平面タイル貼りの対称群の生成元と関係式

青山学院大学　理工学部　物理・数理学科
学籍番号:15116065　鈴木 七海
指導教員 西山 享

February 19, 2020

Contents

1　序論

1.1　研究の背景

私が本研究を始めた理由は、3 年次の数理専門実験で M.A. アームストロング『対称性からの群論入門』([A]) を読み、図形の対称性に興味を持ったからである。本研究では、アルキメデスのタイル貼りの対称群の生成元と関係式について考える。

1.2　研究の主結果

アルキメデスのタイル貼りの対称群 p6m の基本領域を求め、その生成元と関係式を求めた。

1.3　本論文の構成

アルキメデスのタイル貼りについて説明する。アルキメデスのタイル貼りの対称群の基本領域の群の構造を調べる。そこから生成元と関係式を求める。§6 で p6m の生成元と関係式を求め、その証明をする。

2　アルキメデスのタイル貼り

アルキメデスのタイル貼りとは 2 種類以上の辺の長さの等しい正多角形で平面を覆い尽くし頂点形状が全て同じタイル貼りである。相似と回転、鏡映、平行移動で写りあうものを同一視すると 8 種類存在する。

それを図示すると次のようになる。

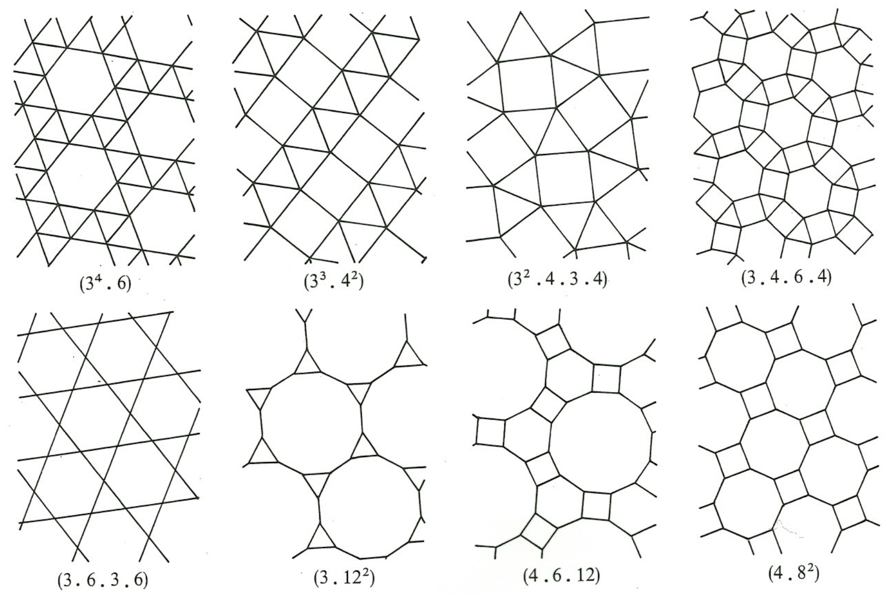

図 1　アルキメデスのタイル貼り

引用 [中川]

一つの頂点の周りの各正多角形の辺数をその順に並べて、たとえば左下のタイル貼りは 1 つの頂点の周りを考えると正三角形、正六角形、正三角形、正六角形と並んでいるので [3,6,3,6] というように表す。 これを巡回的に変換しても同一である。

3　平面結晶群

定義 1 (平面結晶群)**.** ユークリッド平面の合同変換の部分群 Γ が **平面結晶群** であるとは、Γ が 2 つの条件を満たすことである。

(i) Γ の作用は不連続である。

(ii) Γ に属する合同変換のうち、平行移動全体のなす部分群は、2 つの 1 次独立なベクトル $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ で生成される格子群 $\Gamma_{\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2}$ である。

定理 2 ((河野参照))**.** 平面結晶群は同型を除いて 17 種類存在する。

タイル貼りの対称性を表すために平面結晶群を用いる。

3.1　結晶群の国際記号

平面結晶群を表すのに国際記号が用いられる。その分類と記号を表の形にまとめておく。

表中の記号に現れる p,m,g,c と数字は、次のように表される。

- **p**rimitive:原始的
- 数:位数
- **m**irror:鏡映
- **g**lide reflection:並進鏡映
- **c**entered lattice:有心格子

p1	斜交格子	2 方向の平行移動のみ
p2	斜交格子	位数 2 の回転移動、鏡映および並進鏡映なし
pm	長方格子	平行な鏡映軸、回転移動なし
pg	長方格子	平行な並進鏡映軸、鏡映および並進鏡映なし
pmm	長方格子	２方向の直交する鏡映の軸、位数２の回転移動
pmg	長方格子	位数２の回転移動、平行な鏡映軸、 鏡映軸に直交する並進鏡映の軸
pgg	長方格子	位数２の回転移動、２方向の直交する並進鏡映軸
cm	菱形格子	平行な鏡映軸、 鏡映軸の中間に平行な並進鏡映軸、 回転移動なし
cmm	菱形格子	２方向の直交する鏡映軸、位数２の回転移動
p4	菱形格子	位数２、４の回転移動、鏡映および並進鏡映なし
p4m	正方格子	位数２、４の回転移動、３方向の鏡映軸、 ２方向の直交する並進鏡映軸
p4g	正方格子	位数２、４の回転移動、 2 方向の直交する鏡映軸、3 方向の並進鏡映軸
p3	六角格子	位数３の回転移動、鏡映および並進鏡映なし
p3m1	六角格子	位数３の回転移動、３方向の鏡映軸、３方向並進鏡映軸、 回転移動の中心は全て鏡映の軸上
p31m	六角格子	位数３の回転移動、３方向の鏡映軸、３方向並進鏡映軸、 回転移動の中心として鏡映の軸上にないものがある
p6	六角格子	位数２、３、６の回転移動、鏡映および並進鏡映なし
p6m	六角格子	位数２、３、６の回転移動、６方向の鏡映軸、 ６方向の並進鏡映軸

3.2　17 種類の結晶群とその原始的格子

結晶群を表すのに記号だけでなく、基本格子とその中にある回転の中心、鏡映の軸、並進鏡映の軸を図示するとわかりやすい。

下図の太い実線が鏡映軸、白丸が位数 2 の回転の中心、四角形が位数 3 の回転の中心、黒丸が位数 6 の回転の中心、破線が並進鏡映軸を表している。

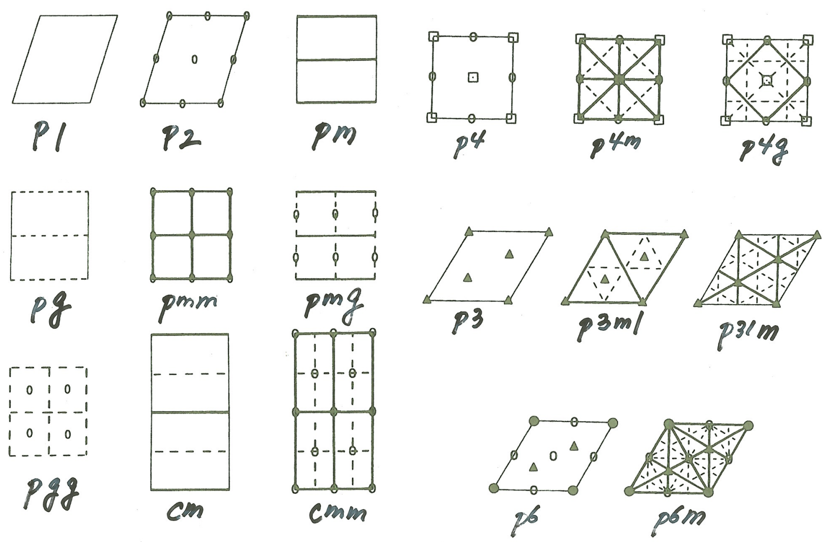

図 2 原始的格子

引用 [A]

4　アルキメデスのタイル貼りの結晶群

アルキメデスのタイル貼りはタイル貼りの中でも特殊なので、現れる結晶群 Γ も限られる。それを分類すると 5 種類になる。以下、タイル貼りごとに結晶群を記す。
赤のバツ印は位数 2 の回転の中心、三角形は位数 3 の回転の中心、四角形は位数 4 の回転の中心、丸は位数 6 の回転の中心、細い実線が鏡映軸、青色の線が並進鏡映軸を表している。

1. タイル $[3,6,3,6], [3,4,6,4], [4,6,12], [3,12^2]$ 6 方向の並進鏡映軸

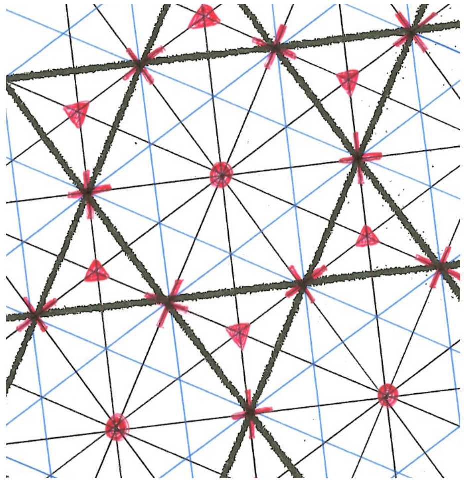

図 3 [3,6,3,6]

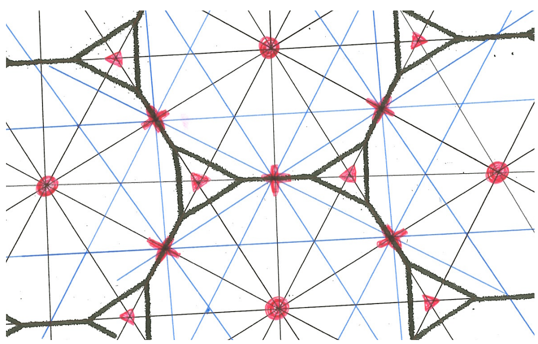

図 4 [3, 12^2]

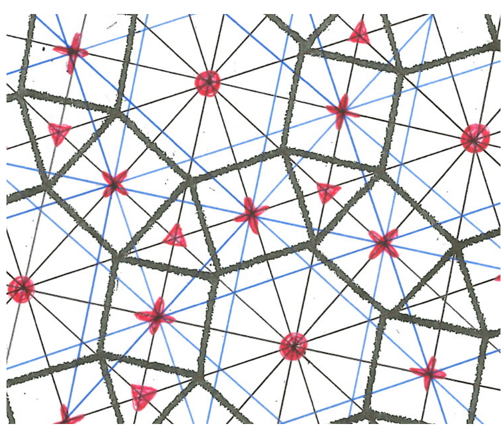

図 5 [3,4,6,4]

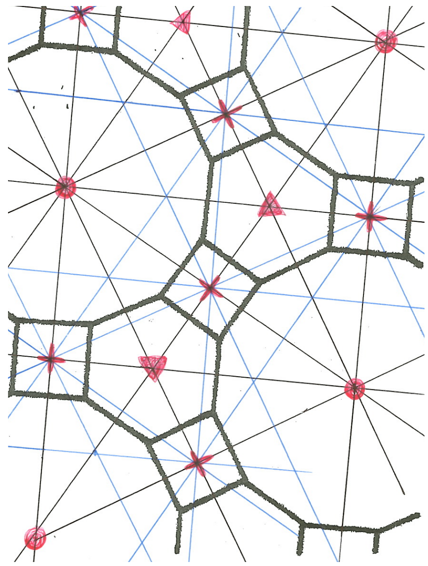

図 6 [4,6,12]

2. タイル $[4, 8^2]$ がある。
   p4m : 位数２，４の回転, 軸が３方向の鏡映, 軸が２方向の直交する並進鏡映

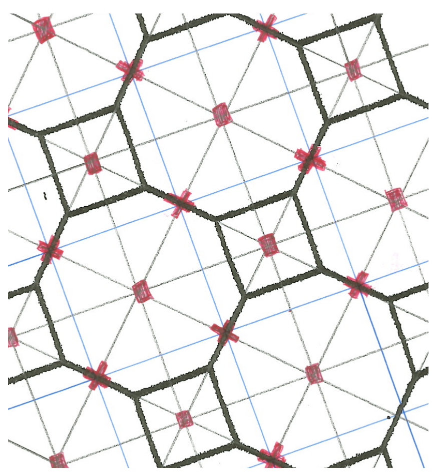

図 7 $[4, 8^2]$

3. タイル $[3^2, 4, 3, 4]$ がある。
   p4g : 位数２，４の回転, 軸が２方向の直交する鏡映, 軸が３方向の並進鏡映

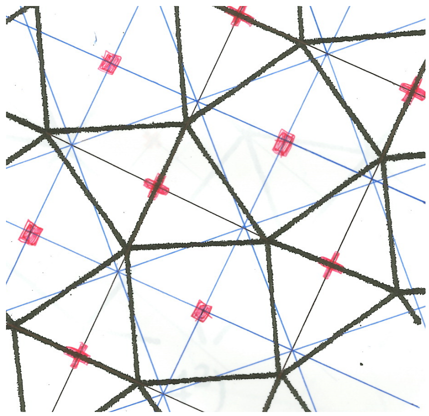

図 8 $[3^2, 4, 3, 4]$

4. タイル $[3^3, 4^2]$ がある。
   pmm :軸が２方向の直交する鏡映, 位数２の回転

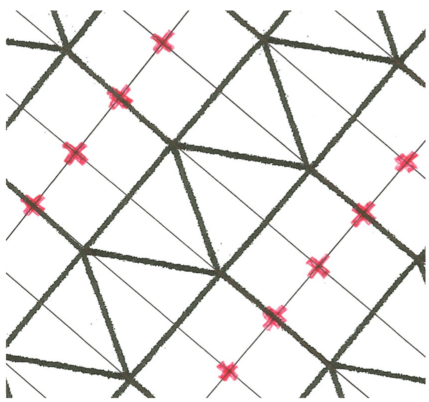

図 9 $[3^3, 4^2]$

5. タイル $[3^4, 6]$ がある。
   p6 : 位数 2, ３，６の回転, 鏡映および並進鏡映なし

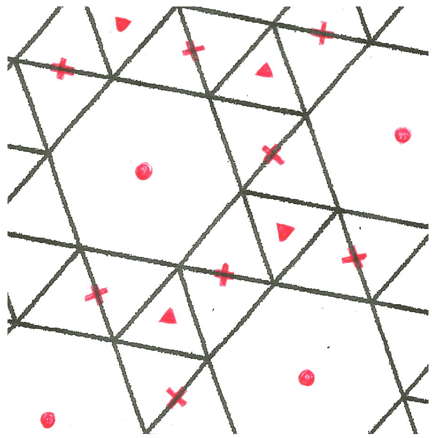

図 10 $[3^4, 6]$

5　基本領域の定義

§4 で考えた原始的格子は平行移動のなす部分群によって平面をくまなく覆い尽くす。このような領域を基本領域と呼ぶ。それを厳密に定義すると次のようになる。

定義 3 (基本領域)**.** ユークリッド平面の合同変換からなる不連続群 Γ に対して, 次の 2 つの条件を満たす領域 Δ を Γ の **基本領域** と呼ぶ。
(i) 領域 Δ の内部の相異なる 2 点は、 $g \in \Gamma$ によって互いにうつりあわない。つまり、
$\forall p \neq q \in \Delta \Rightarrow \forall g \in \Gamma$ に対して　$g(p) \neq q$ が成り立つ。
(ii) ユークリッド平面は Δ に $g \in \Gamma$ を作用させた像 $g(\Gamma)$ の和集合になる。

$$\mathbb{E}^2 = \bigcup_{g\in\Gamma} g(\Delta)$$

以下の例はどちらも同じ格子群の基本領域の例であるが、一意に定まらないことに注意する。

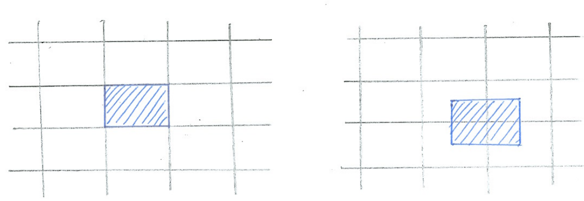

図 11　基本領域の例

6　平面結晶群の基本領域

アルキメデスのタイル貼りの対称群は 5 種類であった。この § ではその基本領域や群の構造を調べる。

6.1　対称群 p6m

6.1.1　対称群 p6m の基本領域

アルキメデスのタイル貼り $[3,12^2],[3,4,6,4],[4,6,12],[3,6,3,6]$ の対称群は p6m である。

図のように鏡映軸で囲まれた領域を基本領域とする。

ユークリッド平面の平行でない直線 l_1, l_2 について、鏡映 r_1, r_2 を考える。直線 l_1, l_2 が、点 C で交わるとき、鏡映の合成 r_1r_2 は C を中心とする回転移動になる。l_1 から l_2 への 2 つの軸のなす角が角 θ であるとき、r_1r_2 は角 2θ の回転になる。

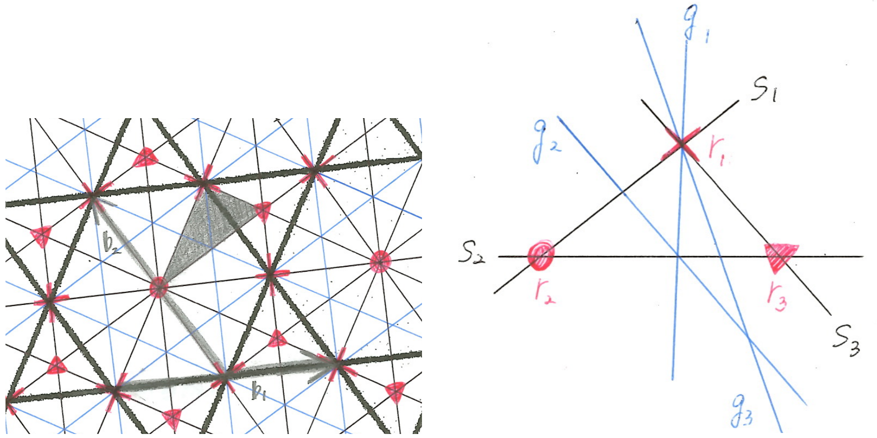

図 12　[3,6,3,6] の基本領域

この場合には、原始的格子は基本領域が 12 個集まってできていることに注意する。その際に平行移動と表す記号として $t(\mathbf{v})$ を求める。ただし、$t(\mathbf{v})$ は、ベクトル $\mathbf{v}$ に対して

$$t(\mathbf{v})(\mathbf{P}) = \mathbf{P} + \mathbf{v} \quad (\mathbf{P} \in \mathbb{R}^2)$$

以下、基本領域に関係した対称群 Γ の元を列挙する。(図 12 参照)

- 平行移動 $t(\mathbf{b}_1)$,$t(\mathbf{b}_2)$

$$\mathbf{b}_1 = 2(\overrightarrow{R_2R_3} + \frac{1}{2}\overrightarrow{R_2R_1})$$
$$\mathbf{b}_2 = 2(\overrightarrow{R_2R_3} + \frac{1}{2}\overrightarrow{R_2R_1})$$

- 回転の中心が領域 Δ 内にある回転 r_1, r_2, r_3
  回転の中心を R_1 とする π 回転を r_1
  回転の中心を R_2 とする $\frac{2}{3}\pi$ 回転を r_2
  回転の中心を R_3 とする $\frac{\pi}{3}$ 回転を r_3

- 軸が領域 Δ と線分を共有するような鏡映 s_1, s_2, s_3
  s_1 は R_1 と R_3 を通る直線 l_1 を軸とする鏡映
  s_2 は R_2 と R_3 を通る直線 l_2 を軸とする鏡映
  s_3 は R_1 と R_2 を通る直線 l_3 を軸とする鏡映

- 軸が領域 Δ と線分を共有するような並進鏡映 g_1, g_2, g_3

  R_2 と R_3 の中点を M、R_3 と M の中点を N とする。

  g_1 は R_1 と M を通る直線 m_1 を軸とする並進鏡映
  g_2 は M を通り、直線 l_3 と平行な直線 m_2 を軸とする並進鏡映
  g_3 は R_1 と N を通る直線 m_3 を軸とする並進鏡映

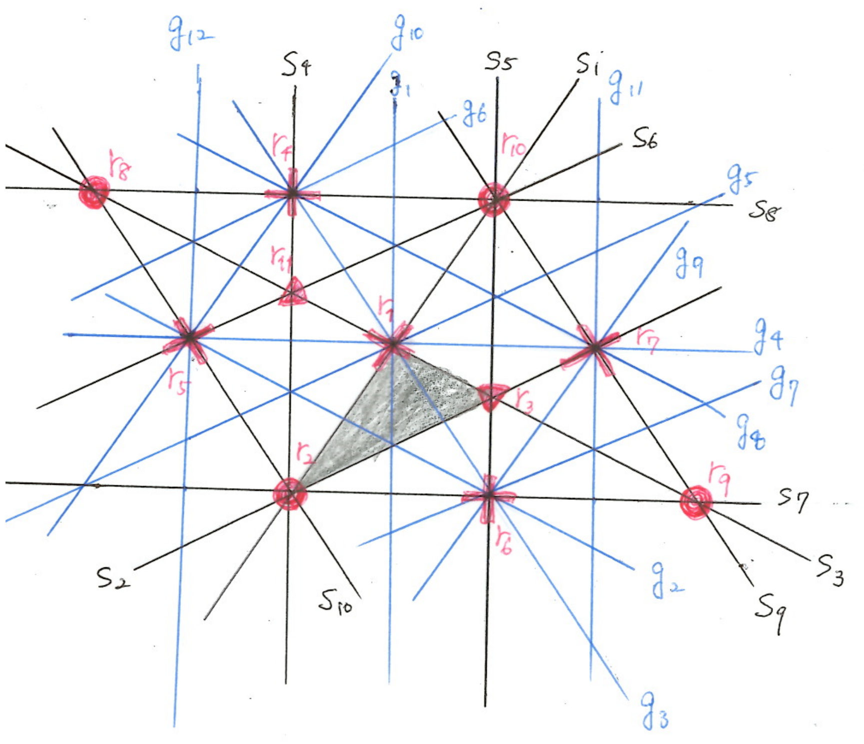

図 13　p6m の原始的格子

6.1.2 対称群 p6m の生成元と関係式

定理 4. Γ=p6m とする。対称群 p6m は $\{s_1, s_2, s_3\}$ で生成される。

$$\Gamma = \langle s_1, s_2, s_3 \rangle$$

関係式は以下のようになる。

- ${s_1}^2, {s_2}^2, {s_3}^2$
- $(s_1 s_2)^6, (s_2 s_3)^3, (s_3 s_1)^2$

この Γ はアフィン・ルート系 $\tilde{G}_2$ に付随したアフィン・ワイル群と同型であることが知られている。

(証明)

まず、回転 r_i を s_i で書く。次に $t(\mathbf{b}_\mathrm{i})$ を s_i で表すと、最後に g_i を $s_i, t(\mathbf{b}_\mathrm{i})$ で書く。

用いた式

- ${r_1}^2 = e$
- ${r_2}^3 = e$
- ${r_3}^6 = e$
- $s_1 s_2 = r_3$
- $s_2 s_3 = r_2$
- $s_3 s_2 = r_1$
- $g_1 = t(\mathbf{b}_1)(\mathbf{b}_2) s_3 t(\mathbf{b}_2) {r_3}^{-1} s_1 t(-\mathbf{b}_2) s_2 s_1 s_3$
- $g_2 = s_2 {g_1}^{-1} s_2$
- $g_3 = s_1 g_1 s_1$
- $t(\mathbf{b}_1) = (\mathrm{s}_1 \mathrm{s}_2)^2 (\mathrm{s}_3 \mathrm{s}_2)^2$
- $t(\mathbf{b}_2) = (\mathrm{s}_1 \mathrm{s}_2)^2 (\mathrm{s}_3 \mathrm{s}_2)(\mathrm{s}_1 \mathrm{s}_2)^2$

次に原始的格子に関する対称群の元を s_1, s_2, s_3 で表す。

- $s_4 = r_2 s_2 {r_2}^{-1}$
- $s_5 = r_3 s_3 {r_3}^{-1}$
- $s_6 = t(\mathbf{b})_1 s_2 {t(\mathbf{b})_1}^{-1}$
- $s_7 = {r_2}^{-1} s_1 r_2$
- $s_8 = t(\mathbf{b}_2) s_7 t(\mathbf{b}_2)$
- $s_9 = t(\mathbf{b}_1) s_{10} t(\mathbf{b}_1)^{-1}$
- $s_{10} = r_2 s_1 {r_2}^{-1}$
- $r_4 = s_7 r_5 s_7$
- $r_5 = s_4 r_1 s_4$
- $r_6 = s_2 r_1 s_2$

- $r_7 = s_5 r_1 s_5$
- $r_8 = t(\mathbf{b}_2)^{-1} r_2 t(\mathbf{b})_2$
- $r_9 = t(\mathbf{b}_1)^{-1} r_2 t(\mathbf{b})_1$
- $r_{10} = t(\mathbf{b}_2)^{-1} r_9 t(\mathbf{b})_2$
- $r_{11} = s_1 r_3 s_1$
- $g_4 = s_7 s_6 s_5 s_3 s_1$
- $g_5 = s_7 g_1 s_7$
- $g_6 = s_6 g_5 s_6$
- $g_7 = s_2 g_5 s_2$
- $g_8 = s_7 g_2 s_7$

原始的格子を平行移動するとユークリッド平面をくまなく覆うことができるので、Γ の任意の元を $\{s_1, s_2, s_3\}$ で表すことができる。(図 14 参照)

(例)

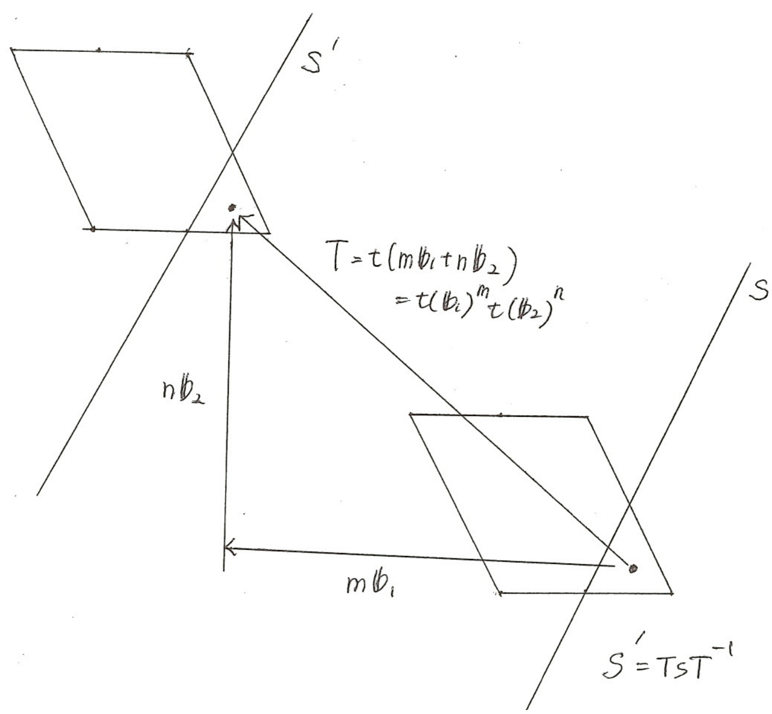

図 14　原始的格子の平行移動

よって、p6m は s_1, s_2, s_3 で生成される。

7　予想

7.1　p4m

7.1.1　p4m の基本領域

図のように鏡映軸で囲まれた領域を基本領域とする。アルキメデスのタイル貼り $[4, 8^2]$ の対称群は p4m である。

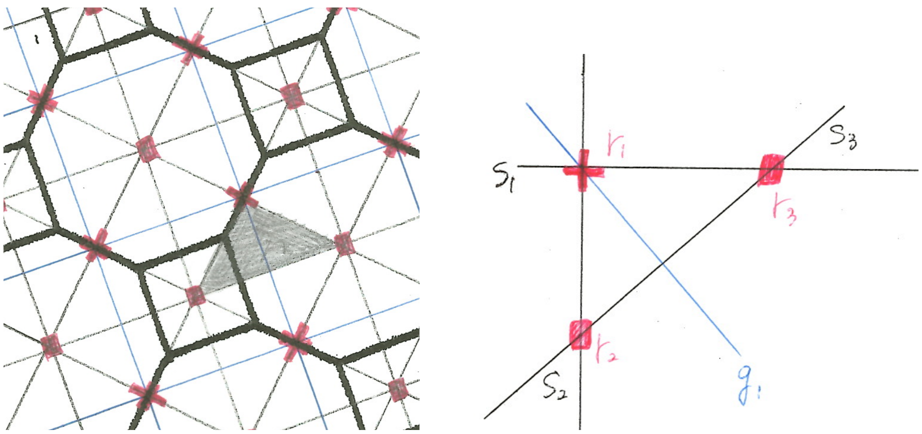

図 15　$[4, 8^2]$ の基本領域

基本領域に関係した対称群 Γ の元を以下列挙する。(図 15 参照)

- 平行移動 $t(\mathbf{b}_1)$,$t(\mathbf{b}_2)$
- 回転の中心が領域 Δ 内にある回転 r_1, r_2, r_3
- 軸が領域 Δ と線分を共有するような鏡映 s_1, s_2, s_3
- 軸が領域 Δ と線分を共有するような並進鏡映 g_1

7.1.2　p4m の生成元と関係式

定理 5. Γ=p4m とする。対称群 p4m は $\{s_1, s_2, s_3\}$ で生成される。

$$\Gamma = \langle s_1, s_2, s_3 \rangle$$

- ${s_1}^2, {s_2}^2, {s_3}^2$
- $(s_1 s_2)^2, (s_2 s_3)^4, (s_3 s_1)^4$

用いた式

- $s_1 s_2 = r_2, s_2 s_3 = r_3, s_3 s_1 = r_1$

7.2 p4g

7.2.1 p4g の基本領域

図のように鏡映軸で囲まれた領域を基本領域とする。アルキメデスのタイル貼り $[3^2, 4, 3, 4]$ の対称群は p4g である。

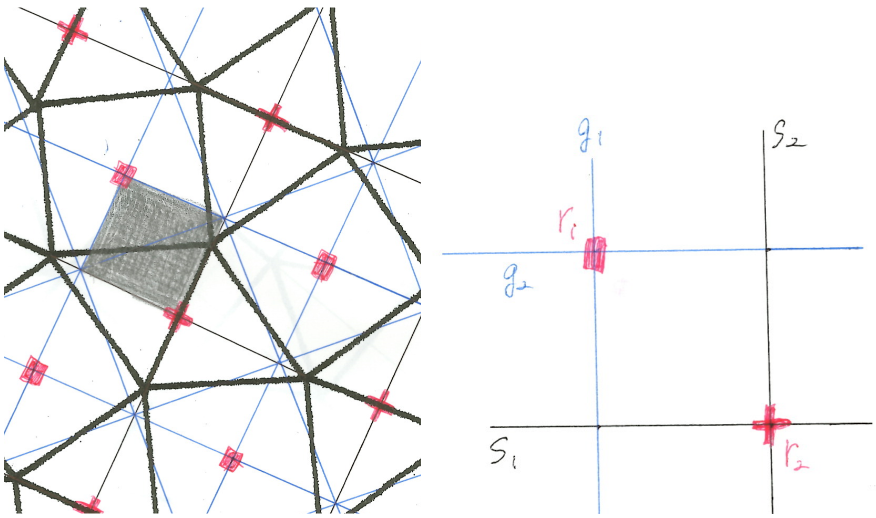

図 16　$[3^2, 4, 3, 4]$ の基本領域

以下、基本領域に関係した対称群 Γ の元を列挙する。(図 16 参照)

- 平行移動 $t(\mathbf{b}_1)$,$t(\mathbf{b}_2)$

- 回転の中心が領域 Δ 内にある回転 r_1, r_2

- 軸が領域 Δ と線分を共有するような鏡映 s_1, s_2

- 軸が領域 Δ と線分を共有するような並進鏡映 g_1, g_2

7.2.2 p4g の生成元と関係式

定理 6. Γ=p4g とする。対称群 p4m は $\{s_1, s_2, r_1, r_2\}$ で生成される。

$$\Gamma = \langle s_1, s_2, r_1, r_2 \rangle$$

$\mathrm{Sym(p4g)} = \langle \mathrm{s_1, s_2, r_1, r_2} \rangle$
関係式は以下のようになる。

- $s_1{}^2, s_2{}^2$

用いた式

- $s_1{}^2, s_2{}^2$

7.3 pmm

7.3.1 pmm の基本領域

図のように鏡映軸で囲まれた領域を基本領域とする。アルキメデスのタイル貼り $[3^3, 4^2]$ の対称群は pmm である。

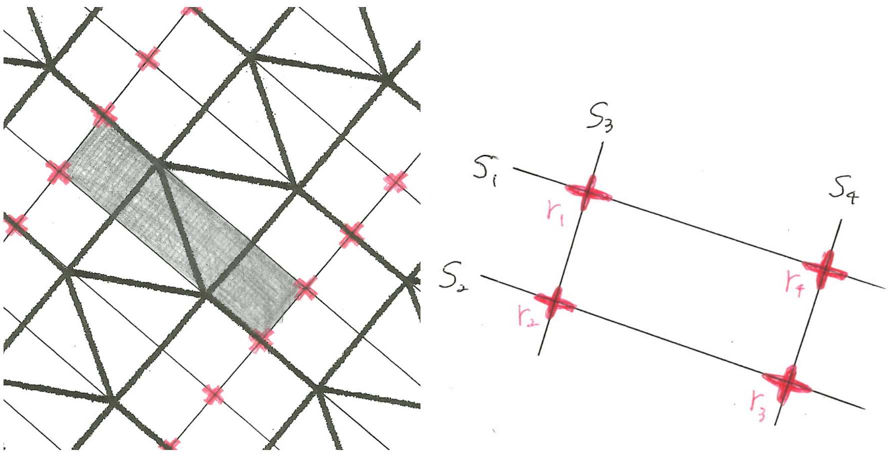

図 17　$[3^3, 4^2]$ の基本領域

基本領域に関係した対称群 Γ の元を以下列挙する。(図 17 参照)

- 平行移動 $t(\mathbf{b}_1)$,$t(\mathbf{b}_2)$

- 回転の中心が領域 Δ 内にある回転 r_1, r_2, r_3, r_4

- 軸が領域 Δ と線分を共有するような鏡映 s_1, s_2, s_3, s_4

7.3.2 pmm の生成元と関係式

定理 7. Γ=pmm とする。対称群 pmm は $\{s_1, s_2, s_3, s_4\}$ で生成される。

$$\Gamma = \langle s_1, s_2, s_3, s_4 \rangle$$

この Γ はアフィン・ルート系 $\tilde{I}_1 \times \tilde{I}_1$ に付随したアフィン・ワイルド群と同型であることが知られている。

　関係式は以下のようになる。

- ${s_1}^2, {s_2}^2, {s_3}^2, {s_4}^2,$
- $(s_1 s_3)^2, (s_2 s_3)^2, (s_2 s_4)^2, (s_3 s_4)^2,$

用いた式

- $s_1 s_3 = r_1, s_2 s_3 = r_2, s_2 s_4 = r_3, s_3 s_4 = r_4$
- ${s_1}^2, {s_1}^2, {s_1}^2, {s_1}^2, {s_1}^2, {s_1}^2, {s_1}^2, {s_1}^2$
- $t(\mathbf{b}_1) = \mathrm{s_1 s_2}, \mathrm{t}(\mathbf{b}_2) = \mathrm{s_4 s_3}$

7.4 p6

7.4.1 p6 の基本領域

図のように位数 2,3,6 の回転の中心を結んだ内部を基本領域とする。アルキメデスのタイル貼り $[3^3, 6]$ の対称群は p6 である。

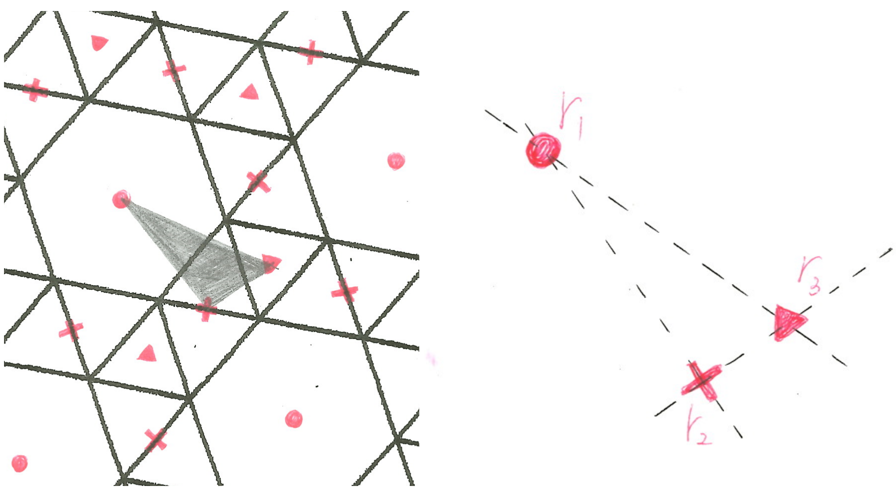

図 18 $[3^4, 6]$ の基本領域

基本領域に関係した対称群 Γ の元を以下列挙する。(図 18 参照)

- 平行移動 $t(\mathbf{b}_1)$,$t(\mathbf{b}_2)$
- 回転の中心が領域 Δ 内にある回転 r_1, r_2, r_3

7.4.2 p6 の生成元と関係式

定理 8. Γ=p6 とする。対称群 p6 は $\{r_1, r_2\}$ で生成される。
関係式は以下のようになる。

- $(r_1 r_2)^3, r_1^6, r_2^6$
- $(r_1 r_2 r_1)^2$

8 将来の展望

p4m, p4g, pmm, p6 に関する計算を行い、予想を確かめる。

本研究の遂行に当たり、ご指導を頂きました西山先生に感謝致します。卒業研究発表会において助言を頂いた，中山先生，増田先生，松田先生 に感謝致します。そして，一年間を共に過ごした西山研究室の皆様に感謝します.

References

[河野] 河野俊文『結晶群』共立出版, 2015.

[A] M.A. アームストロング (佐藤信哉 訳)『対称性からの群論入門』丸善出版, 2012.

[中川] 中川宏 http://woodenpolyhedra.web.fc2.com/201604.

[松本] 松本幸夫 https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/tambara/docs/.l4h20060722-2matsumoto.

[一松] 一松信『正多面体を解く』東海大学出版会, 1983.