

ねじれ3次曲線と平面ベジエ曲線

青山学院大学 理工学部 物理・数理学科
学籍番号:15116031 岡村 龍一
指導教員 西山 享

2020年2月18日

目次

1	序論	2
1.1	研究の背景	2
1.2	研究の主結果	2
1.3	研究成果のまとめ	6
1.4	本論文の構成	6
2	弧長パラメーターとフレネ・セレの公式	7
2.1	弧長パラメーター	7
2.2	曲率	7
2.3	捩率	9
2.4	フレネ・セレの公式	10
3	ねじれ3次曲線の曲率, 捩率	10
3.1	ねじれ3次曲線の曲率	11
3.2	ねじれ3次曲線の捩率	13
4	曲線の弧長に関するテイラー展開	14
5	平面ベジェ曲線	16
5.1	平面ベジェ3次曲線	17
6	尖点, 交差点をもつベジェ曲線の制御点の条件	19
6.1	尖点を持つベジェ曲線	19
6.2	交差点を持つベジェ曲線	23
7	最後に	25
7.1	卒業研究発表会での質問内容	25
7.2	今後の課題	26

1 序論

1.1 研究の背景

卒業研究のセミナーで池田岳先生の「数え上げ幾何学」([池田])を勉強して幾何学に興味を持ち、卒研のテーマを選ぶためにねじれ3次曲線について書かれている論文[L]を勉強した。ねじれ3次曲線とは、

$$C: \mathbf{x}(t) = (t, t^2, t^3) \quad (t: \text{パラメーター})$$

で表される空間曲線で、ここでいう「ねじれ」という意味は、曲線がどの平面にも含まれないという意味である。

なぜねじれ3次曲線に興味を持ったかという点 [L] に書かれている「一般曲線は近似的にねじれ3次曲線のアフィン変換になる」という事実と「ねじれ3次曲線の（アフィン変換）を平面に射影するとベジェ曲線という曲線が得られる」という記述があったからである。

今回の研究では、手始めにねじれ3次曲線の曲率・捩率を求めたが、初めは弧長パラメーターを用いる定義式から値を求めたので、想像以上に計算に手こずった。この過程で、一般のパラメーターを用いた曲率や捩率の公式や、それらとねじれ3次曲線 C との関係などを考察することになった。その後、ねじれ3次曲線 C と平面ベジェ曲線の関係について研究を行なった。

1.2 研究の主結果

平面ベジェ曲線を導入するためにまず、バーンスタイン基底関数を定義する。自然数 N に対して、 t の多項式を、

$$B_{i,N-1}(t) = \binom{N-1}{i} t^i (1-t)^{(N-1)-i} \quad (0 \leq i \leq N-1)$$

で定義し、 $B_{i,N-1}(t)$ をバーンスタイン基底関数という。次に平面ベジェ曲線を定義する。

定義 1. 平面上の相異なる N 個の点 $\mathbb{P}_0, \mathbb{P}_1, \dots, \mathbb{P}_{N-1} \in \mathbb{R}^2$ をとる。これらの点を用いて、 t をパラメーターとする平面曲線を、

$$\Gamma: \phi(t) = \sum_{i=0}^{N-1} B_{i,N-1}(t) \mathbb{P}_i \quad (t \in [0, 1]: \text{パラメーター})$$

と定義する。この Γ を平面ベジェ曲線といい $\mathbb{P}_0, \mathbb{P}_1, \dots, \mathbb{P}_{N-1}$ を Γ の制御点という。

ベジェ曲線 Γ は制御点 $\{\mathbb{P}_i\}_{i=0}^{N-1}$ によって決まる平面曲線である。実は、平面ベジェ曲線 Γ は空間内のねじれ3次曲線 C を平面に射影した曲線であることがわかる (§5 参照)。つまり Γ は C のアフィン射影である。

本論文では平面ベジェ3次曲線を主に扱っているが、定義より、

$$B_0(t) = (1-t)^3, B_1(t) = 3t(1-t)^2, B_2(t) = 3t^2(1-t), B_3(t) = t^3$$

とおくと、

$$\phi(t) = \sum_{i=0}^3 B_{i,3}(t)\mathbb{P}_i \quad (t \in [0, 1]) \quad (1)$$

がベジェ曲線となる。一般に、制御点が N 個のベジェ曲線は $N-1$ 次曲線になるので、3次曲線の場合は4つの制御点がある。すでに述べたように、平面ベジェ曲線 Γ はねじれ3次曲線 C のアフィン射影であるが、 C が滑らかであるにも関わらず、ベジェ曲線 Γ には尖点や交差点が現れる場合がある。詳しい内容は §6 で例で説明するが、その時、どのような条件で制御点をとってくれば尖点や交差点が現れるのかを紹介する。

準備として、バーンスタイン基底関数に対応してできるねじれ3次曲線のアフィン変換 $\Phi(t)$ と制御点 \mathbb{P}_i の説明をする。 $\Phi(t)$ は $\{B_{i,3}\}_{i=0}^{N-1}$ を並べて得られる \mathbb{R}^4 内のベクトルとする。 ${}^T\mathbf{a}$ でベクトル \mathbf{a} の転置を表すと、

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= {}^T(B_0(t), B_1(t), B_2(t), B_3(t)) \\ &= {}^T((1-t)^3, 3(1-t)^2t, 3(1-t)t^2, t^3) \\ &= {}^T(1-3t+3t^2-t^3, 3t-6t^2+3t^3, 3t^2-3t^3, t^3) \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t^2 \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t^3 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である。以下、

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -1 \\ 3 & -6 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とおく。また、制御点を

$$\mathbb{P}_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} \quad (i = 0, 1, 2, 3)$$

と書く。そうすると $\phi(t)$ の定義式 (1) より、

$$\phi(t) = P^T\Phi$$

と表すことができる. $\Phi(t)$ の微分は,

$$\Phi'(t) = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -1 \\ 3 & -6 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 3t^2 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 3t \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 3t^2 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と書ける. 以下,

$$a = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とおく. 以上で記号の準備が終わったので, ベジエ曲線の形状と制御点の対応について紹介する.

1. 尖点が現れる場合:

$\phi(t)$ の定義式より, $\phi(t) = \mathbb{P}\Phi(t)$ なので微分は, $\phi'(t) = \mathbb{P}\Phi'(t)$ となる. 尖点では Γ は滑らかでなく, 曲率が定義できないので, その点での微分は,

$$|\phi'(t)| = 0$$

を満たさなければならない. (微分が 0 でなければその点では滑らかになってしまう.)
制御点からなる行列を 2 通りに

$$P = (\mathbb{P}_0, \mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2, \mathbb{P}_3) = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^t u \\ {}^t v \end{pmatrix} \quad (2)$$

と表す. つまり,

$${}^t u = (x_0, x_1, x_2, x_3) \quad {}^t v = (y_0, y_1, y_2, y_3) \quad (u, v \in \mathbb{R}^4)$$

であって, u, v は制御点の x 座標, y 座標を横に並べたベクトルである.

定理 1 (尖点が現れるための必要条件). 制御点 P を式 (2) のように表した時, $t (0 \leq t \leq 1)$ が

$$\begin{pmatrix} c \cdot u & b \cdot u & a \cdot u \\ c \cdot v & b \cdot v & a \cdot v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \end{pmatrix} = 0 \quad (3)$$

を満たせば尖点が現れる. つまり, 式 (3) を満たす \Rightarrow 尖点が現れる

例 1. 制御点 $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ の時の例. $t = \frac{1}{2}$ で尖点が現れる.

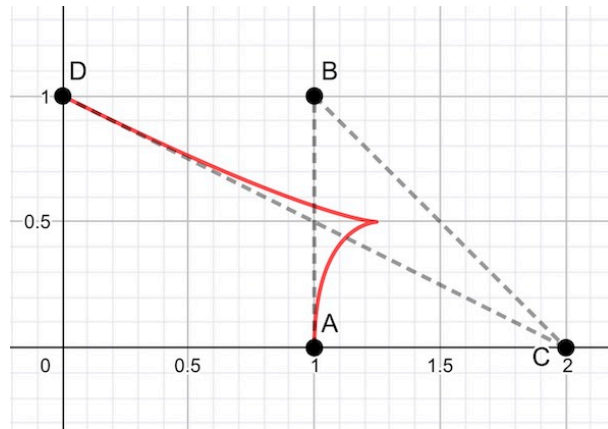


図 1: 尖点のあるベジエ曲線

2. 交差点が現れる場合：ベジエ曲線が交差点を持つときは、

$$\begin{cases} \phi(t) = P\Phi(t) \\ \phi(s) = P\Phi(s) \end{cases} \quad (0 \leq t < s \leq 1)$$

とおいた時、 $\phi(t) = \phi(s)$ を満たさなければならない。

定理 2 (交差点を持つ必要十分条件). $(0 \leq t < s \leq 1)$ が、

$$PA \begin{pmatrix} 1 \\ t+s \\ t^2+ts+s^2 \end{pmatrix} = 0, \quad A = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -1 \\ 3 & -6 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を満たす時、 $\phi(t) = \phi(s)$ で交差点が現れる。

例 2. 制御点 $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/6 & 0 \\ 0 & 1 & -1/6 & 1 \end{pmatrix}$ の時の例. $t = \frac{1}{3}, s = \frac{2}{3}$ で交差点が現れる。

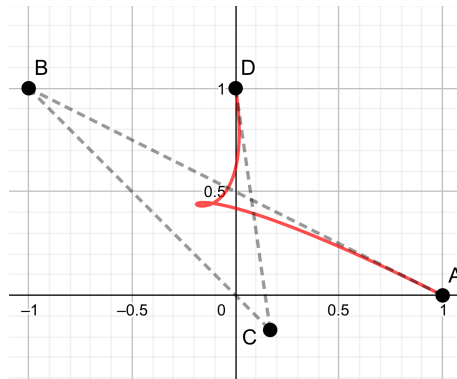


図 2: 交差点を持つベジェ曲線

(注意：尖点があるようにも見えるが，この図は交差点を持つベジェ曲線である)

1.3 研究成果のまとめ

ねじれ3次曲線の曲率・捩率の値を求めることができた．平面ベジェ3次曲線の曲率も求めることができたが，あまりにも複雑な値になったので本論文では割愛する．そして一番興味を持って研究した尖点・交差点を持つベジェ曲線の制御点の条件が分かった．

1.4 本論文の構成

まず§2では弧長パラメーターとフレネ・セレの公式について復習する．この後の曲率・捩率の公式を紹介する際に理解を深めやすくするためである．§3では曲率・捩率を弧長パラメーターによって定義する．この定義は計算する際には複雑になってしまうことがよくあるので，一般のパラメーター t を用いた曲率・捩率の公式を導出する．パラメーターによらない形で公式をかくと，計算する際に弧長パラメーターを求める必要がない．§4ではねじれ3次曲線 C について説明する．ここでは手始めに C の曲率・捩率を求めた．求める際に定義式と一般の公式両方を使って計算した．§5では一般曲線の弧長に関するテイラー展開を3次まで求めた．ここでは，一般曲線は近似的にねじれ3次曲線の（アフィン変換）になることを記述している．以上で準備が終わる．§6では平面ベジェ曲線を定義して，§7では本論文におけるメインテーマであるベジェ曲線が尖点・交差点を持つ時，どのような条件で制御点を取ればいいのかについて考察する．最後に卒業研究発表会での先生方からの質問への回答と，今後の課題をまとめて書いた．

2 弧長パラメーターとフレネ・セレの公式

2.1 弧長パラメーター

定義 2 (C の弧長パラメーター [小林]). 空間曲線のパラメーター表示を,

$$C : \mathbf{x}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \in \mathbb{R}^3 \quad (a \leq t \leq b)$$

とする. C の弧長を,

$$s = s(t) = \int_0^t \left| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right| dt$$

と決めると t は s の関数になり, そこで t の代わりに s をパラメーターにとるとき, s を弧長パラメーターと呼ぶ. この時 t は s の関数 ($s(t)$ の逆関数) であるので $t(s)$ と表す. 従って ($\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t(s))$) も s の関数になる. 以後, $\mathbf{x}(t(s))$ のことを $\mathbf{x}(s)$ とも書く事にする. また, t に関する微分を $\dot{\mathbf{x}}(t)$, s に関する微分を $\mathbf{x}'(s)$ と書いて区別する. (この論文では, s は必ず弧長パラメーターを表す.)

2.2 曲率

曲線を弧長パラメーターによって $\mathbf{x}(s)$ と表すと, 運動の速さは一定で 1 である. そこで単位速度ベクトルを,

$$\mathbf{e}_1(s) = \mathbf{x}'(s) = {}^T(x'(s), y'(s), z'(s))$$

と表す.

定義 3 (曲率の定義 [小林]). s を弧長パラメーターとすると,

$$\kappa(s) = \sqrt{\mathbf{e}_1'(s) \cdot \mathbf{e}_1'(s)} = \sqrt{x''(s)^2 + y''(s)^2 + z''(s)^2}$$

とにおいて, $\kappa(s)$ を曲率と呼ぶ.

一般のパラメーター t で曲率を計算するには次の定理を用いると良い.

定理 3 (曲率の一般表示). $\mathbf{x}(t)$ を一般のパラメーターに関する曲線の表示とする時,

$$\kappa(t) = \frac{1}{|\dot{\mathbf{x}}(t)|^3} |\dot{\mathbf{x}}(t) \times \ddot{\mathbf{x}}(t)| \quad (t : \text{パラメーター})$$

が成り立つ. 但し $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ はベクトル \mathbf{a}, \mathbf{b} の外積を表す.

(証明) この証明では, (\mathbf{a}, \mathbf{b}) は \mathbf{a} と \mathbf{b} の内積を表す. 合成関数の微分公式を使うと,

$$\mathbf{e}_1'(s) = \frac{d}{ds} \mathbf{e}_1(s) = \frac{d}{ds} \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt} \frac{dt}{ds} \right) = \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} \cdot \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 + \frac{d\mathbf{x}}{dt} \cdot \frac{d^2t}{ds^2} \quad (4)$$

$\left| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right| = \sqrt{(\dot{\mathbf{x}}(t), \dot{\mathbf{x}}(t))} = v$ とおくと, $\frac{ds}{dt} = v$ が成立することに注意する. $\frac{d^2t}{ds^2}$ の値は,

$$\frac{d^2t}{ds^2} = \frac{d}{ds} \left(\frac{dt}{ds} \right) = \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{v} \right) = -\frac{1}{v^2} \frac{dv}{ds} \quad (5)$$

$v = |\dot{\mathbf{x}}(t)|$, $v^2 = (\dot{\mathbf{x}}(t), \dot{\mathbf{x}}(t))$ であることに注意して,

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} v^2 &= 2v \cdot v' \\ \frac{d}{ds} (\dot{\mathbf{x}}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) &= 2(\dot{\mathbf{x}}(t), \ddot{\mathbf{x}}(t)) \left(\frac{dt}{ds} \right) = \frac{2}{v} (\dot{\mathbf{x}}(t), \ddot{\mathbf{x}}(t)) \quad \therefore v' = \frac{1}{v^2} (\dot{\mathbf{x}}(t), \ddot{\mathbf{x}}(t)) \end{aligned}$$

この式を式 (5) に代入すると

$$\frac{d^2t}{ds^2} = -\frac{1}{v^4} (\dot{\mathbf{x}}(t), \ddot{\mathbf{x}}(t)) \quad (6)$$

となる. 式 (4) を書き換えると.

$$\mathbf{e}_1'(s) = \frac{1}{v^2} \ddot{\mathbf{x}}(t) - \left(\frac{(\dot{\mathbf{x}}(t), \ddot{\mathbf{x}}(t))^2}{v^4} \right) \dot{\mathbf{x}}(t)$$

となる. $\kappa(s)$ は $\mathbf{e}_1'(s)$ の長さなので,

$$\begin{aligned} \kappa^2(s) &= \mathbf{e}_1'(s) \cdot \mathbf{e}_1'(s) \\ &= \left\{ \frac{1}{v^2} \ddot{\mathbf{x}}(t) - \left(\frac{(\dot{\mathbf{x}}(t), \ddot{\mathbf{x}}(t))}{v^4} \right) \dot{\mathbf{x}}(t) \right\} \cdot \left\{ \frac{1}{v^2} \ddot{\mathbf{x}}(t) - \left(\frac{(\dot{\mathbf{x}}(t), \ddot{\mathbf{x}}(t))}{v^4} \right) \dot{\mathbf{x}}(t) \right\} \\ &= \frac{(\ddot{\mathbf{x}}(t), \ddot{\mathbf{x}}(t))}{v^4} - 2 \frac{(\dot{\mathbf{x}}(t), \ddot{\mathbf{x}}(t))^2}{v^6} + \frac{(\dot{\mathbf{x}}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) (\dot{\mathbf{x}}(t), \ddot{\mathbf{x}}(t))^2}{v^8} \\ &= \frac{(\dot{\mathbf{x}}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) (\ddot{\mathbf{x}}(t), \ddot{\mathbf{x}}(t)) - (\dot{\mathbf{x}}(t), \ddot{\mathbf{x}}(t))^2}{(\dot{\mathbf{x}}(t), \dot{\mathbf{x}}(t))^3} \end{aligned}$$

ここで, $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = (\mathbf{a}, \mathbf{a})(\mathbf{b}, \mathbf{b}) - (\mathbf{a}, \mathbf{b})^2$ だから,

$$\kappa(t) = \frac{1}{|\dot{\mathbf{x}}(t)|^3} |\dot{\mathbf{x}}(t) \times \ddot{\mathbf{x}}(t)|$$

が成り立つ.

2.3 振率

$\mathbf{e}_1(s)$ の法線方向にある単位ベクトルを,

$$\mathbf{e}_2(s) = \frac{1}{\kappa(s)} \cdot \mathbf{e}_1'(s) \quad (7)$$

と表し, $\mathbf{e}_2(s)$ を 主法線ベクトル と呼ぶ. また, $\mathbf{e}_1(s), \mathbf{e}_2(s)$ と直交する単位ベクトルを外積を用いて,

$$\mathbf{e}_3(s) = \mathbf{e}_1(s) \times \mathbf{e}_2(s) \quad (8)$$

で定義し, $\mathbf{e}_3(s)$ を 従法線ベクトル と呼ぶ. こうして選ばれた $\{\mathbf{e}_1(s), \mathbf{e}_2(s), \mathbf{e}_3(s)\}$ をフレネ標構と呼ぶ. 以上の設定を下に振率を定義する.

定義 4 (振率の定義 [小林]).

$$\tau(s) = -\mathbf{e}_3'(s) \cdot \mathbf{e}_2(s) \quad (9)$$

とにおいて, $\tau(s)$ を 振率 と呼ぶ.

一般のパラメーター t で振率を計算するには次の定理を用いると便利である.

定理 4 (振率の一般表示).

$$\tau(t) = \frac{\det(\dot{\mathbf{x}}(t), \ddot{\mathbf{x}}(t), \ddot{\mathbf{x}}(t))}{|\dot{\mathbf{x}}(t) \times \ddot{\mathbf{x}}(t)|^2} \quad (t: \text{パラメーター})$$

(証明) 式(7)より,

$$\kappa(s)\mathbf{e}_2(s) = \mathbf{e}_1'(s) = \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{v} \right) \dot{\mathbf{x}}(t) + \frac{1}{v^2} \ddot{\mathbf{x}}(t)$$

$$\mathbf{e}_1(s) \times (\kappa(s)\mathbf{e}_2(s)) = \left(\frac{1}{v} \dot{\mathbf{x}}(t) \right) \times \left\{ \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{v} \right) \dot{\mathbf{x}}(t) + \frac{1}{v^2} \ddot{\mathbf{x}}(t) \right\} = \frac{1}{v^3} (\dot{\mathbf{x}}(t) \times \ddot{\mathbf{x}}(t))$$

式(8)より,

$$\mathbf{e}_3(s) = \frac{1}{\kappa v^3} (\dot{\mathbf{x}}(t) \times \ddot{\mathbf{x}}(t))$$

だから,

$$\mathbf{e}_3'(s) = \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\kappa v^3} \right) (\dot{\mathbf{x}}(t) \times \ddot{\mathbf{x}}(t)) + \frac{1}{\kappa v^3} \frac{d}{ds} (\dot{\mathbf{x}}(t) \times \ddot{\mathbf{x}}(t))$$

となる. $\frac{d}{ds} (\dot{\mathbf{x}}(t) \times \ddot{\mathbf{x}}(t))$ の値は

$$\frac{d}{ds} (\dot{\mathbf{x}}(t) \times \ddot{\mathbf{x}}(t)) = \frac{d}{dt} (\dot{\mathbf{x}}(t) \times \ddot{\mathbf{x}}(t)) \frac{dt}{ds} = (\ddot{\mathbf{x}}(t) \times \ddot{\mathbf{x}}(t) + \dot{\mathbf{x}}(t) \times \ddot{\mathbf{x}}(t)) \frac{1}{v} = \frac{1}{v} (\dot{\mathbf{x}}(t) \times \ddot{\mathbf{x}}(t))$$

となる.

$$\begin{aligned}(\dot{\mathbf{x}}(t) \times \ddot{\mathbf{x}}(t)) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t) &= 0 & (\because \dot{\mathbf{x}}(t) \times \ddot{\mathbf{x}}(t) \perp \dot{\mathbf{x}}(t)) \\(\dot{\mathbf{x}}(t) \times \ddot{\mathbf{x}}(t)) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t) &= 0 & (\because \dot{\mathbf{x}}(t) \times \ddot{\mathbf{x}}(t) \perp \dot{\mathbf{x}}(t)) \\(\dot{\mathbf{x}}(t) \times \ddot{\mathbf{x}}(t)) \cdot \ddot{\mathbf{x}}(t) &= 0 & (\because \dot{\mathbf{x}}(t) \times \ddot{\mathbf{x}}(t) \perp \ddot{\mathbf{x}}(t))\end{aligned}$$

(上式となることに注意して) 振率の定義式 (9) より,

$$\begin{aligned}\tau(s) &= -\mathbf{e}_3'(s) \cdot \mathbf{e}_2(s) \\&= -\left\{ \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\kappa v^3} \right) (\dot{\mathbf{x}}(t) \times \ddot{\mathbf{x}}(t)) + \frac{1}{\kappa v^4} (\dot{\mathbf{x}}(t) \times \ddot{\mathbf{x}}(t)) \right\} \cdot \left\{ \frac{1}{\kappa} \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{v} \right) \dot{\mathbf{x}}(t) + \frac{1}{\kappa v^2} \ddot{\mathbf{x}}(t) \right\} \\(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} &= \det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \text{ であることを用いると,} \\&= -\frac{1}{\kappa^2 v^6} (\dot{\mathbf{x}}(t) \times \ddot{\mathbf{x}}(t)) \cdot \ddot{\mathbf{x}}(t) = \frac{1}{\kappa^2 v^6} \det(\dot{\mathbf{x}}(t), \ddot{\mathbf{x}}(t), \ddot{\mathbf{x}}(t)) \\&= \frac{\det(\dot{\mathbf{x}}(t), \ddot{\mathbf{x}}(t), \ddot{\mathbf{x}}(t))}{|\dot{\mathbf{x}}(t) \times \ddot{\mathbf{x}}(t)|^2}\end{aligned}$$

が成り立つ.

2.4 フレネ・セレの公式

定義 5 (フレネ・セレの公式 [小林]). 次の関係式を フレネ・セレの公式 と呼ぶ.

$$\begin{aligned}\mathbf{x}'(s) &= \mathbf{e}_1(s) & \mathbf{e}_1 &: \text{接ベクトル} \\ \mathbf{e}_1'(s) &= \kappa(s)\mathbf{e}_2(s) & \mathbf{e}_2 &: \text{主法線ベクトル} \\ \mathbf{e}_2'(s) &= -\kappa(s)\mathbf{e}_1(s) + \tau(s)\mathbf{e}_3(s) & \mathbf{e}_3 &: \text{従法線ベクトル} \\ \mathbf{e}_3'(s) &= -\tau(s)\mathbf{e}_2(s) & \kappa &: \text{曲率} \quad \tau: \text{振率}\end{aligned}$$

3 ねじれ3次曲線の曲率, 振率

ねじれ3次曲線 C を t でパラメーター表示し, $\mathbf{x}(t) = (t, t^2, t^3)$ (図参照) とおいて話を進める ([L]).

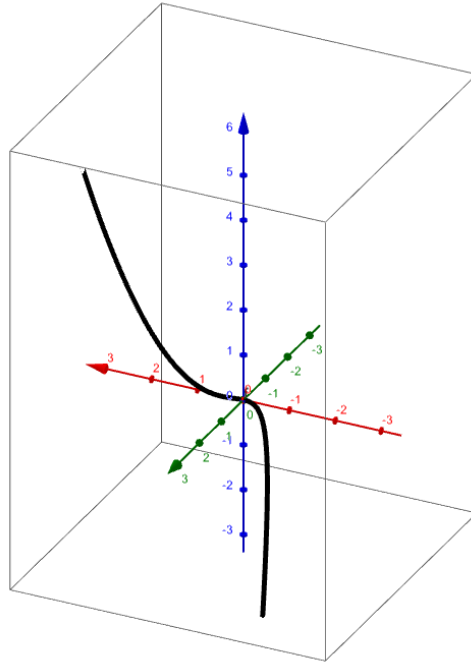


図 3: C のパラメーター値 $-3 \leq t \leq 3$ の部分

3.1 ねじれ3次曲線の曲率

$\kappa(s) = \sqrt{\mathbf{e}_1'(s) \cdot \mathbf{e}_1'(s)}$ を用いてねじれ3次曲線の曲率を求めてみる.

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 3t^2 \end{pmatrix}, \quad \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6t \end{pmatrix}$$

である. 一方, $s(t(s)) = s$ の両辺を s で微分して, $v = \frac{ds}{dt} = \left| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right|$ とおくと,

$$\frac{ds}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = 1 \quad \therefore \frac{dt}{ds} = \frac{1}{\left| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right|} = \frac{1}{\sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}} = \frac{1}{v}$$

である.

$$v = v(t) = \left| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right| = \sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}$$

だから、 $\mathbf{x}(t)$ を s で一階微分すると、

$$\mathbf{e}_1(s) = \frac{d\mathbf{x}}{ds} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{1}{v} \dot{\mathbf{x}}(t)$$

$\mathbf{x}(t)$ を s で二階微分して、

$$\mathbf{e}_1'(s) = \frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2} = \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} \cdot \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \frac{d\mathbf{x}}{dt} \cdot \frac{d^2t}{ds^2}$$

である。

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} \\ A &= \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 = \frac{1}{v^2} \\ \mathbf{p} &= \frac{d\mathbf{x}}{dt} \\ B &= \frac{d^2t}{ds^2} \end{aligned}$$

と各々文字で置き換えると、

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2} = A\mathbf{q} + B\mathbf{p} \tag{10}$$

となる。そこで、 B を求めると、

$$B = \frac{d^2t}{ds^2} = \frac{d}{ds} \left(\frac{dt}{ds}\right) = \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{v}\right) = -\frac{1}{v^2} \cdot \frac{dv}{ds} = -\frac{1}{v^4} (4t + 18t^3) \quad \left(\frac{dv}{ds} = \frac{4t + 18t^3}{v}\right)$$

簡単のため、 $\kappa(s)$ を 2 乗すると、

$$\begin{aligned} \kappa^2(s) &= \frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2} \cdot \frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2} = (A\mathbf{q} + B\mathbf{p})^2 = \frac{1}{v^4} (4 + 36t^2) - \frac{2}{v^6} (4t + 18t^3)^2 + \frac{1}{v^6} (4t + 18t^3)^2 \\ &= \frac{4}{v^6} (1 + 9t^2 + 9t^4) \end{aligned}$$

よって、

$$\kappa(t) = \frac{2}{v^3} \sqrt{1 + 9t^2 + 9t^4} = \frac{2}{1 + 4t^2 + 9t^4} \sqrt{\frac{1 + 9t^2 + 9t^4}{1 + 4t^2 + 9t^4}} \tag{11}$$

となって曲率が求まった。

次に、定理 3 の公式を使って曲率を求めてみる。

$$\kappa = \frac{1}{|\dot{\mathbf{x}}(t)|^3} |\dot{\mathbf{x}}(t) \times \ddot{\mathbf{x}}(t)|$$

だから,

$$|\dot{\mathbf{x}}(t)|^3 = (1 + 4t^2 + 9t^4)^{\frac{3}{2}}, \quad |\dot{\mathbf{x}}(t) \times \ddot{\mathbf{x}}(t)| = 2\sqrt{1 + 9t^2 + 9t^4}$$

よって, これらの値を代入すると,

$$\kappa = \frac{2}{v^3} \sqrt{1 + 9t^2 + 9t^4} = \frac{2}{1 + 4t^2 + 9t^4} \sqrt{\frac{1 + 9t^2 + 9t^4}{1 + 4t^2 + 9t^4}}$$

である. もちろんこれは式 (11) と一致しているが, 計算はこちらの方が圧倒的に簡単である.

3.2 ねじれ3次曲線の捩率

まず, 弧長パラメーターによる定義式 $\mathbf{e}_3'(s) = -\tau(s)\mathbf{e}_2(s)$ の式を用いて求める.

すでに計算した式 () などを用いて,

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_2(s) &= \frac{1}{\kappa} \left(A \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} + B \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right) = \frac{1}{\kappa v^2} \left\{ \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} - \frac{2t}{v^2} (2 + 9t^2) \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right\} \\ &= \frac{v}{2C} \left\{ \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} - \frac{2t}{v^2} (2 + 9t^2) \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right\} = \frac{1}{vC} \begin{pmatrix} -t(2 + 9t^2) \\ (1 - 3t^2)(1 + 3t^2) \\ 3t(1 + 2t^2) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (12)$$

$$\mathbf{e}_3(s) = \frac{d\mathbf{x}}{ds} \times \mathbf{e}_2(s) = \frac{1}{\kappa} \left(\frac{d\mathbf{x}}{ds} \times \frac{d^2 \mathbf{x}}{ds^2} \right) = \frac{A}{\kappa v} \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt} \times \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} \right) = \frac{1}{\kappa v^3} \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt} \times \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} \right)$$

次に, $\mathbf{e}_3(s)$ を s で微分する.

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \mathbf{e}_3(s) &= \frac{dt}{ds} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt} \times \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} \right) = \frac{1}{v} \cdot \frac{d}{dt} \left\{ \frac{2}{\kappa v^3} \begin{pmatrix} 3t^2 \\ -3t \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \frac{1}{vC^3} \begin{pmatrix} 3t(2 + 9t^2) \\ -3(1 - 3t^2)(1 + 3t^2) \\ -9t(1 + 2t^2) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (13)$$

よって, 式 (12) と式 (13) を比較して,

$$\frac{1}{vC^3} \begin{pmatrix} 3t(2 + 9t^2) \\ -3(1 - 3t^2)(1 + 3t^2) \\ -9t(1 + 2t^2) \end{pmatrix} = -\tau \frac{1}{vC} \begin{pmatrix} -t(2 + 9t^2) \\ (1 - 3t^2)(1 + 3t^2) \\ 3t(1 + 2t^2) \end{pmatrix}$$

従って、振率は、

$$\tau = \frac{3}{C^2} = \frac{3}{1 + 9t^2 + 9t^4} \quad (14)$$

である。

次に、定理4の公式 $\tau = \frac{\det(\dot{\mathbf{x}}(t), \ddot{\mathbf{x}}(t), \ddot{\mathbf{x}}(t))}{|\dot{\mathbf{x}}(t) \times \ddot{\mathbf{x}}(t)|^2}$ を用いて振率を求める。

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6t \end{pmatrix}$$

だから、

$$\det(\dot{\mathbf{x}}(t), \ddot{\mathbf{x}}(t), \ddot{\mathbf{x}}(t)) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2t & 2 & 0 \\ 3t^2 & 6t & 6 \end{vmatrix} = 12$$

これより、

$$\tau = \frac{3}{1 + 9t^2 + 9t^4}$$

となる。この式はもちろん弧長パラメーターを用いて求めた式(14)と一致している。

4 曲線の弧長に関するテイラー展開

一般曲線を弧長パラメーター s で $s = 0$ においてテイラー展開すると、

$$\mathbf{x}(s) = \mathbf{x}(0) + \mathbf{x}'(0)s + \frac{1}{2!}\mathbf{x}''(0)s^2 + \frac{1}{3!}\mathbf{x}'''(0)s^3 + \dots \quad (15)$$

と表される。フレネ・セレの公式を用いて、 s による $\mathbf{x}(s)$ の $s = 0$ における導関数を計算すると、

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'(s) &= \frac{d}{ds}\mathbf{x}(s) = \mathbf{e}_1(s) \\ \mathbf{x}''(s) &= \frac{d^2}{ds^2}\mathbf{x}(s) = \frac{d}{ds}\mathbf{e}_1(s) = \kappa(s)\mathbf{e}_2(s) \\ \mathbf{x}'''(s) &= \frac{d^3}{ds^3}\mathbf{x}(s) = \frac{d}{ds}\kappa(s)\mathbf{e}_2(s) = \kappa'(s)\mathbf{e}_2(s) - \kappa^2(s)\mathbf{e}_1(s) + \kappa(s)\tau(s)\mathbf{e}_3(s) \end{aligned}$$

これらの値を式(15)に代入すると、

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(s) &= \mathbf{x}(0) + s\mathbf{e}_1(0) + s^2\frac{\kappa(0)\mathbf{e}_2(0)}{2!} + s^3\frac{1}{3!}(\kappa'(0)\mathbf{e}_2(0) - \kappa^2(0)\mathbf{e}_1(0) + \kappa(0)\tau(0)\mathbf{e}_3(0)) + O(s^4) \\ &= \mathbf{x}(0) + \left(s - \frac{\kappa^2(0)}{6}s^3\right)\mathbf{e}_1(0) + \left(\frac{\kappa(0)}{2}s^2 + \frac{\kappa'(0)}{6}s^3\right)\mathbf{e}_2(0) + \left(\frac{\tau(0)\kappa(0)}{6}s^3\right)\mathbf{e}_3(0) + O(s^4) \end{aligned}$$

となる。但し、 $O(s^4)$ は s に関する 4 次以上の項を表す。

ここで、空間の座標を新たに導入し、 $\mathbf{x}(0)$ を新たな原点として、 $\mathbf{e}_1(0), \mathbf{e}_2(0), \mathbf{e}_3(0)$ を新しい座標軸とする。その時の $\mathbf{x}(s)$ の座標を、

$$\mathbf{x}(s) = \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \\ z(s) \end{pmatrix}$$

とすると、

$$\mathbf{x}(s) = \mathbf{x}(0) + x(s)\mathbf{e}_1 + y(s)\mathbf{e}_2 + z(s)\mathbf{e}_3 + \cdots$$

となる。よって一般曲線の場合は

$$\begin{cases} x_1(s) = s - \frac{\kappa^2}{6}s^3 + O(s^4) \\ y_1(s) = \frac{\kappa}{2}s^2 + \frac{\kappa'}{6}s^3 + O(s^4) \\ z_1(s) = \frac{\tau\kappa}{6}s^3 + O(s^4) \end{cases} \quad (16)$$

という式を得る。ねじれ 3 次曲線 C では $\kappa(0) = 2, \tau(0) = 3$ なので、

$$\begin{cases} x_2(s) = s - \frac{2}{3}s^3 + O(s^4) \\ y_2(s) = s^2 + O(s^4) \\ z_2(s) = s^3 + O(s^4) \end{cases} \quad (17)$$

よって、 s が小さい時、一般曲線は近似的にねじれ 3 次曲線のアフィン変換になることがわかる。

実際、式 (16) と (17) を行列表示すると、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{\kappa^2}{6} \\ 0 & \frac{\kappa}{2} & \frac{\kappa'}{6} \\ 0 & 0 & \frac{\tau\kappa}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ s^2 \\ s^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ s^2 \\ s^3 \end{pmatrix}$$

となる。ねじれ 3 次曲線 C の行列表示は、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ s^2 \\ s^3 \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$$

である. $V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと,

$$V \begin{pmatrix} s \\ s^2 \\ s^3 \end{pmatrix} \doteq \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$$

となり, 左から V^{-1} をかけると,

$$\begin{pmatrix} s \\ s^2 \\ s^3 \end{pmatrix} \doteq V^{-1} \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$$

この式を, 一般曲線の行列表示の式に代入すると,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{\kappa^2}{6} \\ 0 & \frac{\kappa}{2} & \frac{\kappa'}{6} \\ 0 & 0 & \frac{7\kappa}{6} \end{pmatrix} V^{-1} \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$$

従って, 一般曲線は近似的にねじれ3次曲線のアフィン変換になることがわかる.

5 平面ベジエ曲線

平面ベジエ曲線を導入するためにまず, バーンスタイン基底関数を定義する.

定義 6 (バーンスタイン基底関数 [W]). 自然数 N に対して, t の式を,

$$B_{i,N-1}(t) = \binom{N-1}{i} t^i (1-t)^{(N-1)-i} \quad (0 \leq i \leq N-1)$$

で定義し, $B_{i,N-1}(t)$ を **バーンスタイン基底関数** という.

次に平面ベジエ曲線を定義する.

定義 7 (平面ベジエ曲線 [W]). 平面上の相異なる N 個の点 $\mathbb{P}_0, \mathbb{P}_1, \dots, \mathbb{P}_{N-1} \in \mathbb{R}^2$ をとる. これらの点を用いて, t をパラメーターとする平面曲線を,

$$\Gamma : \phi(t) = \sum_{i=0}^{N-1} B_{i,N-1}(t) \mathbb{P}_i \quad (t \in [0, 1] : \text{パラメーター})$$

と定義する. この Γ を **平面ベジエ曲線** といい, $\mathbb{P}_0, \mathbb{P}_1, \dots, \mathbb{P}_{N-1}$ を Γ の **制御点** という.

5.1 平面ベジエ 3 次曲線

定義 8 (平面ベジエ 3 次曲線 ([L])). 平面上の 4 つの制御点を考えて,

$$\mathbb{P}_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} \quad (i = 0, 1, 2, 3)$$

とおく. バースタイン基底関数は,

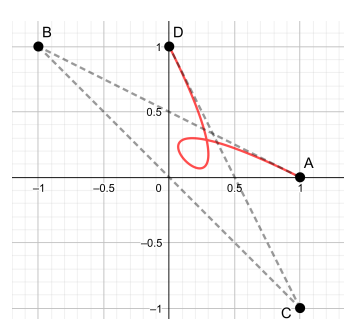
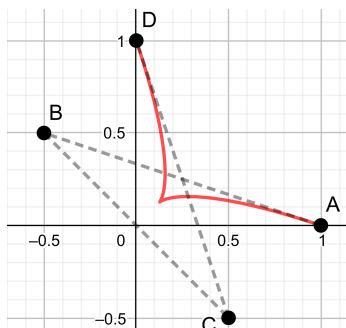
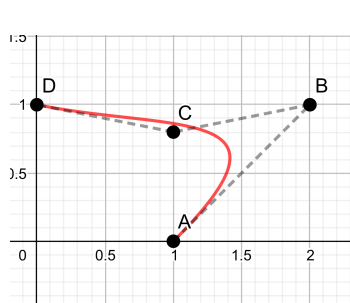
$$B_0(t) = (1-t)^3, \quad B_1(t) = 3t(1-t)^2, \quad B_2(t) = 3t^2(1-t), \quad B_3(t) = t^3$$

である. よって, 定義 7 より,

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \sum_{i=0}^3 B_{i,3} \mathbb{P}_i = B_0 \mathbb{P}_0 + B_1 \mathbb{P}_1 + B_2 \mathbb{P}_2 + B_3 \mathbb{P}_3 \\ &= (1-t)^3 \mathbb{P}_0 + 3t(1-t)^2 \mathbb{P}_1 + 3t^2(1-t) \mathbb{P}_2 + t^3 \mathbb{P}_3 \end{aligned} \quad (18)$$

が平面ベジエ 3 次曲線のパラメーター表示である.

平面ベジェ3次曲線の例 (制御点 A,B,C,D)



滑らかなベジェ曲線

尖点があるベジェ曲線

交点があるベジェ曲線

性質 1. ベジェ曲線 $\phi(t)$ の端点は $\phi(0) = P_0$, $\phi(1) = P_3$ で最初と最後の制御点に一致する.

性質 2. ベジェ曲線の端点における接ベクトルは, $\phi'(0) = \overrightarrow{P_0P_1}$, $\phi'(1) = \overrightarrow{P_2P_3}$ である.

\mathbb{R}^4 内の 3 次曲線を,

$$\Phi(t) = {}^T(B_0(t), B_1(t), B_2(t), B_3(t)) \quad (t \in \mathbb{R})$$

で与えると, $\Phi(t)$ は \mathbb{R}^4 内のねじれ 3 次曲線 (のアフィン変換) のパラメーター表示になる.

(証明) $B_0(t) + B_1(t) + B_2(t) + B_3(t) = 1$ であるから, $H \cong \mathbb{R}^3$ なので, $\Phi(t)$ は本質的に空間 3 次曲線である. 超平面 $H : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$ を考えると, $\Phi(t) \in H \subset \mathbb{R}^4$ であることがわかる. ここで, 具体的に計算してみると,

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= {}^T(B_0(t), B_1(t), B_2(t), B_3(t)) \\ &= {}^T((1-t)^3, 3(1-t)^2t, 3(1-t)t^2, t^3) \\ &= {}^T(1-3t+3t^2-t^3, 3t-6t^2+3t^3, 3t^2-3t^3, t^3) \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t^2 \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t^3 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{19}$$

よって, ねじれ 3 次曲線 (のアフィン変換) のパラメーター表示になっていることがわかる.

$\Phi(t)$ 及び $\phi(t)$ の曲率を計算すると、次のようになる。

例 3 ($\mathbb{P}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbb{P}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbb{P}_i = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbb{P}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ の場合の曲率).

$$\Phi(t) : \kappa(t) = \frac{18\sqrt{3 - 16t + 68t^2 - 88t^3 + 36t^4}}{(18(1 - 6t + 16t^2 - 20t^3 + 10t^4))^{\frac{3}{2}}}$$

$$\phi(t) : \kappa(t) = \frac{2(2 - 7t + 7t^2)}{3(5 - 44t + 142t^2 - 196t^3 + 98t^4)^{\frac{3}{2}}}$$

これらの曲率の間は、一見関係がないように見えるが、次の節で両者の間の関係について考察する。

6 尖点、交差点をもつベジエ曲線の制御点の条件

6.1 尖点を持つベジエ曲線

制御点 P は

$$P = (\mathbb{P}_0, \mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2, \mathbb{P}_3) = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$$

である。§5 で述べたように、ベジエ曲線 Γ のパラメーター表示を $\phi(t)$ 、ねじれ 3 次曲線 C のパラメーター表示を $\Phi(t)$ とすると、

$$\phi(t) = P\Phi(t)$$

である。従って、 $\phi(t)$ の微分は、

$$\phi'(t) = P\Phi'(t)$$

である。尖点では滑らかでなく、曲率が定義できないので、

$$|\phi'(t)| = 0$$

を満たさなければならない。

ベジエ曲線 Γ の曲率を $\kappa_B(t)$ と書くと、定理 3 より、

$$\kappa_B(t) = \frac{|\phi'(t) \times \phi''(t)|}{|\phi'(t)|^3}$$

である。ここでもし $\phi'(t) \neq 0$ なら、曲率が定義できるので $\kappa_B(t)$ は値が定まり、そこではベジエ曲線 Γ が滑らかになる。従って Γ が滑らかでないとする、 $\phi'(t) = 0$ でなければならない。また、

$$\phi'(t) \cdot \phi'(t) = {}^T(\phi'(t)) \cdot \phi'(t) = {}^T\Phi'(t) {}^T P \cdot P \Phi'(t)$$

そこで,

$$S = {}^T P \cdot P = \begin{pmatrix} {}^T \mathbb{P}_0 \\ {}^T \mathbb{P}_1 \\ {}^T \mathbb{P}_2 \\ {}^T \mathbb{P}_3 \end{pmatrix} (\mathbb{P}_0, \mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2, \mathbb{P}_3) = (\mathbb{P}_i \cdot \mathbb{P}_j) \quad (0 \leq i, j \leq 3)$$

を実対称行列とすれば,

$$|\phi'(t)|^2 = {}^T \Phi'(t) S \Phi'(t)$$

である. 一方,

$$\begin{aligned} |\phi'(t) \times \phi''(t)|^2 &= \phi'(t)^2 \cdot \phi''(t)^2 - (\phi'(t) \cdot \phi''(t))^2 \\ &= \det \begin{pmatrix} \phi'(t)^2 & \phi'(t) \cdot \phi''(t) \\ \phi'(t) \cdot \phi''(t) & \phi''(t)^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

だが,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \phi'(t)^2 & \phi'(t) \cdot \phi''(t) \\ \phi'(t) \cdot \phi''(t) & \phi''(t)^2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} {}^T \phi'(t) \\ {}^T \phi''(t) \end{pmatrix} (\phi'(t), \phi''(t)) \\ &= \begin{pmatrix} {}^T \Phi'(t) {}^T P \\ {}^T \Phi''(t) {}^T P \end{pmatrix} (P \Phi'(t), P \Phi''(t)) \\ &= \begin{pmatrix} {}^T \Phi'(t) \\ {}^T \Phi''(t) \end{pmatrix} {}^T P \cdot P (\Phi'(t), \Phi''(t)) \\ &= \begin{pmatrix} {}^T \Phi'(t) \\ {}^T \Phi''(t) \end{pmatrix} S (\Phi'(t), \Phi''(t)) \end{aligned}$$

なので,

$$|\phi'(t) \times \phi''(t)|^2 = \det \left(\begin{pmatrix} {}^T \Phi'(t) \\ {}^T \Phi''(t) \end{pmatrix} S (\Phi'(t), \Phi''(t)) \right)$$

である. これより,

$$\kappa_B(t) = \frac{\det \left(\begin{pmatrix} {}^T \Phi'(t) \\ {}^T \Phi''(t) \end{pmatrix} S (\Phi'(t), \Phi''(t)) \right)}{|{}^T \Phi'(t) S \Phi'(t)|^2}$$

がわかる.

ここから, 尖点が現れるための必要条件の準備をする.

制御点を,

$$P = (\mathbb{P}_0, \mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2, \mathbb{P}_3) = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^t u \\ {}^t v \end{pmatrix} \quad (20)$$

と表す。つまり,

$${}^t u = (x_0, x_1, x_2, x_3), {}^t v = (y_0, y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^4$$

である。 $\Phi(t)$ の微分は,

$$\Phi'(t) = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -1 \\ 3 & -6 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 3t^2 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 3t \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 3t^2 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

である。以下,

$$a = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とする。

定理 5 (尖点が現れるための必要条件). 制御点 \mathbb{P} を式 (20) のように表した時, $t (0 \leq t \leq 1)$ が,

$$\begin{pmatrix} c \cdot u & b \cdot u & a \cdot u \\ c \cdot v & b \cdot v & a \cdot v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \end{pmatrix} = 0 \quad (21)$$

を満たせば尖点が現れる。つまり, 式 (21) を満たす \Rightarrow 尖点が現れる

(証明)

$|\phi'(t)| = 0$ となる時は,

$$\Phi'(t) \perp u \quad (22)$$

$$\Phi'(t) \perp v \quad (23)$$

を満たす時である. 式 (19) より, $A = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -1 \\ 3 & -6 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ とおくと,

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= A\mathbf{x}(t) + \mathbf{d} \\ \Phi'(t) &= A\mathbf{x}'(t) = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -1 \\ 3 & -6 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 3t^2 \end{pmatrix} \\ &= 3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 3t \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 3t^2 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

従って, 式 (22)(23) より,

$$\begin{aligned} \Phi'(t) \cdot u &= 3(c + tb + t^2a) \cdot u \\ &= 3(c \cdot u) + 3t(b \cdot u) + 3t^2(a \cdot u) = 0 \end{aligned}$$

より,

$$(c \cdot u) + t(b \cdot u) + t^2(a \cdot u) = 0 \quad (24)$$

同様に,

$$\begin{aligned} \Phi'(t) \cdot v &= 3(c + tb + t^2a) \cdot v \\ &= 3(c \cdot v) + 3t(b \cdot v) + 3t^2(a \cdot v) = 0 \end{aligned}$$

より,

$$(c \cdot v) + t(b \cdot v) + t^2(a \cdot v) = 0 \quad (25)$$

尖点が見れる時には, 式 (24)(25) を満たさなければいけないので,

$$\begin{pmatrix} c \cdot u & b \cdot u & a \cdot u \\ c \cdot v & b \cdot v & a \cdot v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \end{pmatrix} = 0$$

よって, 定理 5 が示された.

例 4. $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & y & 1 \end{pmatrix}$, $t = \frac{1}{2}$ の時を考えてみる.

$$\begin{aligned} c \cdot u &= 0 & b \cdot u &= -2 + 2x & a \cdot u &= 2 - 3x \\ c \cdot v &= 1 & b \cdot v &= -4 + 2y & a \cdot v &= 4 - 3y \end{aligned}$$

定理 5 より,

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 + 2x & 2 - 3x \\ 1 & -4 + 2y & 4 - 3y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

従って,

$$\begin{cases} -4 + 4x + 2 - 3x = 0 \\ 4 - 8 + 4y + 4 - 3y = 0 \end{cases}$$

よって, この連立一次方程式を解くと $x = 2, y = 0$ となり, 制御点が, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

の時, このベジエ曲線は $t = \frac{1}{2}$ で尖点を持つことが分かる.

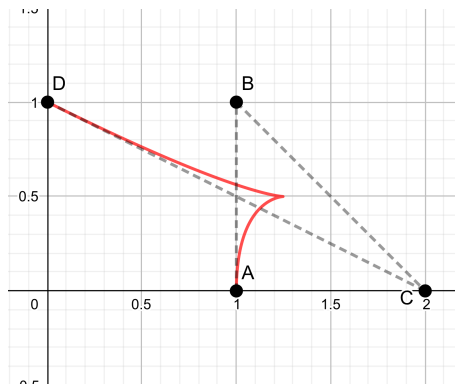


図 4: 尖点があるベジエ曲線

6.2 交差点を持つベジエ曲線

ベジエ曲線が交差点を持つときは,

$$\begin{cases} \phi(t) = P\Phi(t) \\ \phi(s) = P\Phi(s) \end{cases} \quad (0 \leq t < s \leq 1)$$

とおいた時, $\phi(t) = \phi(s)$ を満たさなければならない.

定理 6 (交差点を持つ条件). $(0 \leq t < s \leq 1)$ が

$$PA \begin{pmatrix} 1 \\ t+s \\ t^2+ts+s^2 \end{pmatrix} = 0 \quad (26)$$

を満たす時, $\phi(t), \phi(s)$ で交差点が現れる.

(証明) $\phi(t) = \phi(s)$ より,

$$P\Phi(t) = P\Phi(s), \quad \therefore P(\Phi(t) - \Phi(s)) = 0 \quad (27)$$

ここで,

$$\begin{aligned} \Phi(t) - \Phi(s) &= (A\mathbf{x}(t) + \mathbf{d}) - (A\mathbf{x}(s) + \mathbf{d}) = A(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(s)) \\ &= A \begin{pmatrix} t-s \\ t^2-s^2 \\ t^2-s^2 \end{pmatrix} = (t-s)A \begin{pmatrix} 1 \\ t+s \\ t^2+ts+s^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

よって, 式 (27) に代入すると,

$$(t-s)PA \begin{pmatrix} 1 \\ t+s \\ t^2+ts+s^2 \end{pmatrix} = 0$$

だが, $t \neq s$ なので, これは式 (26) と同値である.

例 5. 制御点が, $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & x & 0 \\ 0 & 1 & y & 1 \end{pmatrix}$ のベジエ曲線を考え, これが, $t = \frac{1}{3}, s = \frac{2}{3}$ の時に交差点を持つ場合を考えてみる.

式 (26) にこれらの値を代入すると,

$$\frac{1}{9}P \begin{pmatrix} -3 & 3 & -1 \\ 3 & -6 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix} = 0$$

$$P \begin{pmatrix} -7 \\ -6 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & x & 0 \\ 0 & 1 & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 \\ -6 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} = 0$$

従って,

$$\begin{cases} -7 + 6 + 6x = 0 \\ -6 + 6y + 7 = 0 \end{cases}$$

この連立一次方程式を解くと $x = \frac{1}{6}$, $y = -\frac{1}{6}$ となり, 制御点が $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/6 & 0 \\ 0 & 1 & -1/6 & 1 \end{pmatrix}$

の時, ベジエ曲線 $\phi(t)$ は $t = \frac{1}{3}$, $s = \frac{2}{3}$ で交差点を持つことが分かった.

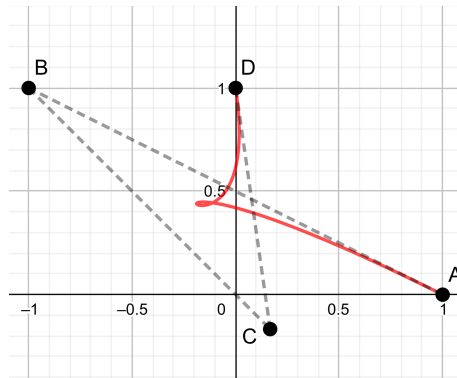


図 5: 交差点を持つベジエ曲線

(注意: 図は尖点を持つベジエ曲線のようにも見えるが, 交差点を持つベジエ曲線である.)

7 最後に

ここでは, 卒業研究発表会で質問していただいた内容を記し, 質問者の先生方に感謝すると共に, その時には答えられなかった点について考える. また, それを踏まえて将来の課題も記す.

7.1 卒業研究発表会での質問内容

- ねじれ3次曲線は平面に含まれない, だから「ねじれ」であるが2次式ではどうなるか? (松田先生)

[回答] ねじれ3次曲線を2次式にすると,

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \\ r_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \\ r_1 \end{pmatrix} + t^2 \begin{pmatrix} p_2 \\ q_2 \\ r_2 \end{pmatrix}$$

となり，この曲線は平面に含まれてしまうので，2次式にすると「ねじれ」ていないことがわかる．

- 交差点が出るベジェ曲線は興味がないのか？(中山先生，川上先生)
[回答] 卒研発表会では今後の課題として，尖点の場合だけを調べようと考えていたが，質問を受けて，交差点がある場合も考えようと思って，それは解決した．

7.2 今後の課題

- ねじれ4次曲線や空間ベジェ曲線というように1次元をあげるとどのようになるのかを知りたい．

最後に，本研究に際して，一年間熱心なご指導をして下さった西山先生に御礼申し上げます．多忙である中，何度も相談や添削をしてくださり心より感謝致します．また，卒業研究発表会において助言を頂いた，中山先生，増田先生，川上先生，松田先生に感謝致します．そして，一年間を共に過ごした西山研究室の皆様へ感謝致します．

参考文献

[L] John B.Little, *The many lives of the twisted cubic*, Amer. Math. Monthly (2019).

[E] L.Eisenhart, *A Treatise on the Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Ginn and Company, (1909)

[小林] 小林昭七，曲線と曲面の微分幾何，裳華房，1977

[W] Eric W.Weisstein, Bernstein Polynomial,
<http://mathworld.wolfram.com/BernsteinPolynomial.html>

[池田] 池田岳，数え上げ幾何学講義，東京大学出版会，2018