことがわかる．

そこで

$$\boldsymbol{p}'_5 = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{pmatrix}$$

とおくと，D は正則行列で，$\boldsymbol{p}''_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ と書くと，

$$D^{-1}Q^{-1}P = (d_1\mathbf{e}_1, d_2\mathbf{e}_2, d_3\mathbf{e}_3, d_4\mathbf{e}_4, \boldsymbol{p}''_5, \boldsymbol{p}''_6)$$

となる．射影空間の点としては $[\mathbf{e}_i] = [d_i\mathbf{e}_i]$ だから，最初から $d_i = 1$ としても構わない．

$\boldsymbol{p}''_6 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}$ と書くと，$a_i \neq a_j \ (i \neq j)$ である．これを示そう．

例えば，$a_1 = a_2$ と仮定し，$(\mathbf{e_3}, \mathbf{e_4}, \boldsymbol{p}_5'', \boldsymbol{p}_6'')$ をとる．するとこれは，平面 $x_0 - x_1 = 0$ に含まれ，この 4 点が一般の位置にあることに矛盾する．よって，$a_i \neq a_j$ でなければならない．

以上から射影変換によって一般の 6 点は，

$$(\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}, \mathbf{e_4}, \boldsymbol{p}_5'', \boldsymbol{p}_5'') \tag{15}$$

と変換できることがわかる．つまり，どの 6 点を取っても射影変換によって，(15) の形で表せる．Γ のパラメータ表示を用いて，曲線 Γ を

$$\begin{aligned}\Gamma: \quad & \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^3(\mathbb{C}) \\ & [t_0, t_1] \mapsto \left[\frac{1}{t_0 + \frac{t_1}{a_1}}, \frac{1}{t_0 + \frac{t_1}{a_2}}, \frac{1}{t_0 + \frac{t_1}{a_3}}, \frac{1}{t_0 + \frac{t_1}{a_4}}\right]\end{aligned}$$

と定義する．すると，

$$\begin{aligned}[t_0, t_1] = [1, 0] &\longmapsto [1, 1, 1, 1] \longleftrightarrow p_5'' \\ [t_0, t_1] = [0, 1] &\longmapsto [a_1, a_2, a_3, a_4] \longleftrightarrow p_6''\end{aligned}$$

だから，Γ は $\boldsymbol{p}_5''$ と $\boldsymbol{p}_6''$ を通っている．また，Γ のパラメータの各座標を，$f = \prod_{i=1}^{4}(t_0 + \frac{t_1}{a_i})$ 倍した座標を，f_1, f_2, f_3, f_4 とすると，

$$\left[\frac{1}{t_0 + \frac{t_1}{a_1}}, \frac{1}{t_0 + \frac{t_1}{a_2}}, \frac{1}{t_0 + \frac{t_1}{a_3}}, \frac{1}{t_0 + \frac{t_1}{a_4}}\right] = [f_1, f_2, f_3, f_4],\ f_i = \frac{f}{t_0 + \frac{t_i}{a_i}} : 3\,\text{次式}$$

となる．例えば，$f_1 = (t_0 + \frac{t_1}{a_2})(t_0 + \frac{t_1}{a_3})(t_0 + \frac{t_1}{a_4})$ である．f_2, f_3, f_4 も同様に表す．すると，

$$[t_0, t_1] = [-1, a_1] \longmapsto [f_1, 0, 0, 0] = [1, 0, 0, 0] \longleftrightarrow \mathbf{e_1}$$

となって Γ は $\mathbf{e_1}$ を通ることがわかる．同様にして，Γ は，$\mathbf{e_2}$，$\mathbf{e_3}$，$\mathbf{e_4}$ も通る．よって，この 6 点をすべて通る．

一方，f_1, f_2, f_3, f_4 は 3 次式なので，Γ は 3 次曲線であるが，これを逆射影変換すると，元の $[\boldsymbol{p}_1], [\boldsymbol{p}_2], [\boldsymbol{p}_3], [\boldsymbol{p}_4], [\boldsymbol{p}_5], [\boldsymbol{p_6}]$ を通ってることがわかる．つまり Γ の逆射影変換は与えられた 6 点を通る 3 次曲線である．このようにして 3 次曲線の存在は示すことができた． □

「一般の 6 点を通るねじれ 3 次曲線 C がある」ことは示せたが,「ただ 1 つ」ということを示すには時間不足であった．

6　結論

本研究では，ベズーの定理を用いて空間における既約な曲線と平面の交点を求めるには,「複素数」「重複度」「無限遠点」を考慮することが重要ということが簡単な例を使っ

て理解することができた．またねじれ3次曲線の7つの性質についても理解することができた.

”一般の6点を通るねじれ3次曲線Cが「ただ1つ」存在することを確かめること．”が今後の課題である.

参考文献

[L] John B. Little，The Many Lives of the Twisted Cubic，Amer.Math.Mon, 2019.

[池田] 池田岳，数え上げ幾何学講義，東京大学出版会，2018.

[長谷川] 長谷川浩司, 線形代数, 日本評論社, 2004.