

Seifert-van Kampen の定理と 位相空間の基本群

青山学院大学 理工学部 物理・数理学科
学籍番号:15116017 今泉 拓巳
指導教員 西山 享

2020年2月19日

目次

1	序論	2
1.1	研究の背景	2
1.2	研究の主結果	2
1.3	本論文の構成	5
2	基本群	5
2.1	道とホモトピー	5
2.2	基本群	6
2.3	連続写像と基本群	9
3	Seifert-van Kampen の定理	10
3.1	群の表示	10
3.2	Seifert-van Kampen の定理	10
4	基本群の例	12
4.1	実射影平面 $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ の基本群	12
4.2	クラインの壺 \mathcal{K} の基本群	13
4.3	トーラスの貼り合わせ	14
5	結び目の補空間の基本群	15
5.1	結び目	15
5.2	Wirtinger の定理と結び目群	16
5.3	Seifert-van Kampen の定理と結び目群	18
6	まとめ	19
6.1	研究成果	19
6.2	卒業研究発表会での質問内容	20
6.3	今後の課題	20
7	参考文献	21

1 序論

1.1 研究の背景

私が本研究を始めた動機は、3年次の数理専門実験でトポロジーに関する輪講で『代数的トポロジー』を読み、やわらかい幾何学 (=トポロジー) に興味を持ったからである。今までの常識で言えば「円柱と球」、ましてや「持ち手付きのコップとトーラス」などは全くの別物であった。しかし、トポロジーには“同相”という概念があり、今までは違うものとして見てきたものを同じとみることができると知り、その世界に引き込まれた。同相か否かを判別できる道具として、基本群という存在を知った。

その基本群に興味を持ち、本研究を進めることになった。基本群を考えるうえで群の表示というものが重要になってくるが、最初は全く分からずに手こずった。基本群の研究や、群の表示を勉強する際に、[小林]が大変役に立った。また必要に応じて参考文献に挙げた文献、特に[大田]を参考にした。論文を書くにあたり、定義、定理は主に[小林]から引用した。

1.2 研究の主結果

基本群は、位相空間 X 中の閉じた道全体を道同士が連続的に変形させて移りうるとき同じとみなして考えたものであり、群の構造を持つ。道を考えるときには基点と呼ばれる点 $x_0 \in X$ を考えて、この点から出発して同じ点に戻ってくる道を考える。正確には次のように定義する。

定義. 位相空間 X の基本群 $\pi_1(X, x_0)$ を次のように定義する。

$$\begin{aligned}\pi_1(X, x_0) &:= \{f : [0, 1] \rightarrow X \mid f(0) = f(1) = x_0\} / (\text{ホモトピー}) \\ &= \{[f] \mid f : (I, \partial I) \rightarrow (X, x_0)\}\end{aligned}$$

ここで、 $[f]$ は f のホモトピー同値類を表す。群の演算は次のように定義する。

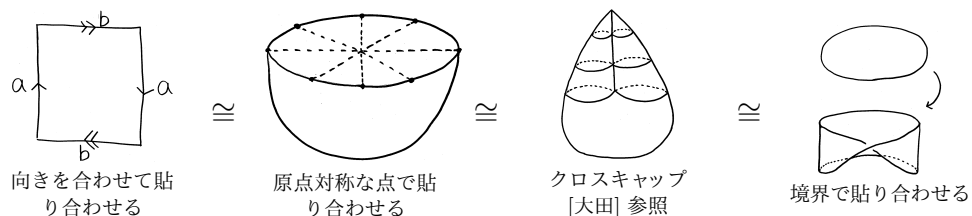
$$[f] \cdot [g] := [f * g]$$

ただし $*$ は2つの道 f と g の積で、直感的には2つの道が続けてたどることを意味している (詳しくは §2.2 定義3 で定義する)。

基本群を求めるための道具として、強変形レトラクションや Seifert-van Kampen の定理がある。手始めにそれらを用いて実射影平面 $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ 、クラインの壺 $\mathbb{R}P^3$ 、トーラスを貼り合わせた空間 $T \cup T$ の基本群を求めた。

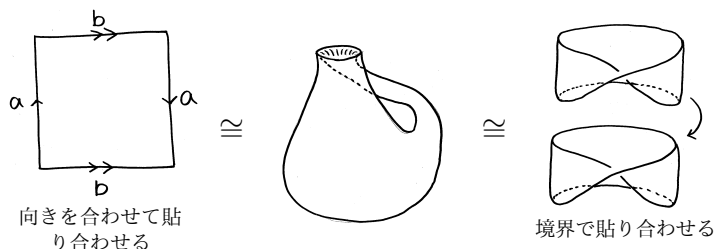
1. $\pi_1(\mathbb{P}^2(\mathbb{R}), x_0) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (§4.1 参照)

実射影平面は、空間内の原点を通る直線全体の集合であり、以下のように図示できる。

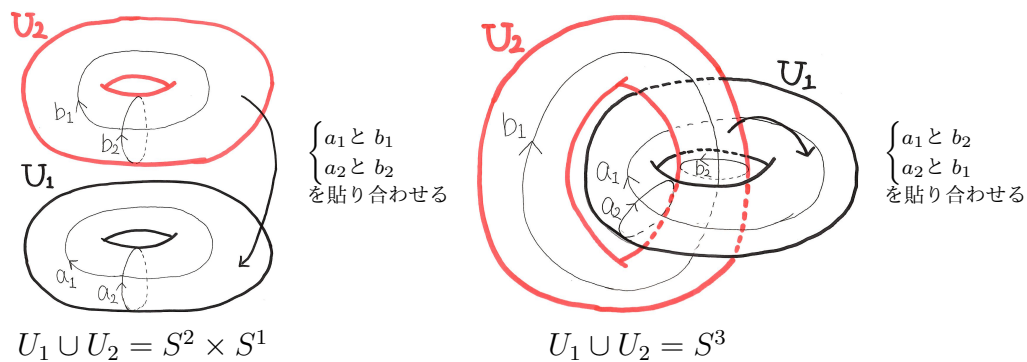


2. $\pi_1(\mathcal{K}, x_0) \cong \langle x, y \mid xyxy^{-1} \rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ (§4.2 参照)

クラインの壺は以下のように図示できる。



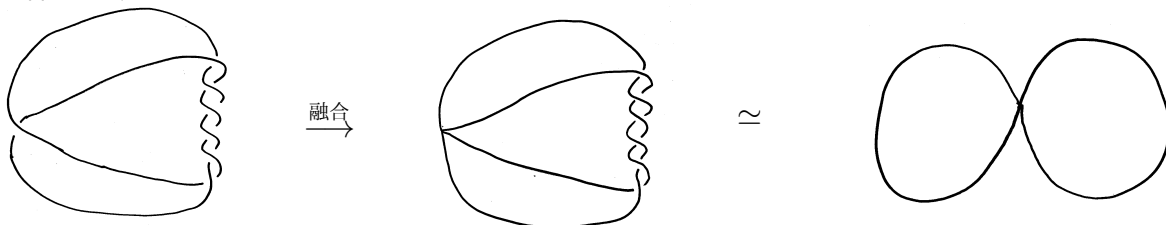
3. $\pi_1(T \cup T, x_0)$ は貼り合わせ方法によって変わる (§4.3 参照)



\mathbb{R}^3 内の単純閉曲線を結び目 K といい、その補空間の基本群 $\pi_1(\mathbb{R}^3 - K, x_0)$ を結び目群という¹。結び目群を求めるには、Wirtinger の定理が一般的かつ強力だが、本研究ではもっと単純かつ直接的な方法で Seifert-van Kampen の定理を用いることを考えた (Wirtinger の定理の証明にも Seifert-van Kampen の定理は用いられている)。その結果、次の定理を導くことができた。

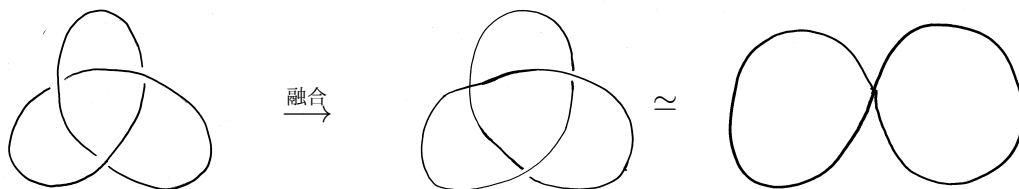
¹本来の定義は $\pi_1(S^3 \setminus K, x_0)$ だが²、ここでは理解しやすいように S^3 のかわりに \mathbb{R}^3 を用いる。基本群としては、両者は同型になる。

定理. 結び目の1つの交差点を融合したときに2つの腕が絡んでいない8の字 ($S^1 \# S^1$: 2つの円周の1点での接合積) にイソトピー変形できるならば, その結び目群は2元生成, 1関係式で表示できる.

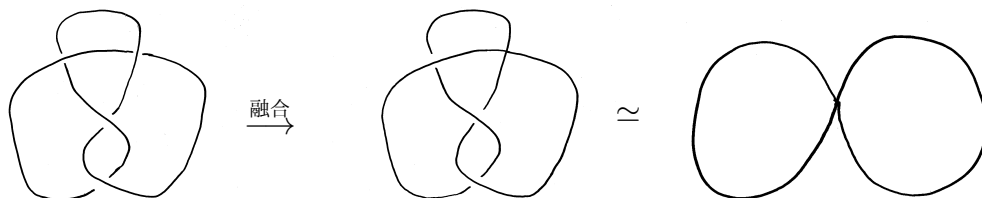


実際, 三つ葉結び目 K_3 と 8の字結び目 K_4 は1つの交差点を融合したときに2つの腕が絡んでいない8の字にイソトピー変形できるので, これらの結び目群を計算すると,

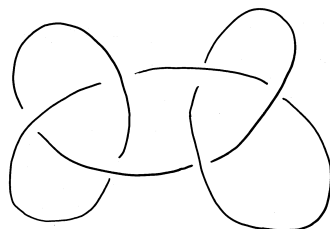
1. $\pi_1(\mathbb{R}^3 - K_3, x_0) \cong \langle x_1, x_2 \mid x_2 x_1 x_2 = x_1 x_2 x_1 \rangle \cong B_3$ (B_3 はブレイド群)



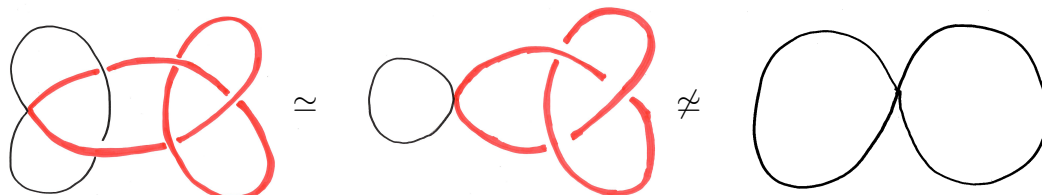
2. $\pi_1(\mathbb{R}^3 - K_4, x_0) \cong \langle a_1, a_2 \mid a_1 a_2 a_1^{-1} a_2 a_1 = a_2 a_1 a_2^{-1} a_1 a_2 \rangle$



となった. 逆に1つの交差点を融合したときに絡みのない2つの腕が絡んでいない8の字にイソトピー変形できない結び目の例として,



が挙げられる.



1.3 本論文の構成

§2では基本群を考えるのに必要となる道とホモトピーを定義し、その後で基本群を定義する。さらに位相空間の間の連続写像によって基本群の間にどのような関係が現れるかを紹介する。§3では、基本群を求める際に有効な Seifert-van Kampen の定理を述べる。その際群の表示を用いるのでここで紹介する。§4では、実際に Seifert-van Kampen の定理を用いて、実射影平面、クラインの壺、トーラスの貼り合わせなどの基本群を求める。§5では、結び目、結び目群について紹介する。続いて結び目群を求めるのに標準的方法である Wirtinger の定理を紹介する。その後、Wirtinger の定理を用いると複雑すぎるので、Wirtinger の定理とは違う方法で Seifert-van Kampen の定理を用いて結び目群について分かったことを紹介する。

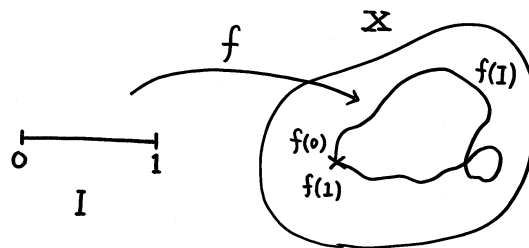
2 基本群

この節では位相空間 X の、基点 $x_0 \in X$ を固定した基本群 $\pi_1(X, x_0)$ について説明する。基本群は、位相不変量であって位相空間が同相か否かを判断するのに役に立つ。基本群が同型でないならば同相ではない。しかし、たとえ基本群が同型でも同相であるとは限らないので注意が必要である。

2.1 道とホモトピー

基本群を定義するために、まず道とホモトピーについて考える。 $I = [0, 1]$ を単位閉区間、 X を位相空間とする。

定義 1 (道). $f : I \rightarrow X$ を連続写像とする。このとき $f(0)$ を始点、 $f(1)$ を終点といい、 $f(I)$ を X の道という。 $f(0) = f(1) = x_0$ のとき、 $f(I)$ を x_0 を基点とする X の閉じた道 (閉曲線) という。



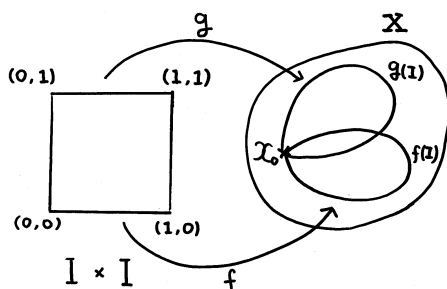
基本群では閉じた道について考えるので、以降 $f(0) = f(1)$ の場合を考える。

W を別の位相空間とし、連結であるとする。写像 $f : X \rightarrow W$ が与えられ、 f が部分集合 $Y \subset X$ と $V \subset W$ の間の写像を誘導するとき、 $f : (X, Y) \rightarrow (W, V)$ と表す。この記法を用いると連続写像 $f : (I, \partial I) \rightarrow (X, x_0)$ は、 f は x_0 を基点とする閉曲線を表している。

定義 2 (ホモトピー). $f, g : I \rightarrow X$ を基点を x_0 とする道とする.

$$F : (I \times I, (\partial I) \times I) \rightarrow (X, x_0)$$

で, $F(s, 0) = f(s)$, $F(s, 1) = g(s)$ を満足するものがあれば f と g は基点を動かさずにホモトピックといい, F を f と g の間のホモトピーという. $f \simeq g \text{ (rel } x_0)$ と書く. このホモトピックという関係は同値関係になる.



2.2 基本群

基本群とは, 道の集合で, ホモトピックなものを同値とした同値類の集合に群演算を定義したものである. そこでまず2つの道の積を定義する.

定義 3 (道の積). $f, g : I \rightarrow X$ に対し, $f(1) = g(0)$ が成り立っているとする. そのとき2つの道の積 $f * g$ を次のように定義する.

$$(f * g)(s) := \begin{cases} f(2s) & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ g(2s - 1) & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

定義 4 (基本群). 位相空間 X の基本群 $\pi_1(X, x_0)$ を次のように定義する.

$$\begin{aligned} \pi_1(X, x_0) &:= \{f : [0, 1] \rightarrow X \mid f(0) = f(1) = x_0\} / (\text{ホモトピー}) \\ &= \{[f] \mid f : (I, \partial I) \rightarrow (X, x_0)\} \end{aligned}$$

ここで, $[f]$ は f のホモトピー同値類を表す. 群の演算は次のように定義する.

$$[f] \cdot [g] := [f * g]$$

この演算は well-defined である. つまり代表元となる道の選び方に依らない. 詳しくは [小林, p.15,16] を参照してほしい. また, この定義で群になるためには次の群の公理を満たす必要がある.

1. 結合律の成立

2. 単位元の存在

3. 逆元の存在

1. の証明. $([f] \cdot [g]) \cdot [h] = [f] \cdot ([g] \cdot [h])$ すなわち $(f * g) * h \simeq f * (g * h)$ を示せばよい.
道の積の定義より,

$$((f * g) * h)(s) = \begin{cases} f(4s) & 0 \leq s \leq \frac{1}{4} \\ g(4s - 1) & \frac{1}{4} \leq s \leq \frac{1}{2} \\ h(2s - 1) & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

$$(f * (g * h))(s) = \begin{cases} f(2s) & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ g(4s - 2) & \frac{1}{2} \leq s \leq \frac{3}{4} \\ h(4s - 3) & \frac{3}{4} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

である. そこで $F : I \times I \rightarrow X$ を

$$F(s, t) := \begin{cases} f\left(\frac{4s}{1+t}\right) & 0 \leq s \leq \frac{t+1}{4} \\ g(4s - (1+t)) & \frac{t+1}{4} \leq s \leq \frac{t+2}{4} \\ h\left(\frac{4s - (2+t)}{2-t}\right) & \frac{t+2}{4} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

とすると,

$$F(s, 0) = ((f * g) * h)(s)$$

$$F(s, 1) = (f * (g * h))(s)$$

より, F は $(f * g) * h$ と $f * (g * h)$ のホモトピーである. □

2. の証明. $[f] \cdot [e] = [f]$ となる, すなわち $f * e \simeq f$ を満たす e が存在することを示す.
 $e : I \rightarrow X, e(I) = x_0 \in X$ とする. $(f * e)(s)$ は定義より,

$$(f * e)(s) = \begin{cases} f(2s) & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ e(2s - 1) & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

である。そこで $F : I \times I \rightarrow X$ を

$$F(s, t) := \begin{cases} f\left(\frac{2s}{1+t}\right) & \left(0 \leq s \leq \frac{t+1}{2}, 0 \leq t < 1\right) \\ e\left(\frac{2s-1-t}{1-t}\right) & \left(\frac{t+1}{2} \leq s \leq 1, 0 \leq t < 1\right) \\ f(s) & t = 1 \end{cases}$$

とすると,

$$\begin{aligned} F(s, 0) &= (f * e)(s) \\ F(s, 1) &= f(s) \end{aligned}$$

より, F は $f * e$ と f のホモトピーであり, e が単位元であることが分かる. \square

3. の証明. $[f] \cdot [\tilde{f}] = [e]$ となる, すなわち $f * \tilde{f} \simeq e$ を満たす \tilde{f} が存在することを示す. $\tilde{f} : I \rightarrow X$, $\tilde{f}(s) = f(1-s)$ とする. $(f * \tilde{f})(s)$ は定義より,

$$(f * \tilde{f})(s) = \begin{cases} f(2s) & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \tilde{f}(2s-1) = f(2-2s) & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

である。そこで $F : I \times I \rightarrow X$ を

$$F(s, t) := \begin{cases} f(2s) & \left(0 \leq s \leq \frac{1-t}{2}, 0 \leq t < 1\right) \\ f(1-t) & \left(\frac{1-t}{2} \leq s \leq \frac{1+t}{2}, 0 \leq t < 1\right) \\ \tilde{f}(2s-1) & \left(\frac{1+t}{2} \leq s \leq 1, 0 \leq t < 1\right) \\ e(s) & t = 1 \end{cases}$$

とすると,

$$\begin{aligned} F(s, 0) &= (f * \tilde{f})(s) \\ F(s, 1) &= e(s) \end{aligned}$$

より, F は $f * \tilde{f}$ と e のホモトピーであり, \tilde{f} が逆元であることが分かる. \square

例 1 (円周の基本群). 円周 S^1 の道は, S^1 をどの向きに何周したかによって決まる. したがって, $\pi_1(S^1, x_0) \cong \mathbb{Z}$ である.

例 2 (円板の基本群). 円板 D^2 は可縮であり, 道は 1 点に縮められるので, $\pi_1(D^2, x_0) \cong \{e\}$ となる.

基本群が自明な群になるとき, 位相空間 X を単連結という. 円板の例からわかるように可縮ならば単連結である. また, 円板の基本群のように単位元しかない群を自明な群と呼ぶ.

2.3 連続写像と基本群

位相空間の間に連続写像があると, 基本群の間に準同型写像が導かれる.

定理 1. $\psi : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ を連続写像とする. $\psi_{\#} : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ を, $\psi_{\#}([f]) := [\psi \circ f]$ で定義すると $\psi_{\#}$ は準同型写像になる. ここで, $[f]$ は f の同値類を表す.

Proof. $\varphi_{\#}([f] \cdot [g]) = \varphi_{\#}([f]) \cdot \varphi_{\#}([g])$ を示す.

$$(\text{左辺}) = \varphi_{\#}([f * g]) = [\varphi \circ (f * g)],$$

$$(\text{右辺}) = [\varphi \circ f] \cdot [\varphi \circ g] = [(\varphi \circ f) * (\varphi \circ g)].$$

ここで,

$$\varphi((f * g)(s)) = \begin{cases} \varphi(f(2s)) & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \varphi(g(2s-1)) & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

$$((\varphi \circ f) * (\varphi \circ g))(s) = \begin{cases} (\varphi \circ f)(2s) & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ (\varphi \circ g)(2s-1) & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

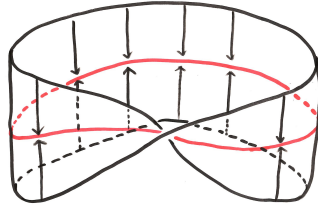
だから, $\varphi \circ (f * g) = (\varphi \circ f) * (\varphi \circ g)$ である. したがって, $\varphi_{\#}([f] \cdot [g]) = \varphi_{\#}([f]) \cdot \varphi_{\#}([g])$ が成り立つ. \square

準同型写像は自動的に導かれるが, 必ずしも同型ではない. 同型写像になる十分条件の 1 つとして強変形レトラクションがある.

定義 5 (強変形レトラクション). $A \subset X$, $i : A \rightarrow X$ (包含写像) とする. $r : X \rightarrow A$ が $r|_A = \text{id}$, $i \circ r \simeq \text{id}_X$ (A を動かさずに) を満たすとき, r を X から A への強変形レトラクションという.

定理 2 (基本群の同型写像). $r : X \rightarrow A$ が強変形レトラクションのとき, $r_{\#} : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(A, x_0)$ は同型写像である.

例 3 (メビウスの帯 M の基本群). 下図のようにメビウスの帯から円周への強変形レトラクションが存在するので, $\pi_1(M, x_0) \cong \pi_1(S^1, x_0) \cong \mathbb{Z}$ である.



3 Seifert-van Kampen の定理

3.1 群の表示

Seifert-van Kampen の定理で「群の表示」という概念を用いるので, まずそれを紹介する. 群 G の表示とは, 群 G を生成元と関係式で記述することをいう. [小林, p.37-39]

定義 6 (群の表示). $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ で生成される自由群を F_n , $F_n \supset R$ の正規閉包を H とする. 群 G が F_n/H と同型なとき $G \cong \langle X \mid R \rangle$ と書く. これを群の表示という. $\varphi: F_n/H \rightarrow G$, $g_i = \varphi(x_i)$ とおくと, $\{g_1, \dots, g_n\}$ で G は生成され, R は $x_1^\pm \sim x_n^\pm$ の積であるが, $w \in R$ に対して, $\varphi(w) = e$ となる. そこで X を生成元の集合, R を関係式の集合と呼ぶ. 以下, g_i と x_i は φ を通して同一視する.

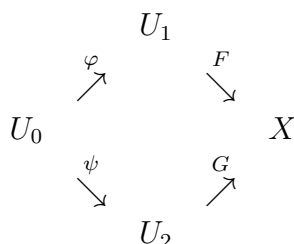
例 4. $G = \langle x \mid x^3 \rangle$ とすると, 下表より $\langle x \mid x^3 \rangle \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ である.

*	x^3	x^6	x^9	\dots	x^{3n}		
x^0	x^3	x^6	x^9	\dots	x^{3n}	\leftrightarrow	0
x^1	x^4	x^7	x^{10}	\dots	x^{3n+1}	\leftrightarrow	1
x^2	x^5	x^8	x^{11}	\dots	x^{3n+2}	\leftrightarrow	2
x^3	x^6	x^9	x^{12}	\dots	$x^{3(n+1)}$	\leftrightarrow	0

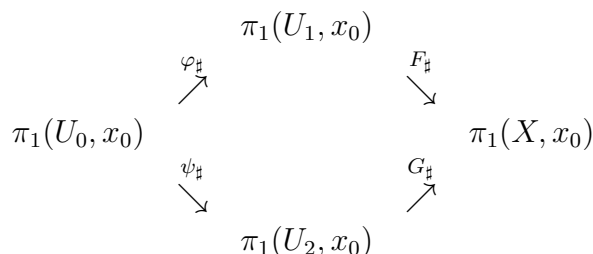
3.2 Seifert-van Kampen の定理

Seifert-van Kampen の定理とは, X を 2 つの連結な開集合による開被覆 $X = U_1 \cup U_2$ をとり, その共通部分を $U_0 = U_1 \cap U_2 = \emptyset$ としたとき, U_1, U_2 の基本群が分かれば X の基本群が分かるという定理である.

定理 3 (Seifert-van Kampen の定理). X を位相空間として, $X = U_1 \cup U_2$ を連結な開集合による開被覆, $U_0 = U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ が連結であるとして, $x_0 \in U_0$ をとる. 以下のような包含写像を考える.



この包含写像により導かれる準同型写像を



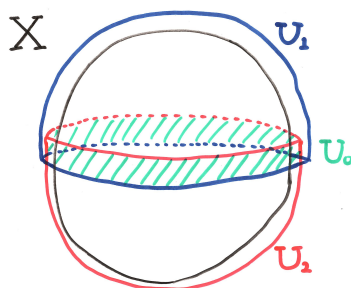
と書く. さらに, 群の表示 $\pi_1(U_i, x_0) = \langle S_i \mid R_i \rangle$ ($i = 0, 1, 2$) がそれぞれ与えられているとする.

このとき, $R_S = \{\varphi_{\#}(s)^{-1}\psi_{\#}(s) \mid s \in S_0\}$ とおくと,

$$\pi_1(X, x_0) \cong \langle S_1 \cup S_2 \mid R_1 \cup R_2 \cup R_S \rangle$$

が成り立つ.

例 5 (球面の基本群). 球面 S^2 を図のような 2 つの連結な開集合で被覆する.



D^2 を 2 次元円板とすると $U_1 \approx D^2$, $U_2 \approx D^2$ なので, 例 2 より,

$$\pi_1(U_1, x_0) \cong \pi_1(U_2, x_0) \cong \pi_1(D^2, x_0) \cong \langle e \mid e \rangle = \{e\}$$

は自明である. $U_0 \approx S^1 \times (0, 1)$ は円周 S^1 への強変形レトラクションがあるので定理 2 より,

$$\pi_1(U_0, x_0) \cong \pi_1(S^1, x_0) \cong \langle a \mid e \rangle \cong \mathbb{Z}.$$

$S_0 = \{a\}$ なので $R_S = \{\varphi_{\#}(a)^{-1}\psi_{\#}(a)\}$ である. $\varphi_{\#}(a)$, $\psi_{\#}(a)$ は, $\pi_1(U_0, x_0)$ の生成元 a の, $\pi_1(U_1, x_0)$, $\pi_1(U_2, x_0)$ における像であるから,

$$\begin{aligned} \varphi_{\#}(a) &= e, \quad \psi_{\#}(a) = e, \\ \therefore R_S &= \{\varphi_{\#}(s)^{-1}\psi_{\#}(s) \mid s \in S_0\} = \{e^{-1}e\} = \{e\}. \end{aligned}$$

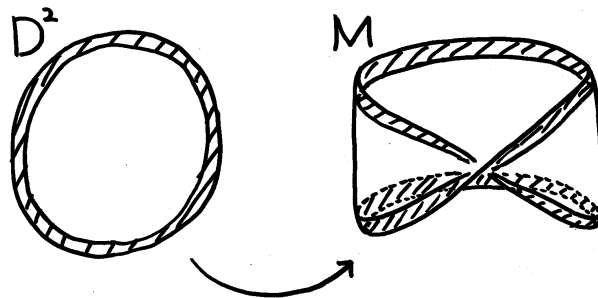
定理 3 より, $\pi_1(X, x_0) \cong \langle e \mid e \rangle \cong \{e\}$ は自明な群である. つまり S^2 は単連結であることが分かる.

4 基本群の例

4.1 実射影平面 $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ の基本群

実射影平面 $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ の基本群は, $\pi_1(\mathbb{P}^2(\mathbb{R}), x_0) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ となることが知られている [澁谷, p.7]. この節では, Seifert-van Kampen の定理を用いて実射影平面 $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ の基本群を求める.

$\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ は, 円板 D^2 の境界とメビウスの帯 M の境界を貼り合わせて作られる [大田, p.53-56]. $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = D^2 \cup M$.



斜線部 U_0 を貼り合わせる

ここで, $D^2 = U_1$, $M = U_2$ とする. 図より $U_0 = U_1 \cap U_2 = S^1 \times (0, 1)$.

$$\pi_1(U_0, x_0) \cong \pi_1(S^1, x_0) \cong \langle a \mid e \rangle$$

$$\pi_1(U_1, x_0) \cong \langle e \mid e \rangle \cong \{e\}$$

$$\pi_1(U_2, x_0) \cong \pi_1(S^1, x_0) \cong \langle b \mid e \rangle$$

である. ここで, $\varphi_{\#}(a)$, $\psi_{\#}(a)$ を求めるが, a は U_2 を 2 周しているの,

$$\varphi_{\#}(a) = e, \quad \psi_{\#}(a) = b^2$$

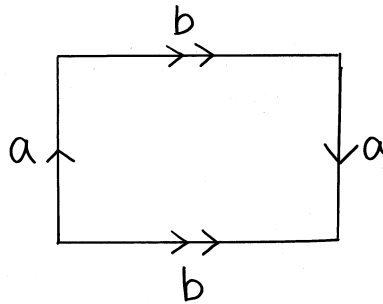
$$\therefore R_S = \{\varphi_{\#}(s)^{-1}\psi_{\#}(s) \mid s \in S_0\} = \{e^{-1}b^2\} = \{b^2\}$$

定理 3 より, $\pi_1(\mathbb{P}^2(\mathbb{R}), x_0) \cong \langle e, b \mid e, b^2 \rangle \cong \langle b \mid b^2 \rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

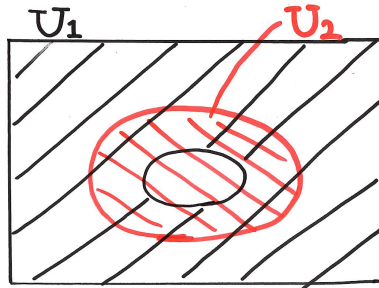
4.2 クラインの壺 \mathfrak{K} の基本群

クラインの壺 \mathfrak{K} の基本群は $\pi_1(\mathfrak{K}, x_0) \cong \langle x, y \mid xyxy^{-1} \rangle$ となることが知られている [小林, p.41]. この節では Seifert-van Kampen の定理を用いてクラインの壺 \mathfrak{K} の基本群を求める.

\mathfrak{K} は, 図のように向き付けられた四角形を貼り合わせることで作られる.



そこで四角形を図のように被覆する.



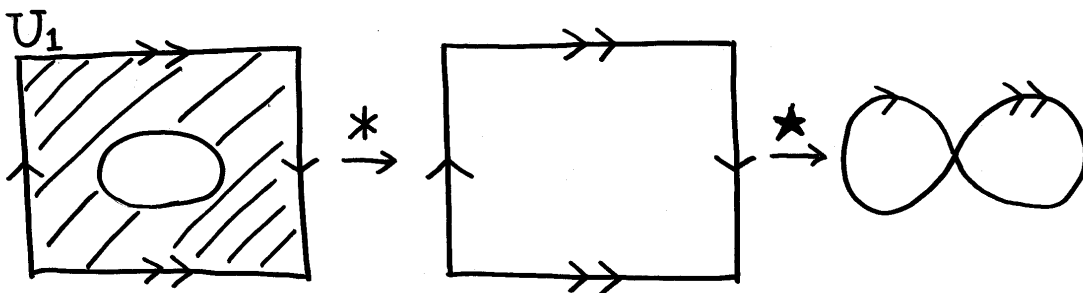
そうすると, $\mathfrak{K} = U_1 \cup U_2$ であって, U_1 はトーラスから円板を除いたもの, U_2 は円板と同相である. また, $U_0 = U_1 \cap U_2 \approx S^1 \times [0, 1]$. なので, それぞれの基本群を求めると,

$$\pi_1(U_1, x_0) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z} \cong \langle a, b \mid e \rangle \quad (\text{下図を参照})$$

$$\pi_1(U_2, x_0) \cong \{e\} \cong \langle e \mid e \rangle$$

$$\pi_1(U_0, x_0) \cong \mathbb{Z} \cong \langle c \mid e \rangle$$

となる.



※枠のみ

*強変形レトラクション, ★貼り合わせ

ここで $\pi_1(U_1, x_0) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z} = F_2$ (2元生成の自由群) となるが, 詳しくは [小林, p.50] を参照してほしい. そこで, $\pi_1(U_0, x_0)$ の生成元 c に対して $\varphi_{\sharp}(c)$, $\psi_{\sharp}(c)$ を求める.

$$\begin{aligned} \varphi_{\sharp}(c) &= e, \quad \psi_{\sharp}(c) = abab^{-1} \\ \therefore R_S &= \{\varphi_{\sharp}(c)^{-1}\psi_{\sharp}(c)\} = \{abab^{-1}\} \end{aligned}$$

定理 3 より, $\pi_1(\mathfrak{R}, x_0) \cong \langle a, b \mid abab^{-1} \rangle$ である. ここで, この群の構造をもう少し調べてみる.

$$\pi_1(\mathfrak{R}, x_0) \cong \langle a, b \mid abab^{-1} \rangle \text{ より,}$$

$$aba = b, \quad bab^{-1} = a^{-1}$$

である. $H = \langle a, b^2 \rangle$ とすると,

$$ab^2(b^2a)^{-1} = ab(ba^{-1}b^{-1})b^{-1} = abab^{-1} = e$$

より, H は可換である. また, $\pi_1(\mathfrak{R}, x_0)/H = \{b, e\} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ である.

$$\begin{array}{ccccccc} \{e\} & \rightarrow & H & \rightarrow & \pi_1(\mathfrak{R}, x_0) & \rightarrow & \pi_1(\mathfrak{R}, x_0)/H & \rightarrow & \{e\} \\ & & \cong & & & & \cong & & \\ & & \mathbb{Z} * \mathbb{Z} & & & & \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & & \end{array}$$

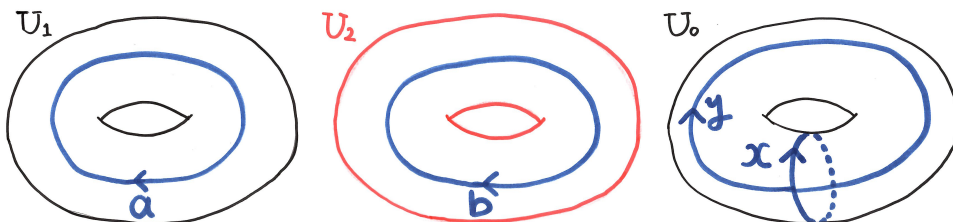
を, 群の拡大という. したがって,

$$\pi_1(\mathfrak{R}, x_0) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \ltimes (\mathbb{Z} * \mathbb{Z}) \text{ (半直積)}$$

とかける.

4.3 トーラスの貼り合わせ

2つの, 境界を除いたソリッドトーラス (中身のつまったトーラス) U_1, U_2 を異なる方法で貼り合わせることを考える. 貼り合わせた空間を $X := U_1 \cup U_2$ とする. 貼り合わせるための準備として, $U_1, U_2, U_0 = U_1 \cap U_2$ の基本群を求めておく. ここで, トーラス同士を貼り合わせるためののりしろはトーラス面になるが, U_0 は開集合でなければならないので, 厚みがついたトーラス面としてとらえる.



ソリッドトーラスは円周 S^1 に強変形レトラクションがあるので、その基本群は \mathbb{Z} に同型である。 U_0 はトーラス面に強変形レトラクションがあるので、基本群は $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ に同型である。 [小林, p.41]

$$\pi_1(U_1, x_0) \cong \langle a \mid e \rangle \cong \mathbb{Z}, \quad \pi_1(U_2, x_0) \cong \langle b \mid e \rangle \cong \mathbb{Z}, \quad \pi_1(U_0, x_0) \cong \langle x, y \mid xyx^{-1}y^{-1} \rangle \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

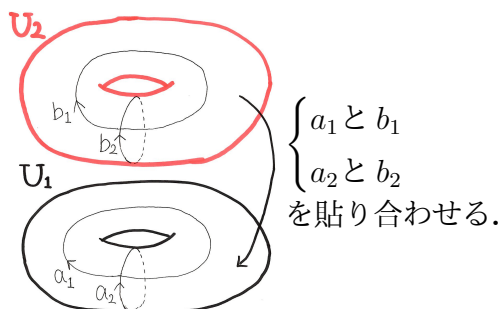
1. U_1, U_2 をそのまま貼り合わせる (図を参照)

このとき $X = S^2 \times S^1$ となる。

$$\varphi_{\#}(x) = e, \quad \psi_{\#}(x) = e$$

$$\varphi_{\#}(y) = a, \quad \psi_{\#}(y) = b$$

$$\therefore \pi_1(X_1, x_0) \cong \langle a, b \mid a^{-1}b \rangle \cong \langle a \mid e \rangle \cong \mathbb{Z}$$



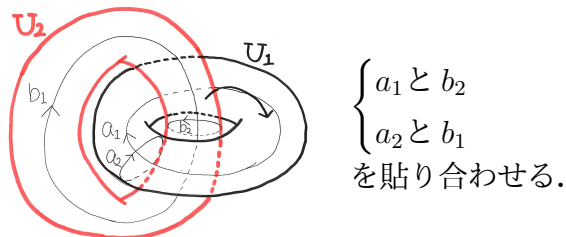
2. 穴に通して貼り合わせる (図を参照)

このとき $X = S^3$ (3次元球面) となる。

$$\varphi_{\#}(x) = e, \quad \psi_{\#}(x) = b$$

$$\varphi_{\#}(y) = a, \quad \psi_{\#}(y) = e$$

$$\therefore \pi_1(X_2, x_0) \cong \langle a, b \mid b, a^{-1} \rangle \cong \{e\}$$



基本群 $\pi_1(S^2 \times S^1, x_0) \cong \mathbb{Z}$, $\pi_1(S^3, x_0) \cong \{e\}$ が同型ではないので、両者は同相ではないことがわかる。

また、トーラス同士を貼り合わせた空間を一般にレンズ空間という。上に挙げた以外の貼り合わせ方法やレンズ空間については詳しくは [森元, p.42-47] を参照してほしい。

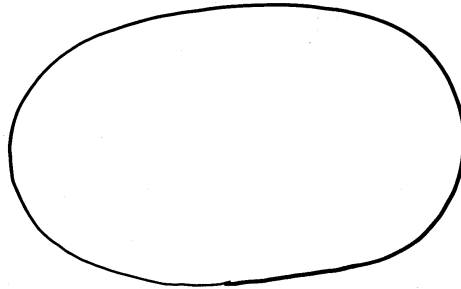
5 結び目の補空間の基本群

5.1 結び目

定義 7 (結び目 K). \mathbb{R}^3 上の単純閉曲線を結び目といい、以下主に K で表す。単純閉曲線は、始点と終点一致している自己交叉のない曲線のことであって、 S^1 と同相である。

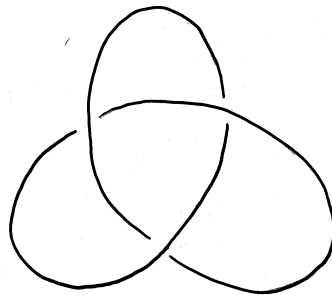
結び目 K を図示したとき、3重以上の交差や接している部分がないものを正則射影図という。以下、 K は正則射影図で考える。

例 6 (自明な結び目). 円周 S^1 を自明な結び目という。



自明な結び目

例 7 (三つ葉結び目). 図のような結び目を三つ葉結び目という.

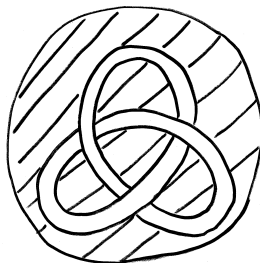


三つ葉結び目

定義 8 (結び目の補空間). S^3 における結び目の補空間を, $\mathbb{R}^3 \setminus K$ と書く. 基本群は $\mathbb{R}^3 \setminus K$ と同じなので, 以下 $S^3 \setminus K$ のかわりに $\mathbb{R}^3 \setminus K$ を考える.

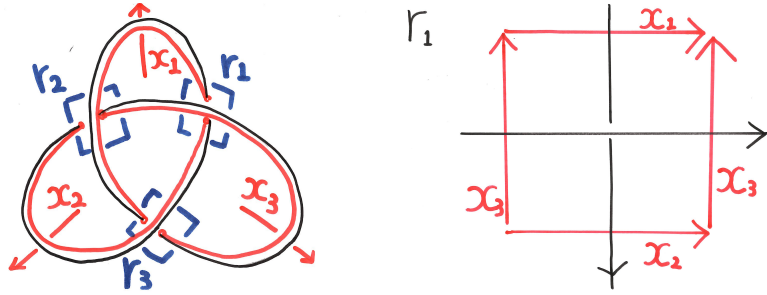
5.2 Wirtinger の定理と結び目群

定義 9 (結び目群). 結び目の補空間 $\mathbb{R}^3 - K$ の基本群 $\pi_1(\mathbb{R}^3/K, x_0)$ を結び目群とよぶ. また, 図示する場合はわかりやすくするため, 結び目を除くかわりに結び目を膨らませたソリッドトーラスと同相な図形の補空間を考える.



例 8 (自明な結び目の結び目群). $\pi_1(\mathbb{R}^3/S^1, x_0) \cong \mathbb{Z}$

定義 10. 結び目 K に向きをつけ、向きに沿って進むことを考える。下の交差点から次の下の交差点の間で進行方向右から左へ K を下からくぐる矢印 x_i を書く。また、各交差点に r_1, r_2, \dots, r_n とラベルを対応させる。すると、ある交差点 r_j の周りは図のようになっている。そこで、 $r_j = x_j x_k^{-1} x_{j+1}^{-1} x_k$ とおく。



定理 4 (Wirtinger の定理). 結び目群 $\pi_1(\mathbb{R}^3/K, x_0)$ は次の表示を持つ。

$$\pi_1(\mathbb{R}^3/K, x_0) = \langle x_1, x_2, \dots, x_n \mid r_1, r_2, \dots, r_n \rangle$$

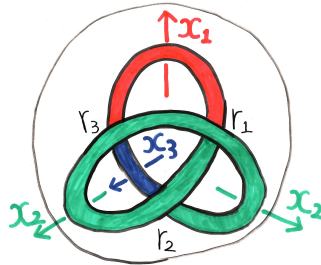
ただし、 x_i, r_j は定義 10 の方法で決める。

例 9 (三つ葉結び目の結び目群). 定理 4 より、

$$\pi_1(\mathbb{R}^3/K_3, x_0) \cong \langle x_1, x_2, x_3 \mid x_1 x_3^{-1} x_2^{-1} x_3, x_2 x_1^{-1} x_3^{-1} x_1, x_3 x_2^{-1} x_1^{-1} x_2 \rangle$$

Wirtinger の定理は決まった手続きを繰り返すことで簡単に結び目群の表示を求めることができる。しかし一方で、生成元と関係式が必要以上に複雑になってしまう場合があるということに注意しなければならない。

例 10 (自明な結び目の結び目群). 自明な結び目の結び目群は例 8 より、 $\pi_1(\mathbb{R}^3/S^1, x_0) \cong \mathbb{Z}$ であるが、図のような場合は定理 4 より、

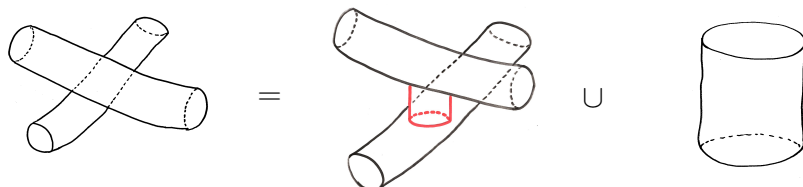


$$\pi_1(\mathbb{R}^3/S^1, x_0) \cong \langle x_1, x_2, x_3 \mid x_1 x_2^{-1} x_2^{-1} x_2, x_2 x_2 x_2^{-1} x_3^{-1}, x_3 x_2 x_1^{-1} x_2^{-1} \rangle$$

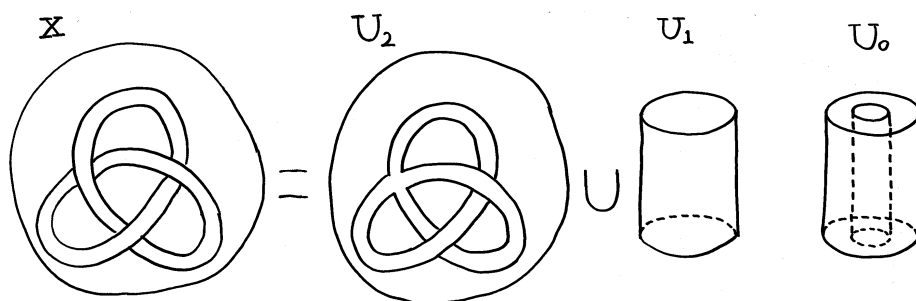
となる。これが \mathbb{Z} と同型であることは一見ただけでは分からない。Wirtinger の定理は Seifert-van Kampen の定理を使って証明するのだが、次節では Seifert-van Kampen の定理を直接使ってより簡単な結び目群の表示を導くことを考える。

5.3 Seifert-van Kampen の定理と結び目群

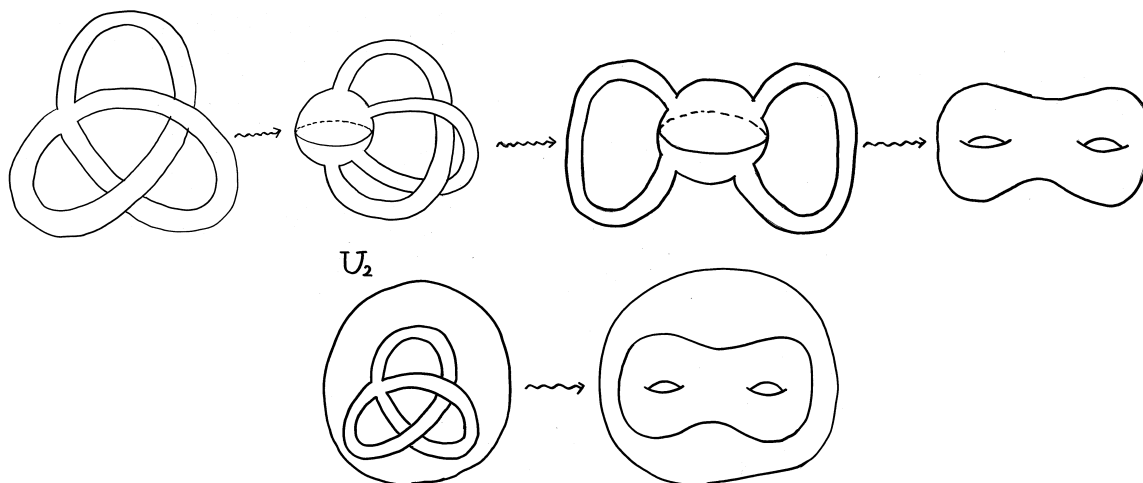
ここでは三つ葉結び目の結び目群について考える．まず，図のようにどこかの交差点を1つ融合するように円柱をくり抜く．



すると，中身をつまった円柱 (U_1) とそれ以外の空間 (U_2) で結び目の補空間を被覆することができる． U_0 は厚みのついた円筒形であって図のようになる．



ここで，Seifert-van Kampen の定理を用いるために $\pi_1(U_i, x_0)$ を求める． U_2 は図のように変形すると球から2つの穴あきトーラスを除いたものにイソトピー変形できることがわかる．



$$\begin{aligned} \pi_1(U_0, x_0) &\cong \mathbb{Z} \cong \langle a \mid e \rangle \\ \pi_1(U_1, x_0) &\cong \{e\} \cong \langle e \mid e \rangle \\ \pi_1(U_2, x_0) &\cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z} \cong \langle b, c \mid e \rangle \end{aligned}$$

Seifert-van Kampen の定理より,

$$\begin{aligned}\pi_1(\mathbb{R}^3/K_3, x_0) &\cong \langle e, b, c \mid e, r \rangle \quad (r = \varphi_{\sharp}(a)^{-1}\psi_{\sharp}(a)) \\ &\cong \langle b, c \mid r \rangle \quad (2 \text{ 元生成, } 1 \text{ 関係式})\end{aligned}$$

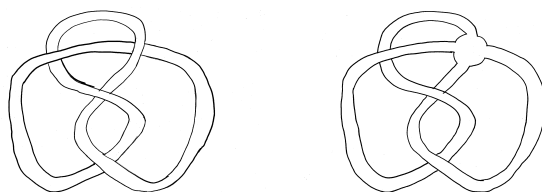
実際計算すると,

$$\pi_1(\mathbb{R}^3 - /K_3, x_0) \cong \langle x_1, x_2 \mid x_2x_1x_2 = x_1x_2x_1 \rangle$$

となる. ここで, $\pi_1(\mathbb{R}^3/K_3, x_0)$ はブレイド群 B_3 と同型である. [河野] 以上の議論と同様にして, 次の定理を示すことができる.

定理 5. 結び目の 1 つの交差点を融合したときに絡みのない 2 つ穴あきトーラスにイソトピー変形できるならば, その結び目群は 2 元生成, 1 関係式で表示できる.

例 11 (8 の字結び目の結び目群). 8 の字結び目は 1 つの交差点を融合すると, 絡みのない 2 つ穴あきトーラスに変形できる.



実際計算すると,

$$\begin{aligned}\pi_1(\mathbb{R}^3/K_4, x_0) &\cong \langle a_1, a_2, a_3, a_4 \mid a_1a_4a_2^{-1}a_4^{-1}, a_2a_1^{-1}a_3^{-1}a_1, a_3a_2a_4^{-1}a_2^{-1}, a_4a_3^{-1}a_1^{-1}a_3 \rangle \\ &\cong \langle a_1, a_2 \mid a_1a_2a_1^{-1}a_2a_1 = a_2a_1a_2^{-1}a_1a_2 \rangle\end{aligned}$$

より, 2 元生成, 1 関係式で表示できる.

6 まとめ

6.1 研究成果

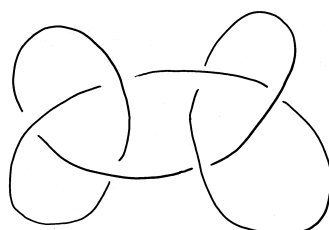
Seifert-van Kampen の定理を用いて色々な位相空間の基本群を求めた. 基本群は位相不変量である. なので, 基本群が同型でないならば同相ではないことがわかる. これを用いることで同じ位相空間の貼り合わせでも貼り合わせ方法によって違う位相空間になることが分かった. §4.3 参照.

また, Seifert-van Kampen の定理を直接使うことで, 結び目群が 2 元生成, 1 関係式になるための, 次の定理を導くことができた. §5.3 参照.

定理. 結び目の 1 つの交差点を融合したときに絡みのない 2 つ穴あきトーラスにイソトピー変形できるならば, その結び目群は 2 元生成, 1 関係式で表示できる.

6.2 卒業研究発表会での質問内容

- トーラスを貼り合わせたものはどのような空間になるか. また, 違う貼り合わせ方法には他にどんなものがあるか. (松田先生)
→ §4.3 に書かせていただきました.
- 交差点を結んで絡みのない2つ穴トーラスにならない場合はあるのか. (中山先生)
→ 下図のように, 素ではない結び目は1つの交差点を融合したときに絡みのない2つ穴あきトーラスにはできない場合があります.



その他, 川上先生からも, ためになる質問をいただきました. ありがとうございます.

6.3 今後の課題

- レンズ空間の基本群がどうなるかを勉強する.
- 上の図のような1つの交差点を融合したときに絡みのない2つ穴あきトーラスにイソトピー変形できない結び目の結び目群を求める. 特に, 生成元や関係式の数に興味がある.

お忙しい中1年間熱心にご指導してくださった西山亨先生に感謝申し上げます. 研究を進めるにあたり質問に付き合ってくださいました松田先生にもここで感謝の意を述べさせていただきます. ありがとうございます. また, 卒業研究発表の場で助言をいただいた中山先生, 川上先生にも深く感謝いたします. そして, 研究で行き詰まったとき共に助け合った西山研究室の皆様にも感謝します.

7 参考文献

参考文献

[小林] 小林一章『曲面と結び目のトポロジー』朝倉書店 1992

[大田] 大田春外『楽しもう射影平面』日本評論社 2016

[森元] 森元勘治『三次元多様体』

[井上] 井上尚夫『幾何学 I 講義ノート』

[澁谷] 澁谷美布『射影空間の基本群とその応用』

[内田] 内田伏一『集合と位相』裳華房 1986

[河野] 河野俊丈『組みひもの数理』遊星社 1993